$\sqrt{m}$ の整数係数連分数展開表示とその Pell 方程式への応用について

慶應義塾大学大学院理工学研究科 [*]　金村　佳範 [†]
Yoshinori Kanamura
Graduate school of Science and Technology,
Keio University

1　整数係数連分数と主結果

非負整数 a_0 及び正整数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して, 正則連分数（以降, 単に連分数と呼ぶ）を

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} \tag{1}$$

で定める. 連分数 (1) が周期的であるとは, 整数 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 及び $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して, 任意の整数 $k \geq N$ に対して $a_k = a_{k+l}$ を満たすときにいう. 以降, 周期連分数を考える際には l を上記の周期性を満たす最小の整数を取ることにする. また, (N, l) 型周期連分数を

$$[a_0, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, \ldots, a_{N+l-1}}] := [a_0, a_1, \cdots a_{N-1}, a_N, \cdots, a_{N+l-1}, a_N, \cdots, a_{N+l-1}, \ldots]$$

と表す.

本報告集では, 整数係数連分数を考える. すなわち, (1) において, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ として正とは限らない整数列を考える. 整数係数連分数は整数論（e.g. [1, 12, 13, 16]）だけでなく, 幾何学（e.g. [2, 7, 10]）や力学系（e.g. [3, 4, 11, 15]）など幅広い文脈で登場しており, 興味深い研究対象である. よく知られているように, 2 次無理数は一意な周期連分数展開表示を持つ. 一方, 一般には 2 次無理数の整数係数周期連分数展開表示は一意とは限らない. 例えば, $\sqrt{2}$ の周期連分数展開表示は $[1, \overline{2}]$ で与えられるが, 整数係数周期連分数展開表示を考えると, この他に

$$[-1, \overline{1, -2, 1}], [1, \overline{3, -2, 3}]$$

[*] 〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1
[†] email: kana1118yoshi@keio.jp

などが存在する.

これより, 以下の問題が自然に考えられる.

問題 1.1. 0 以上の整数 N と正の整数 l を固定する. 各 2 次無理数に対して, (N, l) 型整数係数周期連分数展開表示を全て決定せよ.

今回, この問いに対する部分的な解答を与えたことを説明する. 本研究では, ペル方程式への応用も見据えて $N = 1$ とする. 我々は, $l \in \{1, 2, 3\}$ に対して, $\sqrt{m}$ が $(1, l)$ 型整数係数周期連分数展開表示を持つ必要十分条件を与えた.

定理 1.2. m を正の整数とする. また,

$$\begin{aligned} m_1(t) &:= t^2 + 1, \\ m_2(s, t) &:= s^2 t^2 + t, \\ m_2'(s, t) &:= s^2 t^2 + 2t, \\ m_3(s, t) &:= 16t^2 s^4 + 8ts^3 + (8t^2 + 1)s^2 + 6ts + t^2 + 1. \end{aligned}$$

と定める. $l \in \{1, 3\}$ のとき, $\sqrt{m}$ が $(1, l)$ 型整数係数周期連分数展開表示を持つ必要十分条件は, $m = m_l(s, t)$ を満たす整数 s, t が存在することである. また $\sqrt{m}$ が $(1, 2)$ 型整数係数周期連分数展開表示を持つ必要十分条件は, $m = m_2(s, t)$ もしくは $m = m_2'(s, t)$ を満たす整数 s, t が存在することである.

更に, $l \in \{1, 2, 3\}$ のとき, $\sqrt{m}$ の具体的な $(1, l)$ 型整数係数周期連分数展開表示まで得られた.

定理 1.3. $l \in \{1, 2, 3\}$ とする.

$m_l(s, t) > 0$ を満たす任意の 0 以外の整数 s, t に対して,

$$\mathrm{sgn}(t)\sqrt{m_1(t)} = [t, \overline{2t}], \tag{2}$$

$$\mathrm{sgn}(st)\sqrt{m_2(s, t)} = [st, \overline{2s, 2st}], \tag{3}$$

$$\mathrm{sgn}(st)\sqrt{m_2'(s, t)} = [st, \overline{s, 2st}], \tag{4}$$

$$\mathrm{sgn}(t)\sqrt{m_3(s, t)} = [s + (4s^2 + 1)t, \overline{2s, 2s, 2(s + (4s^2 + 1)t)}]. \tag{5}$$

が成り立つ. また, 任意の 0 以外の整数 t に対して,

$$\mathrm{sgn}(t)\sqrt{m_3(0, t)} = [-2 + t, \overline{1, -2, -1 + 2t}] = [-1 + t, \overline{2, -1, 1 + 2t}], \tag{6}$$

任意の整数 t に対して,

$$\mathrm{sgn}(t)\sqrt{m_3(\pm 1, t)} = [2 + 5t, \overline{-2, 3, 3 + 10t}] = [1 + 5t, \overline{3, -2, 3 + 10t}], \tag{7}$$

かつ $\sqrt{m_3(\pm 1, 0)} = \sqrt{2} = [2, \overline{-2, 3, 3}] = [1, \overline{3, -2, 3}]$ が成り立つ.

