$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ 上の large discrete series representation を生成する保型形式の generalized Whittaker 関数とその応用

Shuji Horinaga

NTT Institute for Fundamental Mathematics, NTT Communication Science Laboratories, NTT Corporation, Japan

Abstract

本稿では, 2022 年 1 月に RIMS において行われた ”Analytic and arithmetic aspects of automorphic representations” の著者の講演に関する概要を述べる. はじめに, $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ の large discrete series の generalized Whittaker function の無限素点の明示式を求める手法について述べたのち, 保型形式論への応用について述べる. その中で, large discrete series を生成する保型形式の定数項の Levi 部分に現れる表現を generalized Whittaker function が統制することを与える. 最後に, large discrete series を生成する Eisenstein series を infinitesimal character が十分に regular な場合にすべて決定する.

1 Introduction

保型形式の研究は, Hecke らによる一変数保型形式に対する研究から Siegel らによる多変数保型形式の導入, 志村による L-value に関する先駆的な仕事, Langlands による表現論とのかかわりなどを通じて広く深く行われてきた. そのなかでも, 正則保型形式の理論は莫大な研究量を誇る. lifting への応用など華々しい応用も知られ, 保型形式論の中心に位置する理論の一つといってよいだろう. 翻って, 正則以外の保型形式論において, 様々な一般論は知られているものの, 具体的な保型形式のフーリエ係数を明示的に計算するといった形の研究はあまり行われてこなかった. そこで, 本研究では, 非正則な保型形式として, Maass form 等ではなく, 表現論的に性質の良いものを採用し, それらに対する研究の準備といえるものを行う. 具体的には, Sp_4 上の保型形式の中で large discrete series representation を生成するものを考える. そして, large discrete series representation を生成する保型形式の定数項としてありうるものを generalized (degenerate) Whittaker function を通じて列挙し, そのような保型形式の構造論を推し進める.

本研究のジーゲル保型形式の対応物を以下で述べる: 本節においてのみ degree n の保型形式は上半平面 $\mathfrak{H}_n$ 上の関数として考える. $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ に関する degree n weight k のジーゲル保型形式全体を $M_k^{(n)}$, cusp form 全体を $S_k^{(n)}$ とかく. $n > r$

をとる. $f \in S_k^{(r)}$ に対して, $E_k^{(n)}(z,f)$ を

$$E_k^{(n)}(z,f) = \sum_{\gamma \in P_{n,r}(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})} j(\gamma,z)^k f(\gamma(z)^*), \qquad z \in \mathfrak{H}_n$$

より定義する. ここで, $P_{n,r}$ は Levi が $\mathrm{GL}_{n-r} \times \mathrm{Sp}_{2r}$ となる standard parabolic subgroup とし,

$$z^* = z_3, \qquad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^t z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_n, \quad z_3 \in \mathfrak{H}_r$$

としている. このとき $E_k^{(n)}(z,f)$ は $k > n+r+1$ で絶対収束し, weight k degree n のジーゲル保型形式を与える. $E_k^{(n,r)} = \langle E_k^{(n)}(z,f), f \in S_k^{(r)} \rangle_{\mathbb{C}}$ とおく. 次の主張が本研究の主定理のジーゲル保型形式類似である:

Theorem 1.1. k は偶数かつ $k > n+r+1$ のとき,

$$M_k^{(r)} = \bigoplus_{r=0}^{n} E_k^{(n,r)}.$$

ここで, $E_k^{(n,n)} = S_k^{(n)}$.

次に, 本研究の主定理の一部を述べる. $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ の discrete series representation は $\{(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2\} \setminus (\{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0\} \cup \{\lambda_1 = \pm\lambda_2\})$ よりパラメータ付けられる. これらのうち, $\{(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \lambda_1 > \lambda_2 > 0\}$ に対応するものが holomorphic discrete series representation であり, $\{(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 > -\lambda_2 > -\lambda_1\}$ に対応するものが anti-holomorphic discrete series representation となる. そのほかのものが large discrete series representation である. 簡単のため, $\lambda \in \{(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{<0} \mid \lambda_1 > -\lambda_2\}$ に対応するもののみ考える. これは type II と呼ばれる. λ に対応する discrete series representation を $\mathcal{D}_\lambda$ とかく. また, $\mathcal{D}_{k-1}^{\pm}$ を $+$ に対応するものが $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上の weight k の holomorphic discrete series representation, $-$ に対応するものが anti-holomorphic discrete series representation とかく. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の場合も同様に Harish-Chandra parameter を用いて $\mathcal{D}_{k-1}$ のように書く. これらは Harish-Chandra parameter について整合性がとれるように書いた. 原論文 [HN23] とは SL_2 と GL_2 の場合に記号がずれることに注意. $\mathcal{L}_\lambda$ を $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上の保型形式で, $(\mathfrak{sp}_4(\mathbb{R}), \mathrm{U}(2))$-module として $\mathcal{D}_\lambda$ を生成する保型形式全体とする. よく知られていることとして,

