(S)-条件をもつ BCK-代数における $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件について

(**On the condition $(\mathbf{Sp})_{x,y}$ in BCK-algebras with condition (S)**)

熊澤　昌明　（箕面学園高等学校）

Masaaki Kumazawa

Minoh Gakuen High School

1　問題の背景

BCK-代数の中で, 束と見做なすことができる構造を持っている特別なクラス, これを"BCK-lattice"と呼んでいるが, 私はこのクラスを特徴づける条件を調べる問題に取り組んでいる.

BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ において, 定義されている二項演算 $*$ を使って 次のように関係 $\leqq$ を与える.

$$x * y = 0 \quad \text{であるとき, このときに限り} \quad x \leqq y \quad \text{とする.}$$

このように与えられた関係 $\leqq$ は X において順序関係となり, BCK-代数 X 自身が半順序集合となることが知られている.

しかし, 束のように任意の 2 元に対して下限または上限が必ず存在するとは限らない. それでは, どのような条件を満たせば下限, あるいは上限が存在するのかを知りたい.

まず, 下限の存在についてである. 1975 年, 田中昭太郎先生は命題論理学についての知見より, 正しい推論における自然な性質を反映させるようにと, 任意の 2 元 x, y に対して, 次の条件：可換性

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \text{ただし} \quad x \wedge y = y * (y * x) \quad \text{とする}$$

が成り立つことを仮定した $\wedge$-commutative algebra を定義した. この新たに提案された代数は, BCK-代数において, この可換性のみを付与したものとなっていることが後にわかったので (S.Tanaka [14]), 現在では可換 BCK-代数と呼ばれている. この代数に関して次の結果が直ちに示された.

定理 1.1　(S. Tanaka [13])　可換 BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ は, 二項演算 $\wedge$ に関して下半束 $X =< X; \wedge, 0 >$ となる. 即ち, X の任意の 2 元 x, y に対して, 積 $x \wedge y$ は x, y の下限となっている.

可換 BCK-代数は良い性質を持っていたために, 初期に集中的に多くの研究がなされた. そのせいなのか, 次の 2 点の違いについて興味を持たれることがなかった. 即ち, BCK-代数において「2 元が可換であること」と「2 元に対して下限が存在すること」の間の関係である. そこで このテーマに関して, 私は 2 元 x, y に対する下限の存在を拡張した概念である"$(\mathrm{I})_{x,y}$-条件"を定義して, 次の結果を得ることができた.

定理 1.2　(熊澤 [10], M. Kumazawa [11])　(I)-条件を持つ BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ は, 演算 $*$ を用いて定義された二項演算 $\times$ に関して下半束 $X =< X; \times, 0 >$ となる. 即ち, X の任意の 2 元 x, y に対して積 $x \times y$ が下限となっている.

更にまた, すべての可換 BCK-代数は (I)-条件を持つ BCK-代数となっている. 即ち, 可換 BCK-代数においては 常に $x \wedge y = x \times y$ が成り立っている.

この (I)-条件を持つ BCK-代数が, すべての BCK-代数の中で, 現在知られている下半束と見做なすことのできる最大のクラスである.

次に, BCK-代数における上限の存在についてである. 1974 年, 井関清志先生は本格的に BCK-代数の研究を再開した論文 [4] において, BCK-代数の特別なクラスとして 最大元 1(unit) の存在を仮定した有界 BCK-代数を定義した. これはちょうど集合論において補集合の存在を保証することと同じような仮定である. このクラスでは $1 * x$ を Nx と記すことにしている. この条件に関して田中先生は次の結果を得た.

定理 1.3 (S. Tanaka [13]) 任意の有界かつ可換な BCK-代数 $X =< X; *, 0, 1 >$ は, 演算 $*$ より導かれる二項演算 $\wedge, \vee$ によって束 $X =< X; \wedge, \vee, 0, 1 >$ となる. 即ち, X の任意の 2 元 x, y に対して, $x \wedge y$ は下限でありかつ $x \vee y$ は上限となる. ただし, $x \wedge y = y * (y * x)$ とし, $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$ とする.

