INTEGRALITY OF HECKE EIGENVALUES OF MODULAR FORMS (モジュラー形式のヘッケ固有値の代数的整数性)

杉山真吾 (日本大学　理工学部数学科)

SHINGO SUGIYAMA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
COLLEGE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
NIHON UNIVERSITY

Abstract. 本記事は 2022 年 12 月 15 日に筆者が講演した内容をもとに執筆したものである. 本記事では一般の重さ, レベル, 指標を持つヒルベルトモジュラー形式とジーゲルモジュラー形式のヘッケ固有値が代数的整数であることを証明する. 応用として, GL_{2d}(ただし d は素数) と Sp_{2n} のカスピダル保型表現のヘッケ体の拡大次数の増大度の評価を与える. この研究は佐久川憲児 (信州大学) との共同研究である.

1. Introduction

この記事では, $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{C}$ への埋め込みを固定し, $\overline{\mathbb{Z}} \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ とみなす. また, 1 以上の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書き, $\mathbb{N}$ の元を自然数と呼ぶ流儀を採用する. 集合 X 上の複素数値関数 f, g に対して, $f(x) \ll_{a,b,c,\ldots} g(x), x \in X$ と書いたら「$a, b, c, \ldots$ に依存するある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対して $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$」を意味する. $\gg_{a,b,c,\ldots}$ も同様に定義する. この不等号は Vinogradov の記号と呼ばれる.

主定理を rough に述べると以下のとおりである. M を重さ ρ, レベル N, 指標 χ のモジュラー形式の空間とする. $T \in \mathrm{End}(M)$ を"Hecke 作用素" とする. M は Hilbert モジュラー形式の空間または Siegel モジュラー形式の空間を考えることにする. このとき, 以下の代数的整数性が成り立つ (佐久川憲児 (信州大学) との共同研究).

Theorem 1.1 (Rough version of Theorems 2.5 and 3.4 (Sakugawa, S.))**.** $\lambda \in \mathbb{C}$ を T の任意の固有値とする. このとき, $\lambda \in \overline{\mathbb{Z}}$ である.

あるアデール群 (GL_n や Sp_{2n} のアデール化など) のカスピダル保型表現 π に対し, $\mathbb{Q}(\pi)$ を π の Hecke 体とする (the field of rationality のこと). 代数的整数性の応用として GL_{2d} や Sp_{2n} の場合に Hecke 体の次数増大度の評価を与えることができる (佐久川憲児 (信州大学) との共同研究).

Corollary 1.2 (Rough version of Corollaries 5.12 and 5.14 (Sakugawa, S.))**.**

(1) d を素数とする.

$$\max_{\substack{\pi\,:\,\text{conductor } N \\ L(1/2,\pi)\neq 0}} [\mathbb{Q}(\pi):\mathbb{Q}] \gg \sqrt{\log\log N}.$$

ここで, π は $\mathrm{GL}_{2d}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約コホモロジカルカスピダル保型表現であって, 無限素点の成分 π_∞ が固定された $\mathrm{GL}_{2d}(\mathbb{R})$ のある表現であり, コンダクターが N, スタンダード L 関数の中心値 $L(1/2,\pi)$ が非消滅であるもの全体を動く.　無視している定数は π と N には依らない.

(2) 同様の結果は $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の場合にも成立する.　ただし中心 L 値の非消滅性の条件 "$L(1/2,\pi) \neq 0$" は課さない.

日本大学理工学部数学科 sugiyama.shingo@nihon-u.ac.jp.

Thoerem 1.1 は楕円モジュラー形式の場合の結果の一般化である．後に正確に述べる main results の理解のため，まずは楕円モジュラー形式の場合の結果を復習しておく．$\mathbb{H} := \{z = x+\sqrt{-1}y \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ を Poincaré 上半平面とする．$\Gamma_0(N) := \{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \in N\mathbb{Z}\}$ は一次分数変換で $\mathbb{H}$ に作用する．$k \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, N を法とする Dirichlet 指標 χ に対し，$M_k(N, \chi)$ を重さ k, レベル N, 指標 χ の楕円モジュラー形式のなす空間とする．この空間は以下の条件を満たす正則関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ から成る:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi(a)(cz+d)^k f(z), \qquad \forall\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma_0(N), \quad \forall z \in \mathbb{H}$$

という変換則を満たし，$\Gamma_0(N)$ の任意のカスプで正則である．(変換則の右辺に $\chi(a)$ が現れているが，$\chi(a)$ の代わりに $\chi(d)$ を用いている文献もあり.)

Definition 1.3 (Hecke 作用素)**.** $m \in \mathbb{N}$ を $\gcd(m, N) = 1$ を満たすものとするとき，

$$T(m)f(z) := m^{k-1} \sum_{\substack{a,d\in\mathbb{N} \\ ad=m}} \sum_{b=0}^{d-1} \frac{\chi(a)^{-1}}{d^k} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

とおく．$T(m) \in \mathrm{End}(M_k(\Gamma_0(N), \chi))$ となり，$T(m)$ は Hecke 作用素と呼ばれる．

Hecke 作用素の固有値を Hecke 固有値と呼ぶ．このとき，Hecke 固有値は代数的整数になることが知られている．

Theorem 1.4. $T(m)$ の任意の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\lambda \in \overline{\mathbb{Z}}$ である．

Hecke 作用素は摩訶不思議な和で定義されているが，群論的解釈を使うとスッキリとした形で記述することができる．まず，

$$S(N) := \{g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \mid \gcd(a, N) = 1, N|c\}$$

とおく．ここで $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の元で行列式が正になるもの全体の成す群である．集合 $S(N)$ を代表系とする両側剰余類 $\Gamma_0(N)g\Gamma_0(N)$ で生成される $\mathbb{Z}$ 加群を $\mathbb{L}$ とする．

$$\mathbb{L} := \langle \Gamma_0(N)g\Gamma_0(N) \mid g \in S(N) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

この集合には適切に積を入れることができて環になる．この環を抽象的 Hecke 環 (abstract Hecke algebra) と呼ぶ．次に $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ (記号 $+$ は行列式が正という意味) に対して，楕円モジュラー形式の空間 $M_k(N, \chi)$ 上のスラッシュ作用素 $|_k\gamma$ を以下で定義する: $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ に対して

$$f|_k\gamma(z) := (ad-bc)^{k/2}(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right).$$

Definition 1.5. $\mathbb{C}$ 代数の準同型 $t_{k,N,\chi} : \mathbb{L} \to \mathrm{End}(M_k(N, \chi))$ を以下で定義する:

$$t_{k,N,\chi}(\Gamma_0(N)g\Gamma_0(N))f(z) := \sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(N)g\Gamma_0(N)} \chi(\gamma)^{-1} f|_k\gamma(z).$$

Proposition 1.6. Hecke 作用素は両側剰余類の作用を用いて以下のように記述できる:

$$T(m)f(z) = m^{k/2-1} \sum_{\substack{g\in\Gamma_0(N)\backslash S(N)/\Gamma_0(N) \\ \det(g)=m}} t_{k,N,\chi}(\Gamma_0(N)g\Gamma_0(N))f(z).$$