$$\mathcal{L}_\lambda = \bigoplus_{(M,\tau)} \mathcal{L}_{\lambda,(M,\tau)}$$

として cuspidal data (M,τ) に沿った分解が存在する. いわゆる cuspidal data に沿った保型形式の空間の分解を適用した. cuspidal data とは, M が Levi subgroup で, τ は $M(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上の A_M^∞ で自明な既約 cuspidal automorphic representation の同型類であり, それらを Weyl 群に関する twist で割ったものである. 非常に雑に述べると, cuspidal data (M,τ) を持つ保型形式は, (M,τ) から構成される Eisenstein series の Taylor 係数が張る保型形式全体になる (cf. [Fra98]). ここで, 次のような問題が自然に得られる:

Question 1.2. • $\mathcal{L}_{\lambda,(M,\tau)} \neq 0$ のとき, (M, τ) は何か.

- $\mathcal{L}_{\lambda,(M,\tau)} \neq 0$ のとき, $\mathcal{L}_{\lambda,(M,\tau)}$ は *Eisenstein series* の *leading term* 以外のものは現れるか.

上記に対して, 本研究では, λ が sufficiently regular な場合に完全な解を得た. また, nearly holomorphic modular forms に対する上記の類似は [Hor22, Hor23] を参照. 注意として, 本研究を通じて cusp form に対する情報そのものは得ていない. あくまで, non square integrable な保型形式に着目していると考えてよい. $P = MN$ を Sp_4 の parabolic subgroup とする. $M(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の irreducible square integrable automorphic representation τ に対して, $\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{Sp}_4}\tau$ を, $P(\mathbb{Q})N(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\backslash \mathrm{Sp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の保型形式 φ であって, 全ての $k \in K$ に対して $m \mapsto m^{-\rho_P}\varphi(mk)$ が τ に属するもの全体として定める. ここで, τ の表現空間として, $L^2_{\mathrm{disc}}(M(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ の τ-isotypic component をとり, K は通常の $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の maximal compact subgroup とする. 以下が本研究の主定理である. 簡単のため, $M = \mathrm{GL}_2$ の場合のみ述べる. $G = \mathrm{Sp}_4$ とする.

Theorem 1.3. 上記の記号の下で, *P を Siegel parabolic subgroup, $M = \mathrm{GL}_2$ を P の Levi component とする. $\tau = \otimes_v \tau_v$ を $M(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の irreducible cuspidal automorphic representation であり, A_M^∞ 上自明とする. つまり, $\{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid a \in \mathbb{R}_+^\times\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 上自明. このとき, 以下が成立する:*

1. *$\mathcal{L}_{\lambda,(M_P,\pi)} \neq 0$ のとき, 無限素点 π_∞ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の weight $\lambda_1 + \lambda_2 + 1$ 又は $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$ の discrete series representation.*

2. *$\pi_\infty = \mathcal{D}_{\lambda_1+\lambda_2}$ のとき, P に沿った定数項は*
$$\mathcal{L}_{\lambda,(M,\pi)} \cong \left(\bigotimes_{v<\infty} \mathrm{Ind}_{P_S(\mathbb{Q}_b)}^{G(\mathbb{Q}_v)} \left(|\cdot|^{(\lambda_1-\lambda_2)/2} \otimes \pi_v \right) \right) \otimes \mathcal{D}_\lambda$$
を誘導する.

3. *$\pi_\infty = \mathcal{D}_{\lambda_1-\lambda_2}$ とする. $\lambda_1 + \lambda_2 > 1$ または $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ であって $\lim_{s\to 1/2} L(s, \pi, \mathrm{std}^\vee)L(2s, \omega_\pi) < \infty$ となるとき, P に沿った定数項は*
$$\mathcal{L}_{\lambda,(M,\pi)} \cong \left(\bigotimes_{v<\infty} \mathrm{Ind}_{P_S(\mathbb{Q}_v)}^{G(\mathbb{Q}_v)} \left(|\cdot|^{(\lambda_1+\lambda_2)/2} \otimes \pi_v \right) \right) \otimes \mathcal{D}_\lambda$$
を誘導する.

証明の方針は, generalized (degenerate) Whittaker function を通じて最初の主張と定理中の定数項の像が行先に含まれることを示す. 逆写像は Eisenstein series である. 最後の主張の条件は定数項の性質上外すことは出来ない. P_J と P_0 の場合も主張はほぼ同様である. しかし, P_0 の場合は上記定理の最後にある条件に相当するものが少し強い条件となってしまっている.