この有界可換 BCK-代数 $X =< X; \wedge, \vee, N, 0, 1 >$ は, 後に 2 つの演算 $\wedge, \vee$ に関して分配法則を満たすことが示され (T. Traczyk [15]), 3 つの演算 $\wedge, \vee, N$ に関してド・モルガン代数となっていることが分かった (K. Iséki, S. Tanaka [9]).

しかし, この代数の上限の存在は直接得られたものではなく, 下限の存在から間接的に得られたものである. 従って, 他の直接的に上限を得ることができる条件を知りたい. そこで更なる考察が必要となる.
さて, BCK-代数 X に定義された二項演算 $*$ には以下のような基本的な性質がある.

任意の 2 元 x, y に関して $x * y \leqq x$ が成り立つ.

すなわち, 任意の元 x は演算 $*$ を行うことによりもとの元より小さくなってしまう. しかし, X の 2 元 x, y の上限であるならば少なくとも x の上界でなければならない. この性質を考慮して井関先生が工夫して導入した概念が (S)-条件 をもつ BCK-代数である.

それでは, あらためて BCK-代数の定義を与えることより始める.

定義 1.1 (BCK-代数 : K. Iséki [3]) 二項演算 $*$ と定数 0 を持つ $< 2, 0 >$ 型の代数 $X =< X; *, 0 >$ が BCK-代数であるとは, X の任意の 3 元 x, y, z に対して, 次の 5 つの条件 **BCK.1〜BCK.5** を満たす代数である.

BCK 1. $\{(x * y) * (x * z)\} * (z * y) = 0$,
BCK 2. $\{x * (x * y)\} * y = 0$,
BCK 3. $x * x = 0$,
BCK 4. $0 * x = 0$,
BCK 5. $x * y = 0$ かつ $y * x = 0$ ならば $x = y$ である.

このとき, 次のように BCK-代数に 演算 $*$ を使って関係 $\leqq$ を入れる.

$x * y = 0$ であるとき, このときに限り $x \leqq y$ とする.

この関係 $\leqq$ は, 前に述べたように BCK-代数において順序関係となることが知られている.

2　BCK-代数の中の上半束

この節では, これまでに既に知られている BCK-代数において”上半束”と見做すことができる 2 つのクラスについて紹介したい.

まずは, 順序構造を持つ代数である上半束の定義を確認しておく.

定義 2.1　(上半束：G. Birkhoff [1])　二項演算 $\cup$ を持つ代数 $L =< L; \cup >$ が上半束であるとは, L の任意の 3 元 x, y, z に対して, 次の 3 つの条件 **UL 1., UL 2., UL 3.** を満たす代数である.

UL 1.　(冪等性)　$x \cup x = x$,
UL 2.　(可換性)　$x \cup y = y \cup x$,
UL 3.　(結合性)　$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$.

この上半束においては, 順序関係 $\leqq$ は二項演算 $\cup$ を使って, 次のように定義される.

$x \cup y = y$　であるとき, このときに限り　$x \leqq y$　とする.

次に, 準備として BCK-代数における 2 種類の特別なクラスを定義する.

ひとつは BCK-代数において, 良い性質をもつことが知られている条件：positive implicative 性　である.

定義 2.2 (positive implicative：K. Iséki [4])　BCK-代数 X において, X の任意の 3 元 x, y, z に対して, 次の等式

$$(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$$

が常に成り立つとき, BCK-代数 X は positive implicative であるという.

もうひとつは, 井関先生によって BCK-代数における上半束を捉えるために導入された特別なクラスである (S)-条件をもつ BCK-代数の概念である.