いよいよ main results である Hilbert モジュラー形式や Siegel モジュラー形式の場合に入っていこう．これらのモジュラー形式の設定だと，どうしても記号がたくさん必要になってしまい煩雑になってしまう．しかしながら楕円モジュラー形式の場合の上記の事項を知っていれば，Hilbert モジュラー形式や Siegel モジュラー形式の場合の Hecke 作用素の理解の助けになるはずである．特に Hilbert モジュラー形式の場合は，基礎体の狭義類数が 1 とは限らない場合をカバーするため記号が多くなってしまうがご容赦いただきたい．Siegel モジュラー形式の場合は基礎体が $\mathbb{Q}$ である一方で行列のサイズが 2×2 から $2n \times 2n$ になるという事情により，また

別の複雑さが生じる．しかしながらこれも楕円モジュラー形式の場合に立ち戻って考えれば理解しやすくなるであろう．楕円モジュラー形式を扱うことを $3\times 3\times 3$ のルービックキューブ 1 個を扱うことに例えるなら, $3\times 3\times 3$ のルービックキューブを同時に複数個扱うのが Hilbert モジュラー形式で, $4\times 4\times 4$ や $5\times 5\times 5$ などのサイズの大きなルービックキューブ 1 個を扱うのが Siegel モジュラー形式だ, といえよう．

2. Hilbert modular forms

まずは Hilbert モジュラー形式の場合の主定理を述べる．そのために Hilbert モジュラー形式の導入から始める．F を総実代数体とし, $d_F := [F:\mathbb{Q}] < \infty$ とする．$\mathbb{A}_F$ と $\mathbb{A}_{F,\mathrm{fin}}$ をそれぞれ F のアデール環, 有限アデール環 (有限アデールのなす環, つまり制限直積 $\otimes'_{\mathfrak{p}} F_{\mathfrak{p}}$ のこと) とする．Σ_∞ を F の無限素点全体の集合とする．$\mathfrak{o}_F$ を F の整数環とし, $\mathfrak{o}_F$ の非ゼロイデアルの絶対ノルムを $\mathrm{N}(\mathfrak{a})$ と書く．$\mathcal{D}_F$ を $F/\mathbb{Q}$ の共役差積とする．$\mathfrak{o}_F$ の非ゼロ素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $\mathfrak{p}$ による F の完備化を $F_{\mathfrak{p}}$ と書き, $F_{\mathfrak{p}}$ の付値環を $\mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}}$ とする．$\mathfrak{p}$ の下にある素数を p と書くとき, $F_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p$ の共役差積を $\mathcal{D}_{F_{\mathfrak{p}}}$ とする．

$\mathbb{H}^{\Sigma_\infty}$ は $\mathbb{H}^{d_F}$ と同型な複素多様体である．$\mathbf{k} = (k_v)_{v\in\Sigma_\infty} \in \mathbb{N}^{\Sigma_\infty}$ とし, $0 \neq \mathfrak{n} \subset \mathfrak{o}_F$ をイデアルとする．$\chi : (\mathfrak{o}_F/\mathfrak{n})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を mod $\mathfrak{n}$ の Hecke 指標とする．

重さ $\mathbf{k}$, レベル $\mathfrak{n}$, 指標 χ の Hilbert モジュラー形式とは, 楕円モジュラー形式と同様の変換則を満たす多変数正則関数 $f : \mathbb{H}^{\Sigma_\infty} \to \mathbb{C}^{h_F^+}$ のことである．h_F^+ は F の狭義類数である．以下, 志村 (1978) の [19] に沿って Hilbert モジュラー形式および Hecke 作用素を導入する．

$\mathbb{A}_F$ を F のアデール環とするとき, $\mathbb{H}^{\Sigma_\infty}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ と密接に関係していることが知られているので, この群のチカラを借りてヒルベルトモジュラー形式とヘッケ作用素を導入することにする．

$\mathbb{A}_{F,\mathrm{fin}}$ を F の有限アデール環とし, Cl_F^+ を F の狭義イデアル類群とする．有限イデール $t_1,\dots,t_{h_F^+} \in \mathbb{A}_{F,\mathrm{fin}}^\times$ を $\mathrm{Cl}_F^+ = \{[t_1\mathfrak{o}_F],\dots,[t_{h_F^+}\mathfrak{o}_F]\}$ となるように取っておく．カッコはイデアル類を表す．各有限イデールに対応するイデアルたちが Cl_F^+ の完全代表系になっている．$x_j := \left[\begin{smallmatrix}1 & \\ & t_j\end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F,\mathrm{fin}})$ とおく．SL_2 に対する強近似定理により, 以下の分解が成り立つ．

Proposition 2.1. 以下の等式が成り立つ:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) = \coprod_{j=1}^{h_F^+} \mathrm{GL}_2(F)x_j\Gamma_0(\mathfrak{n}).$$

ここで,

$$\Gamma_0(\mathfrak{n}) := \mathrm{GL}_2(F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^+ \times \prod_{\mathfrak{p}} \Gamma_0(\mathfrak{n})_{\mathfrak{p}},$$

$$S(\mathfrak{n})_{\mathfrak{p}} := \{g = \left[\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}}) \mid a\mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}} + \mathfrak{n}\mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}},\ b \in \mathcal{D}_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1}, c \in \mathfrak{n}\mathcal{D}_{F_{\mathfrak{p}}},\ d \in \mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}}\},$$

$$\Gamma_0(\mathfrak{n})_{\mathfrak{p}} := \{g \in S(\mathfrak{n})_{\mathfrak{p}} \mid \det(g) \in \mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}}^\times\},$$

$$S(\mathfrak{n}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \cap \{\mathrm{GL}_2(F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^+ \times \prod_{\mathfrak{p}} S(\mathfrak{n})_{\mathfrak{p}}\}.$$

また, $\mathrm{GL}_2(F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^+$ は行列式が総正であるような $\mathrm{GL}_2(F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ の元全体の成す群である．

$\Gamma_0(\mathfrak{n})$ は楕円モジュラー形式における $\Gamma_0(N)$ の類似物であり, $S(\mathfrak{n})$ は楕円モジュラー形式における $S(N)$ の類似物である．記号は筆者が ad hoc に設定したので [19] の記号とは異なる．

Definition 2.2 (合同部分群)**.** $1 \leqslant j \leqslant h_F^+$ なる任意の j に対して

$$\Gamma_j := \{\left[\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(F)^+ \mid b \in t_j^{-1}\mathcal{D}_F^{-1},\ c \in \mathfrak{n}t_j\mathcal{D}_F, a, d \in \mathfrak{o}_F, ad-bc \in \mathfrak{o}_F^\times\}.$$

このとき, $\Gamma_j = x_j\Gamma_0(\mathfrak{n})x_j^{-1} \cap \mathrm{GL}_2(F)$ である．

さて, $\chi : (\mathfrak{o}_F/\mathfrak{n})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を Hecke 指標とする．このとき, モノイドの準同型 $\tilde{\chi} : S(\mathfrak{n}) \to \mathbb{C}^\times$, $\tilde{\chi}(\left[\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right]) = \chi((a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}})$ が well-defined であり, $\Gamma_0(\mathfrak{n})$ に制限すれば指標になる．Hilbert モジュラー形式の定義は以下の通りである．

Definition 2.3 (Hilbert モジュラー形式)**.** $f=(f_j)_{j=1,\dots,h_F^+}:\mathbb{H}^{\Sigma_\infty}\to\mathbb{C}^{h_F^+}$ が重さ $\mathbf{k}$, レベル $\mathfrak{n}$, 指標 χ の Hilbert モジュラー形式であるとは,

$$f_j\left(\left(\frac{a_vz_v+b_v}{c_vz_v+d_v}\right)_{v\in\Sigma_\infty}\right)=\tilde{\chi}(x_j^{-1}[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}]x_j)\{\prod_{v\in\Sigma_\infty}(c_vz_v+d_v)^{k_v}\}f_j(z)$$

が任意の $z=(z_v)_{v\in\Sigma_\infty}\in\mathbb{H}^{\Sigma_\infty}$, $[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}]\in\Gamma_j$ で成立し, 任意のカスプでの正則性を満たすときにいう.