2 Notation

初めに, 記号の導入を行う.

2.1 Basic notation

$\mathbb{Q}$ を有理数体, $\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ の adéle 環, $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ を有限 adéle 環とする. $\mathbb{A}$ 上の non-trivial additive character $\psi = \otimes_v \psi_v$ を $\psi_\infty(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,x)$ と $\psi_p(x) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}y)$ より定義する. ここで, p は素数, y は $\cup_{n=1}^{\infty} p^{-n}\mathbb{Z}$ の元で $x - y \in \mathbb{Z}_p$ なるもの. すべての放物型誘導表現は normalized とする.

2.2 Symplectic groups

degree 2 の symplectc group を $G = \mathrm{Sp}_4$ とかく. G は二つの maximal parabolic subgroup の共役類を持ち, そのほかの parabolic として minimal parabolic subgroup $P_0 = M_0 N_0$ をもつ. maximal parabolic subgroup を $P_J = M_J N_J$ と $P_S = M_S N_S$ とかく. P_S を Siegel parabolic subgroup とする. つまり P_S の Levi subgroup は GL_2. 以下, P_0, P_J, P_S の構造を思い出す.

P_J について観察する. $P_J = M_J N_J$ は次のように表される:

$$N_J = \left\{ n(u_0, u_1, u_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & u_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -u_0 & 1 \end{array}\right) \right\}$$

$$M_J = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & & & \\ & a & & b \\ \hline & & \alpha^{-1} & \\ & c & & d \end{array}\right) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{G}_m,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2 \right\}.$$

N_J は center が $Z_J = \{n(0, u_1, 0) \mid u_1 \in R\}$ となる Heisenberg group である.

次に P_S を観察する. $P_S = M_S N_S$ は次のように表される:

$$N_S = \left\{ n_S(u_0, u_1, u_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & u_0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_1 & u_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \right\}$$

$$M_S = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathrm{GL}_2 \right\}.$$

ここで, N_S は abelian である.

最後に P_0 を観察する. $P_0 = M_0 N_0$ は次のようになる:

$$N_0 = \left\{ n(u_0, u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & u_2 & u_3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -u_0 & 1 \end{array}\right) \right\}.$$

M_0 は対角行列. G の parabolic subgroup P が standard とは, P が P_0 を含むことをいう.

standard parabolic subgroup P に対して, A_P を P の split component とする. つまり, P の center の maximal split torus. A_P^∞ を $A_P(\mathbb{R})$ の identity component とおく. Lie group の Lie algebra を対応する fraktur で書く. また, real Lie algebra の複素化したものを右下に $\mathbb{C}$ を書いて表す. このとき, Cartan involution より

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{+} \oplus \mathfrak{p}_{-}$$

と分解する.

$G(\mathbb{R})$ の Cartan involution を $g \mapsto {}^t g^{-1}$ より定める. その固定部分群を K_∞ もしくは単に K とかく. 素数 p に対して K_p を $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}_p)$ とする. $K_{\mathbb{A}} = \prod_v K_v$ と表す.

3 Generalized Whittaker functions of large discrete series representations

本節では, large discrete series representation の generalized Whittaker function の明示的計算について議論する.

3.1 Classification of discrete series representations of $G(\mathbb{R})$

よく知られているように, $G(\mathbb{R})$ の discerte series representation は集合 $\Xi = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \lambda_1 > \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0\}$ よりパラメータ付けられている. Ξ を以下のように分解する:

$$\begin{aligned}
\Xi_I &= \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2_{>0} \mid \lambda_1 > \lambda_2\}, \\
\Xi_{II} &= \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{<0} \mid \lambda_1 > -\lambda_2\}, \\
\Xi_{III} &= \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{<0} \mid \lambda_1 < -\lambda_2\}, \\
\Xi_{IV} &= \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2_{<0} \mid \lambda_1 > \lambda_2\}.
\end{aligned}$$

Ξ_* に対応する discrete series representation を type * と呼ぶことにする. large discrete series representation は type II, III に対応する. $\lambda \in \Xi$ に対して, λ に対応する discrete series representation を $\mathcal{D}_\lambda$ とかく.