定義 2.3 ((S)-条件をもつ BCK-代数：K. Iséki [5])　BCK-代数 X において, X の 2 元 x, y に対して, 次の集合

$$S(x, y) = \{z \in X | z * x \leqq y\}$$

を考える. 更に X の任意の 2 元 x, y に対して, 集合 $S(x, y)$ が常に 次の 2 つの条件 (1), (2) を満たすとする.

(1)　$S(x, y) \neq \phi$,　　(2)　$S(x, y)$ において, $\leqq$ に関する最大限 z が存在する.

このときに, この BCK-代数 X を (S)-条件をもつという. また任意の 2 元 x, y に対して $S(x, y)$ の最大限 z は一意的に決まるので二項演算 $\circ$ が定義できる. 即ち $z = x \circ y$ と定めることにする.

この (S)-条件をもつ BCK-代数は, 次の代数構造を持つ.

定理 2.1　(K. Iséki [5])　BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ が (S)-条件をもつならば, 代数 $X =< X; \circ, 0 >$ は二項演算 $\circ$ に関して可換半群となる.

また (S)-条件をもつ BCK-代数において, 二項演算 $\circ$ は 次のように $\leqq$ に関して順序関係を保つ.

定理 2.2 (K. Iséki [5[) (S)-条件をもつ BCK-代数 X において, X の 2 元 x, y が $x \leqq y$ であれば X の任意の元 z に関して, 次の順序関係

$$x \circ z \leqq y \circ z$$

が成り立つ.

更に, (S)-条件をもつ BCK-代数は以下の性質を持つ.

定理 2.3 (K. Iséki [5]) (S)-条件をもつ BCK-代数 X において, 次の 3 つの条件は同値である.

(1) X が positive implicative である,

(2) X の任意の元 x に対して $x \circ x = x$ である,

(3) X の 2 元が $x \leqq y$ ならば $x \circ y = y$ である.

上の定理 2.1, 2.3 より, BCK-代数において上半束である一つのクラスを与える 次の定理 2.4 が導かれる.

定理 2.4 (K. Iséki [5]) (S)-条件をもつ BCK-代数 X が, 演算 $\circ$ に関して上半束となる必要十分条件は X が positive implicative を満たすことである.

ここでは定理 2.1, 2.2, 2.3 に関しては証明を与えない. 興味を持たれる方は講究録 2229 の中の 熊澤 [12] を参照して頂きたい. 日本語で self contained に書いたつもりである.

井関先生によって得られた定理 2.4 により, BCK-代数において上半束と見做せる一つのクラスを知ることができた. 次に, Wiliam Hugh Cornish によって得られた BCK-代数における上半束と見做せるもう一つのクラスを紹介する.

定義 2.4 (コーニッシュ性 : W. H. Cornish [2]) (S)-条件を持つ BCK-代数 $X =< X; *, \circ, 0 >$ において X の 2 元 x, y が, 次の等式

$$x \circ (y * x) = y \circ (x * y)$$

を満たすとき, x と y はコーニッシュ性 (Cornish property) をもつと呼ぶ.

これに関して, 次の (S)-条件をもつ BCK-代数でコーニッシュ性をもつ特別なクラスの性質が示された.

定理 2.5 (W. H. Cornish [2]) (S)-条件を持つ BCK-代数 $X =< X; *, \circ, 0 >$ において,
X の任意の 2 元 x, y が常にコーニッシュ性をもつと仮定する. このとき,

$$z = x \circ (y * x) = y \circ (x * y)$$

とし, $z = x \bigvee y$ と記すことにすると, BCK-代数 $X =< X; \bigvee, 0 >$ は 二項演算 $\bigvee$ に関して上半束となる.

この BCK-代数を, 導来された上限をもつ BCK-代数 (BCK-algebra with a derived supremum) あるいはコーニッシュ代数 (Cornish algebra) と呼ぶ.

なお, 定理 2.5 の証明に関しては, W. H. Cornish [2] を参照して頂きたい.