次に Hecke 作用素を導入しよう.

$$S(\mathfrak{n}):=\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\cap\{\mathrm{GL}_2(F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^+\times\prod_{\mathfrak{p}}S(\mathfrak{n})_{\mathfrak{p}}\},$$

$$S(\mathfrak{n})_{\mathfrak{p}}=\{g\in\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})\mid a\mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}}+\mathfrak{n}\mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}}=\mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}},\ b\in\mathcal{D}_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1},c\in\mathfrak{n}\mathcal{D}_{F_{\mathfrak{p}}},\ d\in\mathfrak{o}_{F_{\mathfrak{p}}}\}$$

を思い出しておく. $\gamma=[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}]\in\mathrm{GL}_2(F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^+$ に対するスラッシュ作用素 $|_{\mathbf{k}}\gamma$ を以下のように定める:

$$f_j|_{\mathbf{k}}\gamma(z):=\{\prod_{v\in\Sigma_\infty}(a_vd_v-b_vc_v)^{k_v/2}(c_vz_v+d_v)^{-k_v}\}f_j\left(\left(\frac{a_vz_v+b_v}{c_vz_v+d_v}\right)_{v\in\Sigma_\infty}\right).$$

すると, 両側剰余類の作用は以下のように定義される. $\alpha\in x_jS(\mathfrak{n})x_{j'}^{-1}\cap\mathrm{GL}_2(F)$ と Hilbert モジュラー形式 $f=(f_1,\dots,f_{h_F^+})$ に対して,

$$t(\Gamma_j\alpha\Gamma_{j'})f_j:=\sum_{\gamma\in\Gamma_j\backslash\Gamma_j\alpha\Gamma_{j'}}\tilde{\chi}(x_j^{-1}\gamma x_{j'})^{-1}f_j|_{\mathbf{k}}\gamma(z)$$

とする. Hecke 作用素を導入する上で, $g\in S(\mathfrak{n})$, $1\leqslant j\leqslant h_F^+$ に対して, j' と $\exists\alpha_j\in x_jS(\mathfrak{n})x_{j'}^{-1}\cap\mathrm{GL}_2(F)$ が存在して

$$\Gamma_0(\mathfrak{n})g\Gamma_0(\mathfrak{n})=\Gamma_0(\mathfrak{n})x_j^{-1}\alpha_jx_{j'}\Gamma_0(\mathfrak{n})$$

が成り立つことに注意しよう. ここで j' は次の関係式により一意的に定まる:

$$[\det(g)t_j\mathfrak{o}_F]=[t_{j'}\mathfrak{o}_F]\quad\text{in}\quad\mathrm{Cl}_F^+.$$

かなり紙面を割いたが, 以上の準備の下で Hilbert モジュラー形式の空間上の Hecke 作用素 $T'(\mathfrak{m})$ が次のように定義される. 以下は志村 (1978) の [19] による Hecke 作用素の定義である.

Definition 2.4 (Hilbert モジュラー形式の場合の Hecke 作用素)**.** $0\neq\mathfrak{m}\subset\mathfrak{o}_F$ を $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{o}_F$ となるイデアルとする. 重さ $\mathbf{k}$, レベル $\mathfrak{n}$, 指標 χ の Hilbert モジュラー形式 $f=(f_1,\dots,f_{h_F^+})$ に対して,

$$T'(\mathfrak{m})f(z):=\mathrm{N}(\mathfrak{m})^{\max_{v\in\Sigma_\infty}k_v/2-1}\sum_{\substack{g\in\Gamma_0(\mathfrak{n})\backslash S(\mathfrak{n})/\Gamma_0(\mathfrak{n})\\ \det(g)\mathfrak{o}_F=\mathfrak{m}}}t(\Gamma_0(\mathfrak{n})g\Gamma_0(\mathfrak{n}))f$$

とおく. ここで

$$t(\Gamma_0(\mathfrak{n})g\Gamma_0(\mathfrak{n}))f:=(t(\Gamma_j\alpha_j\Gamma_{j'})f_j)_{j=1,\dots,h_F^+}$$

である.

重さ $\mathbf{k}$, レベル $\mathfrak{n}$, 指標 χ の Hilbert モジュラー形式の空間を $M_{\mathbf{k}}(\mathfrak{n},\chi)$ と書くと, $T'(\mathfrak{m})\in\mathrm{End}(M_{\mathbf{k}}(\mathfrak{n},\chi))$ である. 特に $F=\mathbb{Q}$ のときは Hilbert モジュラー形式は楕円モジュラー形式となり, $T'(m\mathbb{Z})=T(m)$ が成り立つ.

$\mathbf{T}_{F,\mathbb{Z}}^{\mathbf{k},\mathfrak{n},\chi}$ を Hecke 作用素で生成される $\mathbb{Z}$ 上の多元環とする:

$$\mathbf{T}_{F,\mathbb{Z}}^{\mathbf{k},\mathfrak{n},\chi}=\langle T'(\mathfrak{m})\mid 0\neq\mathfrak{m}\subset\mathfrak{o}_F,\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{o}_F\rangle_{\mathbb{Z}\text{-alg}}.$$

このとき, 通常よく知られている $\mathbb{C}$ 上の Hecke 環は $\mathbf{T}_{F,\mathbb{Z}}^{\mathbf{k},\mathfrak{n},\chi}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ に一致することに注意しておく. 以上の準備のもとで, Hecke 固有値の代数的整数性は以下のように述べられる.

Theorem 2.5 (Sakugawa, S. (Hilbert modular forms)). 任意の $T \in \mathbf{T}_{F,\mathbb{Z}}^{\mathbf{k},\mathbf{n},\chi}$ と任意の T の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $\lambda \in \overline{\mathbb{Z}}$ となる.

Remark 2.6. 先行研究を紹介しておく.

- 平行重さ (parallel weight) の場合 (i.e., $k_v = k, \forall v \in \Sigma_\infty$) は志村 (1978) の [19] で代数的整数性が証明されている. そこでは $\mathbb{H}^{d_F} \hookrightarrow \mathbb{H}_{d_F}$ による Siegel モジュラー形式の引き戻しが使われていた. $\mathbb{H}_{d_F}$ は次の章で導入するが, 次数 d_F の Siegel 上半空間である.
- Galois 表現の整合系 (compatible system) を用いることで上述の Hecke 固有値の代数的整数性を証明できる場合がいくつかある.
  - Shin, Templier (2014) は [20] で, Hilbert モジュラー形式がコホモロジカルかつカスピダルの場合に代数的整数性を与えた. コホモロジカルとはここでは「すべての k_v が偶数」 または (all k_v : odd$\geqslant 3$)
  - Rogawski, Tunnel (1983) は [14] で「すべての $v \in \Sigma_\infty$ で $k_v = 1$」の場合に, Hilbert モジュラー形式に付随する Galois 表現の存在を部分的に示している. 像が有限な表現 (Artin 表現) の性質から, Frobenius 固有値の代数的整数性は直ちに従う. 実際は Rogawski, Tunnel は保型表現と Galois 表現のスタンダート L 関数の一致までは証明していないが Hecke 固有値の代数的整数性を示すには十分な性質を示している.
  - [Jarvis 1997] ある無限素点 v で $k_v = 1$ になり, かつ他はすべて奇数の場合に Hilbert モジュラー形式に付随する Galois 表現を与えている.