3.2 Minimal K-types of large discrete series representations

K_∞ の既約表現全体を $\widehat{K}$ とかく. このとき, $\widehat{K}$ に “norm” が定まり, それについて minimal な $\mathcal{D}_\lambda$ に現れる K-type が定まる. それを minimal K-type という. 具体的には, minimal K-type の highest weight は以下で計算できる:

- $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Xi_I$ のとき, minimal K-type の highest weight は $(\lambda_1+2, \lambda_2+1)$.
- $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Xi_{II}$ のとき, minimal K-type の highest weight は (λ_1+1, λ_2).
- $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Xi_{III}$ のとき, minimal K-type の highest weight は (λ_1, λ_2-1).
- $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Xi_{IV}$ のとき, minimal K-type の highest weight は $(\lambda_1-2, \lambda_2-1)$.

minimal K-type の highest weight を Λ とかくと, $\mathcal{D}_\lambda$ に現れる K-type の highest weight は

$$\Lambda + \sum_{\alpha \in \Delta_\lambda} n_\alpha \alpha, \qquad n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

とかける. ここで, Δ_λ は λ が属する Ξ_* を定める positive root system. この highest weight の分布より §3.4 にあるように Dirac-Schmidt operator が定まり, さらには微分方程式を立てることができる.

3.3 Generalized (degenerate) Whittaker functions of large discrete series representations

$\lambda \in \Xi$ を固定する. N を G の任意の unipotent subgroup とし, ψ_N を $N(\mathbb{R})$ の unitary character とする. $C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R}))$ を, $G(\mathbb{R})$ 上の緩増加な C^∞-function f の中で次を満たすもの全体とする:

$$f(ng) = \psi_N(n)f(g), \qquad g \in G(\mathbb{R}), n \in N(\mathbb{R}).$$

$\mathcal{D}_\lambda$ の $C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R}))$ への実現, つまり $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{R})}(\mathcal{D}_\lambda, C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})))$ の元を generalized (degenerate) Whittaker functional という. また, 関数空間 $C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R}))$ への像の元を generalized (degenerate) Whittaker function という. 一般に $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{R})}(\mathcal{D}_\lambda, C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})))$ の次元は 1 以下とはならない. N が maximal unipotent で ψ_N が non-degenerate のとき Whittaker functional という. このとき, Hom-space の次元は 1 以下. ここで考えるべき問題の一つは, $\mathcal{D}_\lambda$ の $C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R}))$ に実現した際, 具体的にどのような関数が現れるかをみることである. 正則保型形式だけを扱っていてもあまりこのようなことを意識することはないが, 一般化を行っていく過程で同様の問題にすぐに直面する. たとえば, nearly holomorphic modular form の具体的表示においては, 本質的に類似した (しかしより簡単な) 対象が現れ, 対応する微分方程式の解の考察が必要となる ([Shi00, §13]). それらや Eisenstein series と pullback formula に関する考察を通じ, 志村は scalar valued holomorphic Siegel modular forms の standard L function の critical values の algebraicity を証明した.

$\mathcal{D}_\lambda$ の $C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R}))$ への実現に現れる関数をすべて列挙するということは現実的に難しいため, minimal K-type に対応するものを計算する. ただし, minimal K-type 以外を計算することに意味は, 概正則保型形式が重要な応用を持ったように, もちろん存在する. τ_Λ を $\mathcal{D}_\lambda$ の minimal K-type の isotypic component とする. Hom の元を τ_Λ に制限することにより, $\mathrm{Hom}_K(\tau_\Lambda, C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})))$ を得る. $v \in \tau_\Lambda$ に対して, その像を w_v と書く. w_v を split component 上に制限し, その関数の明示式を微分方程式を通じて得る.

3.4 Generalized degenerate Whittaker functions and differential equations

$P = MN$ を G の parabolic subgroup とし, ψ_N を $N(\mathbb{R})$ の unitary character とする. $\mathcal{D}_\lambda$ の $C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R}))$ への実現を考える. Wh_{ψ_N} を実現, つまり $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{R})}(\mathcal{D}_\lambda, C^\infty_{\psi_N}(N(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})))$ の元とし, その τ_Λ への制限を $\mathrm{Wh}_{\psi_N,\Lambda}$ とかく. $v \in \tau_\Lambda$ に対し, $w_v = \mathrm{Wh}_{\psi_N,\Lambda}(v)$ の $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ の作用を考察する.

$\tau_\Lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 上の既約分解を考え, その highest weight μ の $\tau \otimes \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ への埋め込みを ι_μ とかく. $\mathcal{D}_\lambda$ の K-type の分布と ι_μ を通じて, ある作用素ら ∇ が存在し, $\nabla w_v = 0$ をなす. ∇ を Dirac-Schmidt operator という. とくに, w_v を A_P^∞ 上に制限することで, A_P^∞ 上の関数の微分方程式が得られる. 具体的な微分方程式は複雑なのでここでは述べない. 逆に, λ が far from the walls ならば, とくに $\lambda \in \Xi_{II} \cup \Xi_{III}$ ならば, [Yam90] より, $\mathrm{Wh}_{\psi_N,\Lambda}$ の像はそれら微分方程式の緩増加な解である. 本節ではそのような微分方程式の解については述べず, 次節にまわす. 保型形式論, つまり global な議論において generalized Whittaker function の明示式にどのような役割を期待するかを述べたのちに, 得られた微分方程式の解との比較を行う.