更に, $\sqrt{m}$ の $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ 型整数係数周期連分数展開表示は上記の形以外には存在しない.

(2), (3), (4), (5) は $\sqrt{m}$ の周期連分数展開表示と同じ形をしているが, s, t が負の数も取りうるので, 周期連分数展開表示以外も表している. また, (6) 及び (7) はこれまで得られてない $\sqrt{m}$ の整数係数周期連分数展開表示だと思われる.

2 定理 1.3 の証明の概略

ここでは, 定理 1.3 の証明の概略を説明する. 結論から述べると, PCF 多様体という, その上の整数点が $\sqrt{m}$ の整数係数周期連分数展開表示の候補となる代数多様体上の整数点を全決定することが定理 1.3 の証明の概略となる. 以降では PCF 多様体の定義を今回必要になる形に限定して紹介し, PCF 多様体上の整数点を全決定したことを正確に述べる. 詳細は [1,8] を参照して頂きたい.

初めに記号の設定を行う. $a \in \mathbb{C}$ に対して,

$$D(a) := \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と定め, 有限連分数 $[c_1, \ldots, c_n]$ に対して,

$$M([c_1, \ldots, c_n]) = \begin{bmatrix} M([c_1, \ldots, c_n])_{11} & M([c_1, \ldots, c_n])_{12} \\ M([c_1, \ldots, c_n])_{12} & M([c_1, \ldots, c_n])_{22} \end{bmatrix} := D(c_1)D(c_2)\cdots D(c_n).$$

と定める. 各 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して,

$$\begin{aligned} &E((y_1, x_1, \ldots, x_l)) \\ &= \begin{bmatrix} E((y_1, x_1, \ldots, x_l))_{11} & E((y_1, x_1, \ldots, x_l))_{12} \\ E((y_1, x_1, \ldots, x_l))_{21} & E((y_1, x_1, \ldots, x_l))_{22} \end{bmatrix} \\ &:= M([y_1, x_1, \ldots, x_l, 0, -y_1, 0]) \end{aligned}$$

と定める.

PCF 多様体の定義は以下の通りである.

定義 2.1. 各 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $(1, l)$ 型 PCF 多様体を

$$\begin{cases} E((y_1, x_1, \ldots, x_l))_{22} - E((y_1, x_1, \ldots, x_l))_{11} = 0, \\ E((y_1, x_1, \ldots, x_l))_{12} = -mE((y_1, x_1, \ldots, x_l))_{21}, \end{cases}$$

で定まるものとし, $V(\sqrt{m})_{1,l}$ で表す. ここで, $y_1, x_1, \ldots, x_l$ は変数である.

$\sqrt{m}$ の $(1, l)$ 型整数係数周期連分数展開と $(1, l)$ 型 PCF 多様体上の整数点の間には以下の関係がある.

命題 2.2. ([1, (a) in Section 3.1]) $[b_1, \overline{a_1, \ldots, a_l}]$ を $\sqrt{m}$ の $(1, l)$ 型整数係数周期連分数展開表示とする. このとき, $(b_1, a_1, \ldots, a_l) \in V(\sqrt{m})_{1,l}(\mathbb{Z})$ である.

今回利用したいのはこの命題の逆である. 一般に逆は成り立たないが, 整数点に対応する整数係数周期連分数が収束するなら逆は成り立つ.

命題 2.3. $(b_1, a_1, \ldots, a_l) \in V(\sqrt{m})_{1,l}(\mathbb{Z})$ とする. $[b_1, \overline{a_1, \ldots, a_l}]$ が収束するとき, 符号の違いを除いて $\sqrt{m}$ の $(1, l)$ 型整数係数周期連分数展開表示になる.

これより, 定理 1.3 を示すためにまずは $(1,l)$ 型 PCF 多様体上の整数点を決定する．$a_1 \dots a_l = 0$ のとき, 連分数展開 $[b_1, \overline{a_1, \dots, a_l}]$ の周期は l より真に小さくなるため, 整数点の中でも以下の非退化なものに限定して全決定を行う.