上述の Remark の手法と異なり我々の証明方法は, コホモロジカルという条件もカスピダルという条件も用いず, Galois 表現の整合系も使わない直接的な方法である (詳細は 4 章で述べる).

3. Seigel modular forms

$\mathbb{H}_n := \{Z = X + \sqrt{-1}Y \mid X, Y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), Y > 0\}$ を次数 n の Siegel 上半空間と呼ぶ. $\mathbb{Z}$ 上のシンプレクティック群を以下の通り定める.

Definition 3.1 (シンプレクティック群).

$$\mathrm{GSp}_{2n} := \{g \in \mathrm{GL}_{2n} \mid {}^t g \left[\begin{smallmatrix} & -1_n \\ 1_n & \end{smallmatrix}\right] g = \nu(g) \left[\begin{smallmatrix} & -1_n \\ 1_n & \end{smallmatrix}\right], \quad \nu(g) \in \mathbb{G}_m\}$$

とする. $\nu : \mathrm{GSp}_{2n} \to \mathbb{G}_m$ は similitude character と呼ばれる. また,

$$\mathrm{Sp}_{2n} := \{g \in \mathrm{GSp}_{2n} \mid \nu(g) = 1\}$$

とする.

Lie 群 $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{R})^+ := \{g \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{R}) \mid \nu(g) > 0\}$ やレベル N の主合同部分群 $\Gamma(N) := \{\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \mid \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] \equiv 1_{2n} \pmod N\}$ は $\mathbb{H}_n$ に作用する. ここで作用は以下のように一次分数変換と同様に定める:

$$\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] Z := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \qquad \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{R})^+.$$

それでは早速, ジーゲルモジュラー形式を定義しよう. $\rho : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(W_\rho(\mathbb{C}))$ を既約代数的表現とする. ここでは代数的整数性について論じるため, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}$ 格子 $W_\rho(\mathbb{Z})$ に作用するように $W_\rho(\mathbb{Z})$ を定め, それの $\mathbb{C}$ へのベースチェンジを $(\rho, W_\rho(\mathbb{C}))$ としておく. ρ の最高ウェイトを $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ とすると $k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_n$ である.

Definition 3.2 (Siegel モジュラー形式). 正則関数 $f : \mathbb{H}_n \to W_\rho(\mathbb{C})$ がタイプ ρ, レベル N の Siegel モジュラー形式であるとは, 以下の変換則

$$f((AZ + B)(CZ + D)^{-1}) = \rho(CZ + D) f(Z), \quad \forall \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma(N), \quad \forall Z \in \mathbb{H}_n$$

を満たし, $\Gamma(N)$ の任意のカスプで正則であるときにいう.

Koecherの原理により, $k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_n \geqslant 0$ と仮定してよい. この仮定が満たされないときはSiegelモジュラー形式は0しかない.

次にHecke作用素を導入しよう.

$$\bar{S}_m^{(n)}(N) := \{g \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})^+ \mid \nu(g) = m,\ g \equiv \left[\begin{smallmatrix} 1_n & \\ & \nu(g)1_n \end{smallmatrix}\right] \mod N\}$$

とおき, この集合を代表系とする両側剰余類 $\Gamma(N)g\Gamma(N)$ で生成される $\mathbb{Z}$ 加群を $\mathbb{L}(N)$ とする:

$$\mathbb{L}(N) = \langle \Gamma(N)g\Gamma(N) \mid g \in \bar{S}_m^{(n)}(N), m \in \mathbb{N}, \gcd(m, N) = 1\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

これに積を入れることができて環になる. $\mathbb{L}(N)$ は抽象的Hecke環と呼ばれる. $f : \mathbb{H}_n \to W_\rho(\mathbb{C})$ をタイプ ρ, レベル N のSiegelモジュラー形式とする. $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{R})^+$ に対して, スラッシュ作用素 $|_\rho\gamma$ を以下で定める:

$$f|_\rho\gamma(Z) := \rho(\nu(\gamma)^{-1/2}(CZ + D))^{-1} f((AZ + B)(CZ + D)^{-1}).$$

Hecke作用素の定義は以下の通りである.

Definition 3.3 (Siegelモジュラー形式の場合のHecke作用素)**.** $g \in \bar{S}_m^{(n)}(N)$ に対して

$$t_{\rho,N}^n(\Gamma(N)g\Gamma(N))f(Z) := \nu(g)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n k_j - \frac{n(n+1)}{2}} \sum_{\gamma \in \Gamma(N)\backslash\Gamma(N)g\Gamma(N)} f|_\rho\gamma(Z)$$

$\mathbf{T}_{n,\mathbb{Z}}^{\rho,N} := t_{\rho,N}^n(\mathbb{L}(N))$ とおく. これを $\mathbb{Z}$ 上のHecke環と呼ぶ. この環の生成元として素数で添え字づけられたものが取れる. $p \nmid N$ なる素数と $0 \leqslant j \leqslant n-1$ なる整数 j に対して, 2種類のヘッケ作用素を $T(p) := t_{\rho,N}^n(\Gamma(N)\left[\begin{smallmatrix} 1_n & \\ & p1_n \end{smallmatrix}\right]\Gamma(N))$

$$T_{j,n-j}(p^2) := t_{\rho,N}^n(\Gamma(N) \begin{bmatrix} 1_j & & & \\ & p1_{n-j} & & \\ & & p^2 1_j & \\ & & & p1_{n-j} \end{bmatrix} \Gamma(N))$$ で定義しておく. すると上記のHecke作用素の族はHecke環の生成系を成す: $\mathbf{T}_{n,\mathbb{Z}}^{\rho,N} = \langle T(p), T_{j,n-j}(p^2) \mid p \nmid N, 0 \leqslant j \leqslant n-1\rangle_{\mathbb{Z}\text{-alg}}$. 通常の $\mathbb{C}$ 上のHecke環は $\mathbf{T}_{n,\mathbb{Z}}^{\rho,N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ に一致することに注意しておく. Siegelモジュラー形式の場合のmain resultは以下の通りである.

Theorem 3.4 (Sakugawa, S. (Siegel modular form))**.** $k_n \geqslant n+1$ を仮定する. このとき任意の $T \in \mathbf{T}_{n,\mathbb{Z}}^{\rho,N}$ と任意の T の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, $\lambda \in \overline{\mathbb{Z}}$ である.

いくつかRemarkがあるので, 書き並べておく.

Remark 3.5. 上記のTheorem内の "$k_n \geqslant n+1$" という条件は

$$T'(p) := p^{\delta(k_n < n)\frac{(n-k_n)(n-k_n+1)}{2}} T(p), \qquad T'_{j,n-j}(p^2) := p^{\delta(k_n \leqslant n)n(n-k_n+1)} T_{j,n-j}(p^2)$$

で生成される $\mathbb{Z}$ 上のHecke環を $\mathbf{T}_{n,\mathbb{Z}}^{\rho,N}$ の代わりに採用することで取り除くことができる. ここで条件Pに対して, Pが成り立つときは $\delta(\mathrm{P}) = 1$, Pが成り立たないときは $\delta(\mathrm{P}) = 0$ とする.