4 Generalized Whittaker functions of automorphic forms

本節では, generalized Whittaker function の明示式とその保型形式論への応用について考察する.

4.1 Constant terms of automorphic forms

$P = MN$ を G の parabolic subgroup とする. G 上の保型形式 φ に対して,

$$\varphi_P(g) = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \varphi(ng)\, dn$$

と定める. $k \in K$ に対して, $M(\mathbb{A})$ 上の関数を $\varphi_{P,k}$ を $\varphi_{P,k}(m) = \varphi_P(mk)$ と定義する. φ の cuspidal data は $\varphi_{P,k}$ が生成する $M(\mathbb{A})$ 上の保型形式が何かを規定するといってよい.

簡単のため, $P = P_S$ の場合を考察する. このとき, $\varphi_{P,k}$ の Whittaker 関数は, 自然に P_0 上の degenerate character に関する Whittaker 関数を右 k 移動して $M(\mathbb{A})$ に制限したと考えてよい. φ の cuspidal support が (M_S, π) となる場合, π の Whittaker 関数がまさに degenerate character の Whittaker 関数そのものである. π は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の cuspidal automorphic representation のため, π に属する保型形式はその Whittaker 関数の和より表される. これこそが degenerate Whittaker 関数の明示式を考察する理由の一つである. もちろん, $P = P_J, P_0$ の場合も同様に degenerate Whittaker function を考えることが必要となる.

4.2 Explicit formulas of degenerate Whittaker functions for large discrete series representations

P_0 の unipotent subgroup N_0 に対して, $N_0(\mathbb{R})$ の character $\psi_{(c_0,c_3)}$ を

$$\psi_{(c_0,c_3)}(n(n_0,n_1,n_2,n3)) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,(c_0n_0 + c_3n_3))$$

により定める. 前節の記述より, $c_0 = c_3 = 0$ が P_0 に関する定数項に寄与し, $c_0 \neq 0, c_3 = 0$ が P_S に関する定数項とその Levi 部分の Whittaker 関数に対応す

る. P_J の場合は本稿では扱わない. [Hir01] の Jacobi 群を用いた展開が, 以下の degenerate Whittaker function の明示式と同様の役割を果たす. $\mathcal{D}_\lambda$ の minimal K-type $(\tau_\Lambda, V_\Lambda)$ の基底 $\{u_0, \ldots, u_{d_\Lambda}\}$ を適切に取る. $\{u_0^*, \ldots, u_{d_\Lambda}^*\}$ を dual basis とする. τ_Λ に属する Whittaker function は dual space V_Λ^* に値を取るとしてよい. 緩増加関数 $W_{\kappa,\mu}(y)$ を次の微分方程式の解とする:

$$\frac{d^2}{dy^2} W_{\kappa,\mu} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{y} + \frac{1/4 - \mu^2}{y^2} \right) W_{\kappa,\mu} = 0.$$

$W_{\kappa,\mu}(y)$ を confluent hypergeometric function という. 注意として, 上記微分方程式の解空間は 2 次元だが, 緩増加な解は一次元である. これらに関する large discrete sereis representation の degenerate Whittaker 関数は以下で表される:

Theorem 4.1 (Ishii-Narita)**.** *$c_0 \neq 0$, $c_3 = 0$ とする. $\mathcal{D}_\lambda$ を $\lambda \in \Xi_{II} \cup \Xi_{III}$ に対する large discrete series representation とする. $\mathcal{D}_\lambda$ の $\psi_{(c_0,c_3)}$ に関する degenerate Whittaker function を $\sum_{i=0}^{d_\Lambda} \varphi_i(g) u_i^*$ と表す. この関数は moderate grouwth と仮定する.*

1. $\lambda \in \Xi_{II}$ とする. i に依存しないある定数 C_0 と C_1 が存在して, $\varphi_i|_{A_0^\infty}$ は

$$C_0 \alpha_i (a_1 a_2)^{\frac{d_\Lambda + 2}{2}} W_{\mathrm{sgn}(c_0)\left(i - \frac{d_\Lambda}{2}\right), \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2 - 1}{2}} \left(4\pi |c_0| \frac{a_1}{a_2} \right) + C_1 \beta_i a_1^{\Lambda_1 + 1} a_2^{\Lambda_2 + 1} \exp\left(-2\pi |c_0| \frac{a_1}{a_2} \right)$$

となる. ここで, $\mathrm{sgn}(c_0)$ は c_0 の符号であり, $c_0 > 0$ のとき

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & (0 \le i \le \Lambda_1 - 1) \\ \frac{1}{(i - \Lambda_1)!} & (\Lambda_1 \le i \le d_\Lambda) \end{cases}, \quad \beta_i = \delta_{i, d_\Lambda} \ (0 \le i \le d_\Lambda)$$