3　BCK-代数における $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件の基本性質

”$(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件”は, BCK-代数において上半束となるクラスを直接的に特徴づけることを意図して, 熊澤 [12] で定義した一つの概念である．この節では $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件の基本性質について述べたい．なお, この概念は BCK-代数における $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件のアナロジーとして考えたものである．

定義 3.1 ($(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件)　BCK-代数 X の 2 元 x, y に対して, X の元 z が存在し, 以下の条件 (I)〜(III) を満たすとき, z は $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件を満たす という．

(I)　$x \leqq z,\ y \leqq z,$

(II)　$z * x \ \leqq\ y * x,$

(III)　$z * y \ \leqq\ x * y.$

更に, この条件を使って BCK-代数において新たに特別なクラスを定義する．

定義 3.2 ((Sp)-条件を持つ BCK-代数)　次の集合

$$\mathrm{Sp}(x,y) = \{z \in X | X \text{ の 2 元 } x, y \text{ に対して } z \text{ が } (\mathrm{Sp})_{x,y}\text{-条件を満たす }\}$$

を考える．X の任意の 2 元 x, y に対して, 集合 $\mathrm{Sp}(x,y)$ が次の 2 つの条件 (1), (2) を満たすものとする．

(1)　$\mathrm{Sp}(x,y) \neq \phi$,　　(2)　$\mathrm{Sp}(x,y)$ において, $\leqq$ に関する最小元 z が存在する．

この条件を満たす BCK-代数 X を (Sp)-条件を持つといい, このとき 2 元 x, y に対して $\mathrm{Sp}(x,y)$ の最小元 z を $x + y$ で表すことにする．なお, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件の定義から分かるが, 演算 $\circ$ と演算 $+$ の間には $x + y \leqq x \circ y$ の関係が成り立つ．

演算 $\circ$ と演算 $+$ の間の関係については, 熊澤 [12] でその関係を具体的にみたが 再度確認しておきたい．

例 3.1 (K. Iséki, S. Tanaka [8])　集合 $Z_{\geqq 0} = \{0, 1, 2, \cdot\cdot\cdot\}$ において, $Z_{\geqq 0}$ の任意の 2 元 m, n に対して, 以下のように演算 $*$ を定義する．

$$m * n = \begin{cases} 0 & (m \leqq n \text{ のとき}), \\ m - n & (m > n \text{ のとき}). \end{cases} \tag{3.1}$$

このとき, 代数 $Z_{\geqq 0} =< Z_{\geqq 0}, *, 0 >$ は BCK-代数であり, 更に代数 $Z_{\geqq 0} =< Z_{\geqq 0}, \circ, 0 >$ は (S)-条件をもつ BCK-代数であり, また 代数 $Z_{\geqq 0} =< Z_{\geqq 0}; +, 0 >$ は (Sp)-条件をもつ BCK-代数となっている．

この 2 種の演算 $\circ$, $+$ を観察したとき, 演算 $\circ$ は非負整数全体からなる集合 $Z_{\geqq 0}$ の任意 2 元 m, n に対して加算と同じような働きをしている．一方, 演算 $+$ は数の大小関係からなる全順序集合である束 $Z_{\geqq 0}$ の 2 元 m, n に対して束演算の和 $\cup$ と同じような働きをしている．この例では, 上半束の演算としては $\circ$ より $+$ の方が適していると考えられる．

ここで, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件の基本性質を示すために重要な役割を果たしている 次の定理を紹介しておく. これは (S)-条件をもつ BCK-代数の一つの特徴づけを与えるものである. 即ち, BCK-代数に新たに定義される演算 $\circ$ が以下の等式を満たす事が, BCK-代数が (S)-条件をもつための必要十分条件となっている.

定理 3.1 (湯谷の等式 : K.Iséki [6] , 井関 [7]) BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ において, 次の条件が BCK-代数 X が (S)-条件をもつための必要十分条件になっている.

条件 : X 上に新たに二項演算 $\circ$ が定義されて任意の 3 元 x, y, z に関して, 次の等式

$$(x * y) * z = x * (y \circ z)$$

を満たす.