定義 2.4. $V(\sqrt{m})_{1,l}$ を $(1,l)$ 型 PCF 多様体とする．$(b_1, a_1, \dots, a_l) \in V(\sqrt{m})_{1,l}(\mathbb{Z})$ が非退化であるとは, 任意の $1 \le i \le l$ に対して $a_i \neq 0$ を満たすときにいう．$(1,l)$ 型 PCF 多様体上の非退化な整数点全体の集合を $V(\sqrt{m})_{1,l}(\mathbb{Z})_{\mathrm{nd}}$ と表す.

注意 2.5. 今回言及しなかったが, PCF 多様体の幾何的な性質は [5,6] などで調べられている．特に, $l \le 3$ のとき, $V(\sqrt{m})_{1,l}(\mathbb{Z})_{\mathrm{nd}}$ が有限である事は既に知られていた（cf. [6, Theorem 2.5]）.

我々は $l \le 3$ のときに $(1,l)$ 型 PCF 多様体上の整数点を決定した.

定理 2.6. 以下が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&V(\sqrt{m})_{1,1}(\mathbb{Z})_{\mathrm{nd}} = \{\pm(t, 2t) \mid m = m_1(t), t \neq 0\},\\
&V(\sqrt{m})_{1,2}(\mathbb{Z})_{\mathrm{nd}}\\
&= \{\pm(st, 2s, 2st) \mid m = m_2(s,t),\ s,t \neq 0\} \cup \{\pm(st, s, 2st) \mid m = m_2'(s,t),\ s,t \neq 0\},\\
&V(\sqrt{m})_{1,3}(\mathbb{Z})_{\mathrm{nd}}\\
&= \{\pm(s + (4s^2+1)t, 2s, 2s, 2(s + (4s^2+1)t)) \mid m = m_3(s,t), s,t \neq 0\}\\
&\cup \{\pm(-2+t, 1, -2, -1+2t), \pm(-1+t, 2, -1, 1+2t) \mid m = m_3(0,t), t \neq 0\}\\
&\cup \{\pm(2+5t, -2, 3, 3+10t), \pm(1+5t, 3, -2, 3+10t) \mid m = m_3(\pm 1, t)\}.
\end{aligned}
$$

これと命題 2.3 より, 求めた整数点に対応する各整数係数周期連分数の収束性と収束先を確認することで定理 1.3 が得られる．収束性と収束先の確認は [1, Theorem 4.3] を用いることで出来る (cf. [8, Section 4]).

3　ペル方程式の最小解への応用

ここでは, 今回得られた $\sqrt{m}$ の整数係数周期連分数展開表示とペル方程式の基本解の関係性を考察する．最初に, ペル方程式の基本解について復習する.

m を平方数ではない正の整数とする．ペル方程式とは, $x^2 - my^2 = \pm 1$ で定まる方程式の事を指す．W をペル方程式の整数解全体の集合, すなわち,

$$W = \{(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \mid u^2 - mv^2 = 1 \text{ or } u^2 - mv^2 = -1\}$$

と定める．また, $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ の単数群を $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]^\times$ と表す．Dirichlet の単数定理より,

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}]^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

が成り立つ．更に, 全単射

$$W \cong \mathbb{Z}[\sqrt{m}]^\times \tag{8}$$

が存在する．このとき, ペル方程式の基本解を以下のように定義する.

定義 3.1. $(u,v) \in W$ が基本解であるとは, (u,v) が $(1,\pm 1),(0,\pm 1) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ のいずれかと一致するときにいう.

$\mathbb{Z}[\sqrt{m}]^\times$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の間の全単射は canonical ではない. しかし, どの全単射をとっても, $(1,\pm 1),(0,\pm 1) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ それぞれの元に対応する $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]^\times$ の元は一致するため, 基本解の定義は well-defined であることに注意する. また, (8) より W には群構造が誘導される. よって, ペル方程式の基本解は群 W の生成元とみなせる.[a] これより, ペル方程式の整数解を知りたいとき, 基本解を決定すればよい.

基本解は $\sqrt{m}$ の周期連分数展開表示から得られる. この事を説明するために, 連分数展開の convergent の定義を復習する.