Remark 3.6. 同様の結果は $\Gamma_0(N)$ の場合でも成り立つ. 証明は $\Gamma(N)$ のときよりは容易になる.

Remark 3.7. 先行研究について触れておく.

(1) $N = 1$ でスカラー値の場合 (i.e., $\rho = \det^k$) は黒川 (1981) が [11] で $n = 2$ の場合に証明した. 一般の $n \geqslant 2$ の場合は水本 (1996) [12][13] により証明されている. その後, 桂田 (2008) は [8] にて水本の結果の別証明を与えた.

(2) $N = 1$, $n = 2$ で $\rho = \det^k \otimes \mathrm{Sym}^2$ の場合は佐藤 (1986) [17] を使うと証明可能である.

Remark 3.8 (Shin, Templier (2014) [20])**.** Arthurのendoscopic classificationを仮定すると, $G = \mathrm{Sp}_{2N}$, SO_N U_N の場合に保型表現の佐武パラメーターの代数的整数性を示すことができる. しかしShin, Templierの議論では以下の2つが本質的に用いられている.

- GL_n の場合にコホモロジカルカスピダル保型表現 π に付随するガロア表現の整合系 (compatible system) $\{R_{\iota_\ell}(\pi)\}_\ell$ の存在性.

- “幾何的対象のコホモロジー”$H^r(X_{\overline{F_v}}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_{F_v}}$ への Frobenius 作用 Frob_v の固有値の代数的整数性. 齋藤 [16] で与えられている.

一方, 我々の結果はコホモロジカルもカスピダルも必要としない. 手法は次の章で述べるが, 彼らの手法よりも直接的な方法であるといえる.

4. Sketch of Proof

証明の概略を述べる. M を与えられた重さ, レベル, 指標をもつモジュラー形式の空間 (Hilebrt or Siegel) とする. T は我々が研究対象としている M 上のヘッケ作用素とする. 証明は以下の 3 つのステップに分けられる.

(1) ある有限次代数体 K と有限生成 $\mathfrak{o}_K$ 加群 $M_0 \subset M$ が存在して, $M_0 \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathbb{C} = M$ となることを証明する. $\mathfrak{o}_K$ は K の整数環である.

(2) $T(M_0) \subset M_0$ を証明する.

(3) $\det(X\,\mathrm{id}_M - T) \in \mathfrak{o}_K[X]$ を証明する.

3 つ目のことから T の固有値は代数的整数であることが従う.

4.1. **ステップ (1).** まずは (1) の K と M_0 を見つけよう. $f \in M$ に対して $f(z) = \sum_n a_f(n) q^n$ を “Fourier 展開” とする. Hilbert モジュラー形式か Siegel モジュラー形式かに応じて, $a_f(n)$ は $\mathbb{C}$ の元または $W_\rho(\mathbb{C})$ の元である. また n はイデアルや半正定値半整数対称行列の集合を動いたりするが, ちゃんと書くと大変なので割愛する. なお Hilbert モジュラー形式の場合は h_F^+ 個のカスプでの Fourier 展開を考える必要があるが, アデールを使って書くと 1 つの式になるので, 上記のように q という文字を使って書いておく. 代数体 K を固定するごとに, Hilbert or Siegel に応じて

$$M_0 := \{f \in M \mid \forall n, a_f(n) \in \mathfrak{o}_K \text{ or } W_\rho(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}_K\}$$

とおく. M の有限次元性と Fourier 展開写像と $\mathfrak{o}_K$ の Noether 性を用いることで, M_0 は有限生成 $\mathfrak{o}_K$ 加群であることが分かる. このとき, 以下が成り立つ.

Proposition 4.1 (Integral structure)**.** 十分大きな有限次代数体 K が存在して, $M_0 \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathbb{C} = M$.

Remark 4.2. (1) Hilbert モジュラー形式の場合は志村 (1978) の [19] により $\overline{\mathbb{Q}}$ 構造の存在は保証されている. Katz(1978) の [9] によりモジュラー形式の Fourier 展開に現れる係数の分母に生じる整数の有界性が示されている. しかし “Katz のモジュラー形式” は通常の $\mathbb{H}_n$ 上の複素関数としてのモジュラー形式ではない. しかしながら, Katz のモジュラー形式は通常のモジュラー形式と本質的に同じであり, 両方の Fourier 展開もきちんと対応している. [3] では重さが平行のときにしか議論していないが, 一般の重さでも OK である.

(2) Siegel モジュラー形式の場合は Taylor(1988) の学位論文 [22] で $K = \mathbb{Q}$ ととれることが分かっている. N を法とする Dirichlet 指標の族 $\chi = (\chi_1, ..., \chi_n)$ に対し χ の条件付き保型形式の空間 $M_\rho(\Gamma(N), \chi)$ を導入することができる. これに対する K としては円分体 $\mathbb{Q}(\mathrm{Im}(\chi_j), 1 \leqslant j \leqslant n)$ がとれる.

4.2. **ステップ (2).** Hecke 固有値と Fourier 係数の間には a priori には関係がない. そのためステップ (1) から Hecke 固有値が代数的整数になることは分からない. 説明が面倒なので省略するが, Siegel モジュラー形式の場合にどのような手順を踏むかざっくり説明しておく. レベルを割らない素数 p と $\delta \in \mathbb{N}$ に対して, $T(p^\delta)$ という Hecke 作用素が

$$T(p^\delta) f(Z) = \sum_{g \in \Gamma(N) \backslash \bar{S}^{(n)}_{p^\delta}(N)} t^n_{\rho,N}(\Gamma(N) g \Gamma(N)) f(Z)$$

で定義される. ここで f は任意のタイプ ρ, レベル N の Siegel モジュラー形式である.

Proposition 4.3 ($\Gamma(N)\backslash\bar{S}^{(n)}_{p^\delta}(N)$ の完全代表系)**.** 集合 $V_N(p^\delta)$ を以下のように定める:

$$V_N(p^\delta) := \{g_1(p^{\alpha_1})\cdots g_n(p^{\alpha_n})[\begin{smallmatrix} p^\delta({}^tD^{-1}) & NB \\ 0_n & D\end{smallmatrix}] \mid {}^tBD = {}^tDB, B \bmod D, \alpha_j \geqslant 0, \alpha_0 + \cdots \alpha_{n-1} \leqslant \delta,$$
$$D \in \mathrm{diag}(p^{\alpha_0}, \ldots, p^{\alpha_0+\cdots+\alpha_{n-1}})R(p^{\alpha_1}, \ldots, p^{\alpha_{n-1}})\}.$$

ここで $\alpha_n := \delta - \sum_{\ell=1}^{n-1}\alpha_\ell$ としている. $g_j(p^{\alpha_j}) \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ は N を法として

$$\mathrm{diag}(\underbrace{p^{-\alpha_j}, \ldots, p^{-\alpha_j}}_{j}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-j}, \underbrace{p^{\alpha_j}, \ldots, p^{\alpha_j}}_{j}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-j})$$

に合同なものとして各 j ごとに固定しておく. また $\beta_j := \alpha_0 + \cdots + \alpha_{j-1}$ とおき, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ の部分群としてのレベル N の合同部分群を $\Gamma_{\mathrm{SL}_n}(N)$ と書くとき, $R(p^{\alpha_1}, \ldots, p^{\alpha_{n-1}})$ は

$$[\Gamma_{\mathrm{SL}_n}(N) \cap \mathrm{diag}(p^{\beta_1}, \ldots, p^{\beta_n})^{-1}\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})\mathrm{diag}(p^{\beta_1}, \ldots, p^{\beta_n})]\backslash\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$$

の完全代表系である. するとこのとき, $V_N(p^\delta)$ は $\Gamma(N)\backslash\bar{S}^{(n)}_{p^\delta}(N)$ の完全代表系になる.