$(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件の基本性質

ここから, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件に関する基本性質を紹介していく. まず, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件がコーニッシュ性を拡張した概念であることを示す.

命題 3.1 (S)-条件をもつ BCK-代数において, 2 元 x, y が コーニッシュ性 :

$$x \circ (y * x) = y \circ (x * y) = z$$

をもつとき, z は $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件も満たす.

(証明) 最初に, $z = x \circ (y * x) = y \circ (x * y)$ と書くことにする.

まず, 条件 (I) を示したい. 湯谷の等式を用いると

$$\begin{aligned} x * z &= x * \{x \circ (y * x)\} \\ &= (x * x) * (y * x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

従って, $x \leqq z$ が成り立つ. 同様にして, 更にコーニッシュ性と湯谷の等式より, $y \leqq z$ も示すことができる.

次に, 条件 (II) を示したい. 再び湯谷の等式より

$$\begin{aligned} (z * x) * (y * x) &= z * \{x \circ (y * x)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

従って, $z * x \leqq y * x$ が成り立つ. 条件 (III) であるが, 条件 (II) を示した方法と同様にして $z * y \leqq x * y$ が示される. 従って, 命題の証明はされた.

次に, 定理 3.3 を示すための補題を用意する.

補題 3.2 (S)-条件をもつ BCK-代数の 3 元 x, y, z において, 次の同値性がいえる.

$$z * x \leqq y * x \iff x \circ (y * x) \geqq z.$$

(証明)　まず, 必要条件 ($\Longrightarrow$) を示す. 仮定 $z * x \leqq y * x$ と 定理 2.2 より

$$(z * x) \circ x \leqq (y * x) \circ x \tag{3.2}$$

が成り立つ. 一方, BCK-代数においては常に $z * (z * x) \leqq x$ が成り立つので, z は $z * x$ と x に関して (S)-条件を満たす. 従って,

$$z \leqq (z * x) \circ x \tag{3.3}$$

が成り立つ. よって (3.2), (3.3) より, 不等式

$$z \leqq x \circ (y * x)$$

が成り立つ. これで必要性は示された.

次に, 十分性 ($\Longleftarrow$) を示す. 始めに $z' = x \circ (y * x)$ とおくと, (S)-条件の定義より

$$z' * x \leqq y * x \tag{3.4}$$

が成り立ち, 更に仮定より $z \leqq z'$ なので

$$z * x \leqq z' * x \tag{3.5}$$

となり, (3.4), (3.5) より 不等式

$$z * x \leqq y * x$$

が成り立つ. これで十分性が示された. 従って, 補題は証明された.

次に, 主結果である $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件が上限の存在の一つの拡張となっていることを示す.

定理 3.3　(S)-条件をもつ BCK-代数 X において, X の 2 元 x, y に対してその上限 z が存在するとき, z は $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件を満たす.

(証明)　X の 2 元 x, y の上限を z とする. このとき, 条件 (I) $x \leqq z,\ y \leqq z$ は明らかである.

次に, 条件 (II), (III) を示したい. まず, $x \circ (y * x)$ が x と y の一つの共通の上界であることを示す.
湯谷の等式を用いると

$$x * \{x \circ (y * x)\} = (x * x) * (y * x) = 0.$$

よって, $x \leqq x \circ (y * x)$ が示される.
また, 再び湯谷の等式より

$$y * \{x \circ (y * x)\} = (y * x) * (y * x) = 0.$$

よって, $y \leqq x \circ (y * x)$ も示された.
これにより, $x \circ (y * x)$ が x と y の共通の上界であることが分かった.

また, 同様にして $y \circ (x * y)$ も x と y に関する一つの共通の上界であることを示すことができる.

更に, 上限 z は x と y の最小の上界であるので 不等式

$$z \leqq x \circ (y * x) \tag{3.6}$$

が成り立つ. 同様にして 不等式

$$z \leqq y \circ (x * y) \tag{3.7}$$

も成立する.