定義 3.2. n を 1 以上の整数とする. 連分数 $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ に対して, その nth convergent p_n/q_n を

$$(p_n, q_n) = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}, a_n q_{n-1} + q_{n-2})$$

を満たすものとして定める. ただし, $(p_{-1}, q_{-1}) = (1, 0), (p_0, q_0) = (a_0, 1)$ とする.

nth convergent は, 連分数展開を n 番目までで区切ったときに出てくる分数を表す. すなわち,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \ldots, a_n]$$

である（例えば [9, Theorem 7.4] を参照）.

convergent を用いることで, ペル方程式の基本解を表せる.

命題 3.3. $\sqrt{m}$ の周期連分数展開表示を, $a_0, a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を用いて

$$\sqrt{m} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_l}]$$

と表す（ただし, l は周期）. このとき, ペル方程式 $x^2 - my^2 = \pm 1$ の基本解は

$$(x, y) = (p_{l-1}, q_{l-1})$$

で与えられる.

以上は古典的な結果であったが, この結果が $\sqrt{m}$ の整数係数周期連分数展開表示でも同様に成り立つかどうかは非自明である. より正確に, 以下の問いを考える.

問題 3.4. l を 1 以上の整数とする. $\sqrt{m}$ の $(1,l)$ 型整数係数周期連分数展開表示が与えられた時, その $(l-1)$th convergent はペル方程式 $x^2 - my^2 = \pm 1$ の基本解を与えるか.

この問いについて, $l = 1$ の場合は直ちに正しいことがわかる. 今回, $\sqrt{m}$ の $(1,2),(1,3)$ 型整数係数周期連分数展開表示を全て与えたことから, $l = 2, 3$ の場合にも上記の問いに解答を与えた.

[a] 正確には, 符号の違いを無視しているので, ペル方程式の基本解は W の指数 2 の部分群の生成元になる.

以下, $s,t\in\mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned}(x_2(s,t),y_2(s,t)) &= (2s^2t+1,2s),\\ (x_3(s,t),y_3(s,t)) &= (16ts^4+4s^3+8ts^2+3s+t,4s^2+1),\\ (x_2'(s,t),y_2'(s,t)) &= (s^2t+1,s)\end{aligned}$$

と定める. $(x_l(s,t),y_l(s,t))$ は $\sqrt{m_l(s,t)}$ の $(1,l)$ 型整数係数周期連分数展開表示の $(l-1)$th convergent, $(x_2'(s,t),y_2'(s,t))$ は $\sqrt{m_2'(s,t)}$ の $(1,2)$ 型整数係数周期連分数展開表示の 1st convergent であることに注意する.

定理 3.5. $l\in\{2,3\}$ とし, $s,t\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ は $m_l(s,t)>0$ を満たすとする.

1. $(x_2(s,t),y_2(s,t))$ がペル方程式 $x^2-m_2(s,t)y^2=(-1)^2$ の**基本解を与えない**必要十分条件は $|s|\geq 2$ かつ $t=-1$ である.
2. $(x_3(s,t),y_3(s,t))$ (resp. $(x_2'(s,t),y_2'(s,t))$) はペル方程式 $x^2-m_3(s,t)y^2=(-1)^3$ (resp. $x^2-m_2'(s,t)y^2=(-1)^2$) の基本解を与える.

4 $\mathbb{Z}[X_n]$ 係数周期連分数展開

Block-Elkies-Jordan [1] では, $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}_2$ 拡大体上の整数環係数周期連分数展開を考察していた. この節では, Block-Elkies-Jordan の結果に関連して, 代数体の整数環係数周期連分数展開について得られた結果を紹介する. 以降, 環 R 及び数列 $\{a_n\}$ $(a_n\in R\setminus\{0\})$ に対して, R 係数連分数展開を $[a_0,a_1,\ldots]$ なる形をしたものと定める.

n を 0 以上の整数とし, $X_n=2\cos(\pi/2^{n+1})$ とする. すなわち,

$$X_0=0, X_1=\sqrt{2}, X_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ldots$$

である. このとき, $\mathbb{B}_n=\mathbb{Q}(X_n)$ は $\mathbb{Q}$ 上の 2^n 次ガロア拡大であり, $\mathbb{B}=\cup_{n\geq 1}\mathbb{B}_n$ は $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_2$ 拡大である. また, $\mathbb{B}_n$ の整数環は $\mathbb{Z}[X_n]$ であることが知られている. Block-Elkies-Jordan [1] では, $n=1,2$ のときに X_n の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 係数周期連分数展開表示を複数の型で全決定した ([1, cf. Table 1 in p381]). すると, 自然な興味として [1] で扱われているもの以外の X_n の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 係数周期連分数展開表示を探すことが考えられるが, 吉崎 [17] は以下の結果を得ている.