さて, $T(p^\delta)M_0 \subset M_0$ の証明にあたり $\delta = 1$ の場合を考えれば十分であるが, 一般の δ の場合に議論を記しておく. $f \in M_\rho(\Gamma(N), \chi)$ に対して

$$T(p^\delta)f(Z) = \sum_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1},D,B}\{\prod_{j=1}^n \chi_j(p^{\alpha_j})\} \times (p^\delta)^{\sum_{j=1}^n k_j - \frac{n(n+1)}{2}}\rho^{-1}(D)f((p^\delta({}^tD^{-1})Z + NB)D^{-1})$$

と書ける. $T(p^\delta)f$ の, 添え字 S(半正定値半整数 n 次対称行列) における Fourier 係数は, f の Fourier 係数 $a_f(\cdot)$ を用いて

$$\begin{aligned}&\{\prod_{j=1}^n \chi_j(p^{\alpha_j})\} \times (p^\delta)^{\sum_{j=1}^n k_j - \frac{n(n+1)}{2}} \\ &\times \sum_{D,B}\rho(D)^{-1}\exp(2\pi i \mathrm{tr}(p^{-\delta}DS^tDBD^{-1}))a_f(p^{-\delta}DS^tD) \\ =&\{\prod_{j=1}^n \chi_j(p^{\alpha_j})\} \times (p^\delta)^{\sum_{j=1}^n k_j - \frac{n(n+1)}{2}}\sum_D \rho(D)^{-1}\mathcal{G}(p^{-\delta}DS^tD, D)a_f(p^{-\delta}DS^tD)\end{aligned}$$

と表せる. ただし $a_f(T)$ が定義されていないような T に対しては $a_f(T) = 0$ としている. あとは上の式が $W_\rho(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}_K$ の元であることを示せばよい. $\mathcal{G}(X, D) := \sum_B \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(XBD^{-1}))$ とおくとこの指数和は Freitag (1983) の本 [5] の議論を参考にすることで

$$\mathcal{G}(p^{-\delta}DS^tD, D) = p^{\delta A} \text{ or } 0$$

(A は k と n を用いて明示的に記述できる定数) となることが証明できる. したがって $T(p^\delta)M_0 \subset M_0$ が分かる. $T_{j,n-j}(p^2)M_0 \subset M_0$ も, Andrianov(1987) の本 [1] を参考にすれば同様にして示すことができる.

4.3. **ステップ (3).** いよいよ最後のステップである. $\mathfrak{o}_K$ は Dedekind 環であるが, このステップでは $\mathfrak{o}_K$ が正規 Noether 環であることしか使わない. これまでの議論により, Hecke 作用素 T が $T(M_0) \subset M_0$ を満たしており, M_0 は有限生成 $\mathfrak{o}_K$ 部分加群で, ねじれ元を持たない.

もし $\mathfrak{o}_K$ が単項イデアル整域であれば, 単因子論により M_0 は $\mathfrak{o}_K$ 自由加群となり線型代数に帰着され, $\det(X\,\mathrm{id}_M - T) \in \mathfrak{o}_K[X]$ となる. 一般に $\mathfrak{o}_K$ は単項イデアル整域とは限らないが, 以下の 2 点に注意すると単因子論が使える状況に持ち込める.

- $\mathfrak{o}_K = \bigcap_{\mathfrak{p}\,:\,\text{height one prime}} \mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}$ となる. ここで添え字の $\mathfrak{p}$ は高さ 1 の素イデアル全体を動き, $\mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ による局所化である. この等式は $\mathfrak{o}_K$ が正規 Noether 環であることから従う.
- 各 $\mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}$ は離散的付値環である. 特に単項イデアル整域である.

単因子論により $M_0 \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}$ は自由 $\mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}$ 加群になり, 作用素 T が誘導する写像 $T : M_0 \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}} \to M_0 \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}$ 加群としての準同型写像である. 結論として, $\det(X\,\mathrm{id}_M - T) \in \cap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}[X] = \mathfrak{o}_K[X]$ となり, 特に T の任意の固有値は代数的整数である. $\square$

5. Applications to Hecke fields

$S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ を重さ k, レベル N, 指標 χ の楕円カスプ形式全体のなす空間とし, $f \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ を正規化されたカスピダル新 Hecke 固有形式とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して f は $T(n)$ の固有ベクトルなので, ある $a_f(n) \in \mathbb{C}$ が存在して $T(n) = a_f(n)f$ となる. $a_f(n)$ は Hecke 固有値と呼ばれるのであった.

Definition 5.1 (f の Hecke 体)**.** $\mathbb{Q}(f) := \mathbb{Q}(\{a_f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathbb{C}$ とおく. これを f の Hecke 体と呼ぶ.

以下の事実が知られている.

Proposition 5.2. $[\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] < \infty$ であり, $\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}$ は総実拡大か CM 拡大.

このとき, Hecke 体の拡大次数に関する以下の問題が考えられる.

Questioin 5.3. $[\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}]$ はどのように増大するだろうか？

上記の問題に対する Serre の結果を復習しておく. $S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(N))$ を $S_k(\Gamma_0(N))$ 内の新形式のなす部分空間とする (指標 χ は自明指標にしている). $B_k^{\mathrm{new}}(N) \subset S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(N))$ を正規化された新 Hecke 固有形式からなる直交基底とする. Serre(1997) は [18] で, 拡大次数はいくらでも大きくなり得ることを証明した.

Theorem 5.4 (Serre の定理)**.** 重さ k を固定する. このとき,

$$\limsup_{N \to \infty} \max_{f \in B_k^{\mathrm{new}}(N)} [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] = \infty.$$

Serre の定理は Hecke 体の拡大次数の発散スピードについては何も言っていない. その後 Royer (2000) は [15] で Serre の定理を以下のように精密化した.

Theorem 5.5 (Royer の定理)**.** $k = 2$ とする. 素数 p を固定する. このとき,

$$\max_{f \in B_2^{\mathrm{new}}(N)} [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] \gg_p \sqrt{\log\log N} \qquad (p \nmid N)$$

が成り立つ. より精密に, 以下の 2 つの評価が成立する.

$$\max_{\substack{f \in B_2^{\mathrm{new}}(N) \\ L(1/2, f) \neq 0}} [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] \gg_p \sqrt{\log\log N} \qquad (p \nmid N)$$

$$\max_{\substack{f \in B_2^{\mathrm{new}}(N) \\ \mathrm{ord}_{s=1/2} L(1/2, f) = 1}} [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] \gg_p \sqrt{\log\log N} \qquad (p \nmid N)$$

ここで $L(s, f)$ は関数等式の中心が $1/2$ であるような f の非完備スタンダード L 関数である.