ここで, (3.6) と 補題 3.2 より

$$z \leqq x \circ (y * x) \Longleftrightarrow z * x \leqq y * x.$$

が得られる. これで条件 (II) が示された. 更に, (3.7) と 補題 3.2 より

$$z \leqq y \circ (x * y) \Longleftrightarrow z * y \leqq x * y.$$

が得られる. よって条件 (III) が示された. これで条件 (I), (II), (III) が示されたので, x と y の上限 z は $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件を満たす.

研究集会の時には 次の予想を正しいと述べてしまったが, その後その証明には問題があることに気が付いたので, 今は予想にしておく.

予想 (Sp)-条件をもつ BCK-代数 $X =< X; *, 0 >=< X; +, 0 >$ は, 演算 $+$ に関して上半束となる.

この予想を証明することができれば, BCK-代数において上半束となる 3 つのクラスが得られることになるが, そこで 更に次の問題について考えたい.

問題 BCK-代数において上半束と見做せる次の 3 つのクラスを, それぞれ

クラス A : (S)-条件をもち positive implicative である BCK-代数,

クラス B : 導来された上限をもつ BCK-代数,

クラス C : (Sp)-条件を持つ BCK-代数.

とする. これら 3 つのクラスの間の包含関係を調べる.

私は, クラス A はクラス B と実は等しく, クラス C がクラス A すなわちクラス B を含んでいると予想しているが, まず具体例での確認から始めようと思う.

Acknowlegments

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Resarch Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] G. Birkhoff, Lattice Theory (Third Edition), Colloquium Publication, **25**, American Mathematical Society, (1993).

[2] W. H. Cornish, BCK-Algebras with a Supremum, *Math. Japonicae*,**27**, No. 1 (1982), 63-73.

[3] K. Iséki, An Algebra Related with a Propositional Calculus, *Proc. Japan Acad.*,**42**, No.1(1966), 26-29.

[4] K. Iséki, Some Properties of BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*,**2**(1974), 193-201.

[5] K. Iséki, BCK-Algebra with Condition (S), *Math. Japonicae*, **24**, No.1(1979), 107-119.

[6] K. Iséki, On BCK-Algebra with Condition (S), *Math. Japonicae*, **24**, No.6(1980), 625-626.

[7] 井関清志, BCK-代数, 数理解析研究所講究録=*RIMS Koukyuroku*, **395**, (1980), 95-111.

[8] K. Iséki and S. Tanaka, Ideal Theory of BCK-Algebras, *Math. Japonicae*, **21** (1976), 351-366.

[9] K. Iséki and S. Tanaka, Introduction to the Theory of BCK-Algebras, *Math. Japonicae*, **23**, No.1 (1978), 1-26.

[10] 熊澤昌明, BCK-代数における $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件の性質をめぐって, 数理解析研究所講究録=*RIMS Koukyuroku*, **2130**, (2019), 57-63.

[11] M. Kumazawa, A New Class in BCK-Algebras, *Scientiae Math. Japonicae,* **84**, No.1 (2021), 61-75.

[12] 熊澤昌明, BCK-代数における井関の"(S)-条件"について, 数理解析研究所講究録=*RIMS Koukyuroku*, **2229**(2022), 42-51.

[13] S. Tanaka, A New Class of Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 37-43.

[14] S. Tanaka, On $\wedge$-Commutative Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 59-64.

[15] T. Traczyk, On the Variety of Bounded Commutative BCK-Algebras, *Math. Japonicae*, **24**, (1979), 283-292.

（今年度の研究集会は対面で 3 年ぶりに行われた．懐かしい顔に実際にお会いできたことが, 大変うれしかった．現在では, 一日のコロナ感染者数の発表もメディアではされなくなった. 今後はコロナが終息していくことを心より望んでいる．2023.4.27 ）