定理 4.1. [17, Theorem 3.4] 任意の $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して,

$$X_n=\left[1,\overline{\frac{2}{1+X_n},2}\right]$$

が成り立つ.

こうした一連の研究を背景に, 我々は任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して X_n（及びそのガロア共役）の $(1,3)$ 型 $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 係数周期連分数展開を具体的に構成した. 以下,

$$\eta_n = 1 + \sum_{k=1}^{2^n-1} 2\cos\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$$

とする. これは, 堀江の単数（あるいは Weber's normal unit）と呼ばれている.

定理 4.2. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 及び $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{B}_n/\mathbb{Q})$ に対して, 符号の違いを除いて

$$\sigma(X_n) =$$

$$\left[\sigma\left(\frac{(\eta_n - \eta_{n-1})X_n - 1}{\eta_{n-1}}\right), \overline{\sigma(\eta_{n-1}), \sigma\left(\frac{(\eta_n - \eta_{n-1})/X_n - 1}{\eta_{n-1}}\right), \sigma\left(\frac{(\eta_n - \eta_{n-1})X_n - 1}{\eta_{n-1}}\right)}\right]$$

が成り立つ.

定理に関して, いくつか補足しておく. まず, 連分数展開表示の各項に登場する元は全て $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ の元になっている. これは η_n, X_n の定義やそれらの間の関係式から確認できる. また, 今回は以降の拡張ペル方程式への応用を見据えて $(1,3)$ 型 $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 係数周期連分数展開表示として紹介したが, 定理の証明では $(0,3)$ 型 $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 係数周期連分数展開表示とみなして示す. この辺りの詳細は [8, Theorem 5.3] の証明を参照していただきたい.

次に, 今回得られた X_n の $(1,3)$ 型 $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 係数周期連分数展開表示と拡張ペル方程式の基本解の関係について述べる. 拡張ペル方程式とは

$$x^2 - X_n^2 y^2 = \pm 1$$

のことである. 以降ではこの方程式の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 解を考える. $n = 1$ のとき, この問題はペル方程式 $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ の整数解を考えることに相当する.

相対 2 次拡大 $\mathbb{B}_n/\mathbb{B}_{n-1}$ に対して, 相対ノルムを $N_{n/n-1}\colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_{n-1}; x \mapsto x\tau_n(x)$ と定める. ただし, τ_n は $\mathrm{Gal}(\mathbb{B}_n/\mathbb{B}_{n-1}) (\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の生成元とする. 拡張ペル方程式の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 解全体の集合を W_n とし, $\mathbb{B}_n/\mathbb{B}_{n-1}$ の相対単数群を

$$RE_n := \left\{\epsilon \in \mathbb{Z}[X_n] \mid N_{n/n-1}(\epsilon) \in \{\pm 1\}\right\}$$

と定める. Dirichlet の単数定理より

$$RE_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{2^{n-1}}$$

が成り立つ. また, 古典的な場合と同様に, $n \geq 1$ に対して全単射

$$W_n \cong RE_n$$

が存在する. このとき, RE_n の生成元に対応する W_n の元たちを拡張ペル方程式の基本解と呼ぶことにする.

拡張ペル方程式の基本解に関しては, 次の Weber の予想と深く関わりがある.

予想 4.3. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $\mathbb{B}_n$ の類数は 1 である.

この予想は, Weber [14] の研究を発端に, 多くの先行研究から肯定的であると信じられている. この辺りの詳細については [18, 第 14 章] を参照して頂きたい.

もしこの予想が正しければ, 拡張ペル方程式の基本解として η_n（及びそのガロア共役）が取れる. 実際, $A_n = \langle -1, \sigma(\eta_n) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{B}_n/\mathbb{Q}) \rangle_{\mathbb{Z}}$ とすると, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $(RE_n : A_n) = h_n/h_{n-1}$ が成り立つ. 特に予想 4.3 を認めると, この右辺が 1 となり $RE_n = A_n$ が成り立つ. また, 定理 4.2 で与えた X_n の $(1,3)$ 型 $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 係数周期連分数展開表示の 2nd convergent を (p_2, q_2) とすると, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $\eta_n = p_2 + X_{n-1}q_2$ が成り立つ. 以上より, 次の定理が得られる.

定理 4.4. 予想 4.3 を仮定する. このとき, 任意の正整数 n に対して, 定理 4.2 で与えた X_n の $(1,3)$ 型 $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 係数周期連分数展開表示の 2nd convergent は拡張ペル方程式の基本解を与える.