Serre の定理 (Theorem 5.4) の証明を説明しよう. 意外に思うかもしれないが, 跡公式 (Eichler-Selberg 跡公式) を用いる. Serre が [18] で与えた Hecke 固有値の一様分布性を思い出す.

Theorem 5.6 (一様分布定理, Vertical Sato-Tate law)**.** 素数 p を固定する. 点列 $\{(k_j, N_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ を, $k_j \in 2\mathbb{N}$, $p \nmid N_j$, $k_j + N_j \to \infty$ $(j \to \infty)$ を満たすものとする. このとき, 正規化された Hecke 固有値の集合

$$\left\{ \frac{a_f(p)}{p^{(k-1)/2}} \;\middle|\; f \in B_{k_j}(N_j) \right\}, (j \in \mathbb{N})$$

は $[-2, 2]$ の中で測度 μ_p に関して一様分布である. ただし μ_p は

$$d\mu_p(x) = \frac{p+1}{(p^{1/2} + p^{-1/2})^2 - x^2} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2\pi} dx$$

で与えられる確率測度である．一様分布であることは式で記述すると以下のようになる: 任意の $\phi \in C([-2,2])$ に対して

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\#B_{k_j}(N_j)} \sum_{f\in B_{k_j}(N_j)} \phi\left(\frac{a_f(p)}{p^{(k-1)/2}}\right) = \int_{-2}^{2} \phi(x)d\mu_p(x).$$

一様分布定理の系として以下が得られる．

Corollary 5.7. $r \in \mathbb{N}$ に対して $s_r(k,N) := \#\{f \in B_k(N) \mid [\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}] = r\}$ とおく．$k \in 2\mathbb{N}$ を固定する．任意の素数 p と任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ p\nmid N}} \frac{s_r(k,N)}{\#B_k(N)} = 0$$

が成り立つ．

上の系から Serre の定理が以下のようにして導かれる．

Proof of Theorem 5.4. 上の系から

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{f\in B_k(N)} [\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}] = \infty.$$

が従う．実際, この limsup が有限だと仮定すると, 以下のように矛盾が生じる．まず f, N を動かしたときの $[\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}]$ の上界のひとつを r_0 とすると, 等式 $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} s_r(k,N) = \#B_k(N) < \infty$ の左辺は $r=1$ から r_0 までの和になる．この等式の両辺を $\#B_k(N)$ で割れば

$$\sum_{r=1}^{r_0} \frac{s_r(k,N)}{\#B_k(N)} = 1$$

となり, N を p と互いに素になるように無限大に飛ばすと, r_0 が N に依らないので極限と和の順序交換ができて, $0=1$ となってしまう．ゆえに $\limsup$ は ∞ になる．N が p で割れる場合や $B_k(N)$ を $B_k^{\mathrm{new}}(N)$ に置き換える際の考察は易しい． □

Proof of Corollary 5.7. $[\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}] \geqslant [\mathbb{Q}(a_f(p)):\mathbb{Q}]$ であることに注意すると, $s_r(k,N,p) := \#\{f \in B_k(N) \mid [\mathbb{Q}(a_f(p)):\mathbb{Q}] \leqslant r\}$ とおいたときに

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ p\nmid N}} \frac{s_r(k,N,p)}{\#B_k(N)} = 0$$

を示せば十分であることが分かる．次に

$$A := \{x \in \overline{\mathbb{Z}} \mid x : \text{totally real } \& \ \deg(x) \leqslant r \ \& \ |\sigma(x)| \leqslant 2p^{(k-1)/2} (\forall\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))\}$$

とおく．ただし $\deg(x)$ は x の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の次数である．Hecke 固有値の代数的整数性 (Theorem 1.4) により, A は $a_f(p)$ の形の数を全て含む．また, A の元の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $\mathbb{Z}[X]$ の元であり各係数は p と k に依存する定数で押さえられるから, A は有限集合である．$A' := \frac{1}{p^{(k-1)/2}}A \subset [-2,2]$. と置くとこれも有限集合である．特に A' は μ_p に関する正則 Borel 集合 (regular Borel set) である, すなわち $\mu_p(\partial A') = 0$ である．一様分布性を記述するテスト関数 ϕ は Riemann 積分可能な関数にまでなら拡張できるので, ϕ として A' の特性関数 $\mathrm{ch}_{A'}$ を採用すると, Theorem 5.6 により,

$$\frac{s_r(k,N,p)}{\#B_k(N)} = \frac{1}{\#B_k(N)} \sum_{f\in B_k(N)} \mathrm{ch}_{A'}\left(\frac{a_f(p)}{p^{(k-1)/2}}\right) \xrightarrow[\substack{N\to\infty \\ p\nmid N}]{} \int_{A'} d\mu_p(x) = 0$$

となる． □

Remark 5.8. この証明法では, A の有限性が本質的であるので, 素数 p を 1 つ選んで犠牲にすること, k を固定すること, Hecke 固有値 $a_f(p)$ が代数的整数であることの 3 つが本質的に重要である．また実は, Ramanujan-Petersson 予想に関する Deligne の結果を知らなくても証明できる．代数的整数性の条件が知られていな場合に上記の方法を使おうとすると, $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分集合として A を導入することになってしまう．この A は正則 Borel 集合かどうか分からないため, テスト関数の ϕ として ch_A を採用することができない.

Remark 5.9. Royer の定理のような明示的な下界は, 一様分布性の明示的な誤差項によって生じる．実際, Royer は Eichler-Selberg 跡公式と近似関数等式によって, L 関数の中心値や中心微分値の重み付きの $a_f(p)$ たちの一様分布性を誤差項付きで与え, それを Hecke 体の次数評価に応用した.

さて, Royer の結果の類似物として筆者が都築と共同で研究した結果 [21] を思い出す．以下では総実代数体 F 上の正則 Hilbert カスプ形式を考察する.

Theorem 5.10 (S., Tsuzuki 2016)**.** $\mathbf{k}=(k_v)_{v\in\Sigma_\infty}$ の成分はすべて偶数であり, $\mathrm{w}k_v=k\geqslant 6$ $(\forall v\in\Sigma_\infty)$ を満たすものとする．$\eta: F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times\to\{\pm1\}$ を 2 次指標とし, $\mathfrak{p}$ を η のコンダクター $\mathfrak{f}_\eta\subset\mathfrak{o}_F$ を割らない非ゼロ素イデアルとする．重さ $\mathbf{k}$, レベル $\mathfrak{n}$ の Hilbert カスプ形式としての正規化された Hecke 固有形式からなる直交基底を $B_{\mathbf{k}}^{\mathrm{new}}(\mathfrak{n})$ と書くと, $\mathfrak{n}$ を動かすとき, 以下の評価が成り立つ:

$$\max_{\substack{f\in B_{\mathbf{k}}^{\mathrm{new}}(\mathfrak{n})\\ L(1/2,f)L(1/2,f\otimes\eta)\neq 0}}[\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}]\gg_{\mathbf{k},\mathfrak{p},\eta}\sqrt{\log\log\mathrm{N}(\mathfrak{n})}\qquad(\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{n},(\mathfrak{f}_\eta,\mathfrak{n})=\mathfrak{o}_F)$$

ここで L 関数は, 関数等式の中心が 1/2 であるようなスタンダード L 関数を考えている.