であり, $c_0 < 0$ のとき

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{(-\Lambda_2 - i)!} & (0 \le i \le -\Lambda_2) \\ 0 & (-\Lambda_2 + 1 \le i \le d_\Lambda) \end{cases}, \quad \beta_i = \delta_{i,0} \ (0 \le i \le d_\Lambda).$$

2. $\lambda \in \Xi_{III}$ とする. $\varphi_i|_{A_{P_0}^\infty}$ は

$$C_0 \alpha_i (a_1 a_2)^{\frac{d_\Lambda + 2}{2}} W_{\mathrm{sgn}(c_0)\left(i - \frac{d_\Lambda}{2}\right), \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2 + 1}{2}} \left(4\pi |c_0| \frac{a_1}{a_2} \right) + C_1 \beta_i a_1^{-\Lambda_2 + 1} a_2^{-\Lambda_1 + 1} \exp\left(-2\pi |c_0| \frac{a_1}{a_2} \right)$$

となる. ただし, $c_0 > 0$ のとき

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{(-1)^i}{(i + \Lambda_2)!} & (0 \le i \le -\Lambda_2) \\ 0 & (-\Lambda_2 + 1 \le i \le d_\Lambda) \end{cases}, \quad \beta_i = (-1)^i \delta_{i, d_\Lambda} \ (0 \le i \le d_\Lambda)$$

であり, $c_0<0$ のとき

$$\alpha_i=\begin{cases}\frac{(-1)^i}{(\Lambda_1-i)!} & (0\le i\le\Lambda_1)\\ 0 & (\Lambda_1+1\le i\le d_\Lambda)\end{cases},\quad \beta_i=(-1)^i\delta_{i,0}\ (0\le i\le d_\Lambda).$$

次の主張は, ほとんどの場合を Ishii-Narita により証明された. 著者が行ったのは計算のミスを指摘したことに過ぎない.

Theorem 4.2 (Horinaga-Ishii-Narita)**.** *前定理と同じ記号のもと, $c_0=c_3=0$ とする.*

1. *$\lambda\in\Xi_{II}$ とする. このとき, i によらない定数 $C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,C_4$ が存在し $\phi_i|_{A_0^\infty}$ は*

$$C_0f_{0,i}(a_0)+C_1f_{1,i}(a_0)+C_2f_{2,i}(a_0)+C_3f_{3,i}(a_0)+C_4f_{4,i}(a_0)$$

に一致. ここで,

$$f_{0,i}(a_0)=\begin{cases}a_1^{2-\Lambda_2}a_2^{\Lambda_1} & (i=0)\\ 0 & (0<i\le d_\Lambda)\end{cases},$$

$$f_{1,i}(a_0)=\begin{cases}(-1)^{i/2}a_1^{\Lambda_1+1}a_2^{\Lambda_2+1} & (i\ \text{は}\ even)\\ 0 & (i\ \text{は}\ odd)\end{cases},$$

$$f_{2,i}(a_0)=\begin{cases}0 & (i\ \text{は}\ even)\\ (-1)^{\frac{i-1}{2}}a_1^{\Lambda_1+1}a_2^{\Lambda_2+1} & (i\ \text{は}\ odd)\end{cases},$$

$$f_{3,i}(a_0)=\begin{cases}2^{i/2}(\frac{-d_\Lambda+2}{2})_{i/2}a_1^{\Lambda_1+1}a_2^{-\Lambda_2+1} & (i\ is\ even\ \text{かつ}\ 0\le i\le\ell)\\ 0 & (otherwise)\end{cases},$$

$$f_{4,i}(a_0)=\begin{cases}2^{\frac{i-1}{2}}(\frac{-d_\Lambda+2}{2})_{\frac{i-1}{2}}a_1^{\Lambda_1+1}a_2^{-\Lambda_2+1} & (i\ \text{は}\ odd\ \text{かつ}\ 0\le i\le\ell')\\ 0 & (otherwise)\end{cases}$$

となる. ここで, $\ell=d_\Lambda+\delta(2\Lambda_2-1),\ell'=d_\Lambda+(1-\delta)(2\Lambda_2-1)$ とし, $\delta\in\{0,1\}$ は $d_\Lambda\equiv\delta \mod 2$ であり, $(\alpha)_j$ は Pochhammer symbol.