この定理は, 今回我々が与えた X_n の $(1,3)$ 型 $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 係数周期連分数展開表示から拡張ペル方程式の基本解を得る際, 命題 3.3 と同様のことが成り立つことを主張している.

謝辞

本稿は 2022 年度 RIMS 共同研究（公開型）「代数的整数論とその周辺」での筆者の講演を元に作成されたものです. 講演及び本稿執筆の機会を与えていただいた加塩朋和先生, 千田雅隆先生及び内田幸寛先生に感謝申し上げます. また, 講演準備や本稿執筆の際, 吉崎彪雅氏に多くのコメントを頂きました. この場をお借りして感謝申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 JP22J13607, JP22J10004 及び JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP1037 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] Bradley W. Brock, Noam D. Elkies, and Bruce W. Jordan, *Periodic continued fractions over S-integers in number fields and Skolem's p-adic method*, Acta Arith. **197** (2021), no. 4, 379–420, DOI 10.4064/aa191001-7-8. MR4201432

[2] A. F. Beardon, M. Hockman, and I. Short, *Geodesic continued fractions*, Michigan Math. J. **61** (2012), no. 1, 133–150, DOI 10.1307/mmj/1331222851. MR2904005

[3] A. Ghenciu, S. Munday, and M. Roy, *The Hausdorff dimension spectrum of conformal graph directed Markov systems and applications to nearest integer continued fractions*, J. Number Theory **175** (2017), 223–249, DOI 10.1016/j.jnt.2016.09.002. MR3608189

[4] H. Jager, *On the speed of convergence of the nearest integer continued fraction*, Math. Comp. **39** (1982), no. 160, 555–558, DOI 10.2307/2007332. MR669647

[5] Bruce W. Jordan and Yevgeny Zaytman, *Integral points on varieties defined by matrix factorization into elementary matrices*, J. Number Theory **217** (2020), 340–352, DOI 10.1016/j.jnt.2020.05.016. MR4140633

[6] Bruce W. Jordan, Adam Logan, and Yevgeny Zaytman, *The Zariski closure of integral points on varieties parametrizing periodic continued fractions* (2021), available at `arXiv:1910.12788v2`.

[7] Louis H. Kauffman and Sofia Lambropoulou, *On the classification of rational tangles*, Adv. in Appl. Math. **33** (2004), no. 2, 199–237, DOI 10.1016/j.aam.2003.06.002. MR2074397

[8] Yoshinori Kanamura and Hyuga Yoshizaki, *Some periodic integer continued fraction expansions of $\sqrt{m}$ and application to the Pell equations* (2023), available at `arXiv:2208.08347`.

[9] Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, and Hugh L. Montgomery, *An introduction to the theory of numbers*, 5th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991. MR1083765

[10] Ian Short and Margaret Stanier, *Necessary and sufficient conditions for convergence of integer continued fractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2022), no. 2, 617–631, DOI 10.1090/proc/15574. MR4356172

[11] Shigeru Tanaka and Shunji Ito, *On a family of continued-fraction transformations and their ergodic properties*, Tokyo J. Math. **4** (1981), no. 1, 153–175, DOI 10.3836/tjm/1270215745. MR625125

[12] Jing Cheng Tong, *Approximation by nearest integer continued fractions*, Math. Scand. **71** (1992), no. 2, 161–166, DOI 10.7146/math.scand.a-12418. MR1212700

[13] ______, *Approximation by nearest integer continued fractions. II*, Math. Scand. **74** (1994), no. 1, 17–18, DOI 10.7146/math.scand.a-12476. MR1277785

[14] H. Weber, *Theorie der Abel'schen Zahlkörper*, Acta Math. **8** (1886), no. 1, 193–263, DOI 10.1007/BF02417089 (German). MR1554698

[15] William W. Adams, *On a relationship between the convergents of the nearest integer and regular continued fractions*, Math. Comp. **33** (1979), no. 148, 1321–1331, DOI 10.2307/2006468. MR537978

[16] H. C. Williams and P. A. Buhr, *Calculation of the regulator of $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ by use of the nearest integer continued fraction algorithm*, Math. Comp. **33** (1979), no. 145, 369–381, DOI 10.2307/2006050. MR514833

[17] Hyuga Yoshizaki, *Generalized Pell's equations and Weber's class number problem* (2022), available at `arXiv:2010.06399v3`.

[18] 福田 隆, 重点解説 岩澤理論, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ, 145, サイエンス社, 2019.