2. *$\lambda\in\Xi_{III}$ とする. ある i に依存しない定数 C_0,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5 が存在して, $\varphi_i|_{A_0^\infty}$ は*

$$C_0f_{0,i}(a_0)+C_1f_{1,i}(a_0)+C_2f_{2,i}(a_0)+C_3f_{3,i}(a_0)+C_4f_{4,i}(a_0)$$

となる. ここで,

$$f_{0,i}(a_0) = \begin{cases} a_1^{2+\Lambda_1} a_2^{-\Lambda_2} & (i = d_\Lambda) \\ 0 & (0 \le i < d_\Lambda) \end{cases},$$

$$f_{1,i}(a_0) = \begin{cases} (-1)^{i/2} a_1^{-\Lambda_2+1} a_2^{-\Lambda_1+1} & (i \text{ は } \mathit{even}) \\ 0 & (i \text{ は } \mathit{odd}) \end{cases},$$

$$f_{2,i}(a_0) = \begin{cases} 0 & (i \text{ は } \mathit{even}) \\ (-1)^{\frac{i-1}{2}} a_1^{-\Lambda_2+1} a_2^{-\Lambda_1+1} & (i \text{ は } \mathit{odd}) \end{cases},$$

$$f_{3,i}(a_0) = \begin{cases} 2^{i/2} (\frac{-d_\Lambda+2}{2})_{i/2} a_1^{-\Lambda_2+1} a_2^{\Lambda_1+1} & (i \text{ is even かつ } 0 \le i \le \ell) \\ 0 & (\mathit{otherwise}) \end{cases},$$

$$f_{4,i}(a_0) = \begin{cases} 2^{\frac{i-1}{2}} (\frac{-d_\Lambda+2}{2})_{\frac{i-1}{2}} a_1^{-\Lambda_2+1} a_2^{\Lambda_1+1} & (i \text{ is odd and } 0 \le i \le \ell') \\ 0 & (\mathit{otherwise}) \end{cases}.$$

また, $\ell = d_\Lambda + \delta(2\Lambda_2 - 1), \ell' = d_\Lambda + (1-\delta)(2\Lambda_2 - 1)$ であり, $\delta \in \{0, 1\}$ と $(\alpha)_j$ は上記と同じ.

5 Main result

degenerate Whittaker function の明示式の計算 (Theorem 4.1, Theorem 4.2) を通じて, 次が分かる. 証明をおっざっぱに述べると, Whittaker 関数の明示式と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ や $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の discrete series representation の Whittaker function を比較し一致することを述べる. そして Whittaker model の一意性を用いればよい.

Lemma 5.1. *Theorem 4.1 内の Whittaker function $w_S \in \{\langle w_S, v\rangle \mid v \in V_\Lambda\}$ をとる. $\mathcal{W}_S$ を w_s が生成する $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}(2))$-module. このとき, $\mathcal{W}_S$ は $\mathcal{D}_{\Lambda_1+\Lambda_2-1} \oplus \mathcal{D}_{d_\Lambda-1}$ の $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}(2))$-submodule となる.*

Lemma 5.2. *前補題と同様に P_J に関する Whittaker function w_J をとる. 詳細は原論文参照. $\mathcal{W}_J$ を w_J が生成する $(\mathfrak{L}_J, \mathrm{SO}(2))$-module とする. このとき, $\mathcal{W}_J$ は $\lambda \in \Xi_{II}$ のとき $|\cdot|^{-\lambda_2+2} \boxtimes \mathcal{D}^+_{\lambda_1} \oplus |\cdot|^{\lambda_1+2} \boxtimes \mathcal{D}^+_{-\lambda_2}$ の submodule (resp. $\lambda \in \Xi_{III}$ のとき $|\cdot|^{-\lambda_2+2} \boxtimes \mathcal{D}^-_{\lambda_1} \oplus |\cdot|^{\lambda_1+2} \boxtimes \mathcal{D}^-_{-\lambda_2}$ の submodule).*

上記補題は, $k \in K_{\mathbb{A}}$ に対して, $\varphi_{P,k}$ が $M_P(\mathbb{R})$ 上生成する表現をほぼ決定している. しかしながら, すべてではない. より精密には, M_P の交換子群と A_P^∞ 上の表現として何を生成するかを定めている. そのため, $M_P \cap K$ 上のふるまいを見るにはもう少し詳しい情報が必要となる. それは K 上の表現としてのふるまいを見ても良いし, [Mui09] の結果のような generalized principal series representation の組成列を見ることでも理解できる. 帰結として, 以下を得る:

Theorem 5.3. *上記の記号の下で, P を Siegel parabolic subgroup, $M = \mathrm{GL}_2$ を P の Levi component とする. $\tau = \otimes_v \tau_v$ を $M(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の irreducible cuspidal automorphic representation であり, A_M^∞ 上自明とする. つまり, $\{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid a \in \mathbb{R}_+^\times\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 上自明. このとき, 以下が成立する:*

1. $\mathcal{L}_{\lambda,(M_P,\pi)} \neq 0$ のとき, 無限素点 π_∞ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の *weight* $\lambda_1+\lambda_2+1$ 又は $\lambda_1-\lambda_2+1$ の *discrete series representation.*

2. $\pi_\infty = \mathcal{D}_{\lambda_1+\lambda_2}$ のとき, P に沿った定数項は

$$\mathcal{L}_{\lambda,(M,\pi)} \cong \left(\bigotimes_{v<\infty} \mathrm{Ind}_{P_S(\mathbb{Q}_b)}^{G(\mathbb{Q}_v)} \left(|\cdot|^{(\lambda_1-\lambda_2)/2} \otimes \pi_v \right) \right) \otimes \mathcal{D}_\lambda$$

を誘導する.

3. $\pi_\infty = \mathcal{D}_{\lambda_1-\lambda_2}$ とする. $\lambda_1+\lambda_2 > 1$ または $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ であって $\lim_{s\to 1/2} L(s,\pi,\mathrm{std}^\vee)L(2s,\omega_\pi) < \infty$ となるとき, P に沿った定数項は

$$\mathcal{L}_{\lambda,(M,\pi)} \cong \left(\bigotimes_{v<\infty} \mathrm{Ind}_{P_S(\mathbb{Q}_v)}^{G(\mathbb{Q}_v)} \left(|\cdot|^{(\lambda_1+\lambda_2)/2} \otimes \pi_v \right) \right) \otimes \mathcal{D}_\lambda$$

を誘導する.

$P = P_S$ や $P = P_0$ の場合は原論文を参考にされたい. 最後にいくつかの注意を述べる.

Remark 5.4.
- 概正則保型形式との比較を行う. 概正則保型形式において, $P = P_S$ 上に cuspidal support をもつ保型形式は存在しない. それは, 正則保型形式が Siegel Eisenstein series と Klingen Eisensteisn series と cusp form より生成されることとほぼ同等である. このように, P_S の寄与が存在することは正則保型形式との大きな違いといえる. P_S から構成した Eisenstesins seris から L-values の数論性など数論的に非自明なことが言える可能性はある. そのあたりはまだまだ研究途上かと思われる.
- 条件 $\lim_{s\to 1/2} L(s,\pi,\mathrm{std}^\vee)L(2s,\omega_\pi) < \infty$ について述べる. この条件と類似の条件は概正則保型形式の場合にも表れる. 例えば, 一変数の E_2 は $\lim_{s\to 1/2} L(s,\pi,\mathrm{std}^\vee)L(2s,\omega_\pi) < \infty$ に類する条件が成立しないことが原因で E_2 の生成する $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ 上の表現が複雑になる. E_2 が正則保型形式にならないのはまさにこの点が原因である. 具体的には, E_2 の生成する adéle 群の表現は長さが無限大で既約商と既約部分加群が共に一意であるような不思議な表現となる. このような保型形式の一般論が概正則保型形式であり, L-values に大きな貢献を果たした. $\lim_{s\to 1/2} L(s,\pi,\mathrm{std}^\vee)L(2s,\omega_\pi) < \infty$ といった条件が成り立たない保型形式が数論的に非常に面白い現象を豊富に含んでいると思われるが未だよくわかっていない. また, $F \neq \mathbb{Q}$ の場合はこのような条件は必要ない. それは, 概正則保型形式の場合は Siegel-Weil formula から確かめることができる. 今回の large discrete series representation の場合にどうなるか不明である.

References

[Fra98] Jens Franke. Harmonic analysis in weighted L_2-spaces. In *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, volume 31, pages 181–279, 1998.

[Hir01] Miki Hirano. Fourier-Jacobi type spherical functions for discrete series representations of $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$. *Compositio Math.*, 128(2):177–216, 2001.

[HN23] Shuji Horinaga and Hiro-aki Narita. Cuspidal components of siegel modular forms for large discrete series representations of $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$. *arXiv preprint arXiv:2301.11552*, 2023.

[Hor22] Shuji Horinaga. Nearly holomorphic automorphic forms on Sp_{2n} with sufficiently regular infinitesimal characters and applications. *Pacific J. Math.*, 316(1):81–129, 2022.

[Hor23] Shuji Horinaga. On the classification of $(\mathfrak{g}, K)$-modules generated by nearly holomorphic hilbert–siegel modular forms and projection operators. *Annales mathématiques du Québec*, pages 1–40, 2023.

[Mui09] Goran Muic. Intertwining operators and composition series of generalized and degenerate principal series for $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$. *Glasnik Matematicki - GLAS MAT*, 44:349–399, 12 2009.

[Shi00] Goro Shimura. *Arithmeticity in the theory of automorphic forms.* Number 82. American Mathematical Soc., 2000.

[Yam90] Hiroshi Yamashita. Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups. I. General theory and the case of $\mathrm{SU}(2,2)$. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 16(1):31–95, 1990.