証明には, T を GL_2 の分裂トーラスとしたときの $T\backslash\mathrm{GL}_2/T$ に対する相対跡公式を用いる．重さが平行であるという仮定は相対跡公式の導出では不要であり, 志村 [19] の Hecke 固有値の代数的整数性を用いるためだけに課されていた．したがって, 本研究の Hilbert モジュラー形式の Hecke 固有値の代数的整数性 (Theorem 2.5) を用いれば, 系として以下を得る.

Corollary 5.11 (Sakugawa, S.)**.** 重さ $\mathbf{k}$ が平行でない場合も Theorem 5.10 は成り立つ.

では新たに得られた Corollary 5.11 を GL_n の保型表現の Hecke 体の次数評価に応用しよう．$d_F:=[F:\mathbb{Q}]$ とする．Langlands 予想の観点から, 保型表現のリフティングとして Galois 表現の誘導に対応するものの存在が信じられている:

$$\begin{array}{ccc}\pi\text{ of }\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) & \xrightarrow{\text{Langlands}} & \rho: 2\text{-dim. rep. of }\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{AI}_{F/\mathbb{Q}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}}\\ \Pi\text{ of }\mathrm{GL}_{2d_F}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) & \xleftarrow[\text{Langlands}]{} & \rho': 2d_F\text{-dim. rep. of }\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\end{array}$$

もしこのような $\Pi:=\mathrm{AI}_{F/\mathbb{Q}}(\pi)$ が $\mathrm{GL}_{2d}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現として存在するなら, Π を π の保型誘導 (Automorphic Induction) と呼ぶ．もし Π が存在すれば, スタンダード L 関数に関する等式

$$L(s,\pi)=L(s,\Pi)$$

を満たす．F が $\mathbb{Q}$ 上の素数次巡回拡大体のときには保型誘導の存在および基本性質が Arthur, Clozel [2] により証明された．この保型誘導を Corollary 5.11 に適用することで, 以下を得る.

Corollary 5.12 (Sakugawa, S.)**.** d を素数とする．このとき $\mathrm{GL}_{2d}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ のコホモロジカルカスピダル保型表現の族 $\{\Pi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在して, 以下が成り立つ: $\lim_{j\to\infty}N_{\Pi_j}=\infty$, $L(1/2,\Pi_j)\neq 0$, $[\mathbb{Q}(\Pi_j):\mathbb{Q}]\gg\sqrt{\log\log N_{\Pi_j}}$.

この結果の証明にあたり以下の 4 つに注意する必要がある.

(1) 素数 d に対して代数体 F を, $\mathbb{Q}$ 上の総実巡回拡大体で $[F:\mathbb{Q}]=d$ となるようにとる．これは Dirichlet の算術級数定理と Galois 理論を使えばできる.

(2) $\mathbf{k} = (k_v)_{v\in\Sigma_\infty}$ を $k_v(\geqslant 6)$ が相異なるように取る．こうすると重さ $\mathbf{k}$ の Hecke 固有形式に付随する既約カスピダル保型表現 π に対して, $\Pi = \mathrm{AI}_{F/\mathbb{Q}}(\pi)$ はカスピダルである (Arthur, Clozel の criterion).

(3) Π のコンダクター $N_\Pi \in \mathbb{N}$ は π のコンダクター $N_\pi \in \mathbb{N}$ と本質的に同じである．実際 $N_\Pi = \mathrm{N}(\mathcal{D}_F)^2 N_\pi$ であることが関数等式と local new form の理論 (Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika [6]) により従う．

(4) $[\mathbb{Q}(\Pi):\mathbb{Q}] \leqslant [\mathbb{Q}(\pi):\mathbb{Q}] \leqslant d![\mathbb{Q}(\Pi):\mathbb{Q}]$ が成り立つ．これは, GL_{2d} に対する強重複度一定理 (Strong multiplicity one theorem) と, GL_2 及び GL_{2d} の局所 Langlands 対応が $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の作用と "ほぼ可換" であることから分かる．

Remark 5.13. Shin, Templier (2014) の結果 [20] ではある程度一般的な簡約代数群 G に対して Hecke 体の次数評価が与えられた．G が代数体 F 上の古典群で $G(F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ が離散系列表現を持つようなものとする．$\mathfrak{o}_F$ の非ゼロ素イデアル $\mathfrak{p}$ を固定する．このとき, $\mathfrak{p}$ と互いに素な $\mathfrak{o}_F$ のイデアルの列 $\{\mathfrak{n}_j\}$ に対して $G(\mathbb{A}_F)$ のコホモロジカルカスピダル保型表現の族 $\{\pi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ で $\pi_j^{K(\mathfrak{n}_j)} \neq 0$ なるものが存在して

$$[\mathbb{Q}(\pi_j):\mathbb{Q}] \gg_{\mathfrak{p}} \sqrt{\log\log N(\mathfrak{n}_j)}$$

が成り立つ．無視している定数は $\mathfrak{n}_j$ には依らない．

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は離散系列表現を持つが, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ $(n\geqslant 3)$ は離散系列表現を持たない．したがって我々の Corollary 5.12 において, たとえ中心 L 値の非消滅性を課さないとしても, Shin, Templier では扱うことができない設定である．

以下, Sp_{2n} の場合, すなわち Siegel モジュラー形式のタイプ ρ の最高ウェイトが $k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_n > n+1$ を満たす場合を考える．$f \in S_\rho(\Gamma(N))$ を N の外でのカスピダル Hecke 固有形式であって, 付随する保型表現の中心指標は自明とする．

$$\mathbb{Q}(f) := \mathbb{Q}(\{\lambda : \text{eigenvalues of } T(p), T_{j,n-j}(p^2), p\nmid N\})$$

とおくと, これは f の Hecke 体から f の分岐素点の情報を除いて導入された体であるが, f の Hecke 体と呼ぶことにする．

Corollary 5.14 (Sakugawa, S.)**.** $B_\rho(N)$ を, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約カスピダル保型表現に対応する, タイプ ρ でレベル N の N の外での Hecke 固有形式からなる直交基底とする．

素数 p を固定する．$p\nmid N$ なる任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して

$$\max_{f\in B_\rho(N)} [\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}] \gg_{n,\rho,p} \sqrt{\log\log N}$$

が成り立つ．

Arthur の不変跡公式によって Sp_{2n} の保型表現の佐武パラメーターの一様分布定理を得ることができる (Kim, 若槻, 山内 [10])．これと Royer の議論 (Shin, Templier の議論) を用いることで証明できる．$k_n > n+1$ という条件には等号がついていないが, これは Sp_{2n} に対する一様分布定理の証明の際に概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数を用いるためである．

6. Hecke 体の増大度評価の重さアスペクトについて

講演後に Ken Ono から, 楕円モジュラー形式の場合の重さアスペクトの場合も同様の評価は得られるのではないか, というご指摘を頂いた．彼が筆者の講演中に考えたことは以下の通りである．

——-

レベル $N=1$ の場合を考える．$k\in\mathbb{N}$ に対して $\mathbb{Q}_k$ を $\{\mathbb{Q}(f)\}_{f\in B_k(1)}$ の $\mathbb{C}$ の中での合成体とする．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対する Eichler-Selberg 跡公式を使うと $S_k(1)$ 上の Hecke 作用素 $T_k(n)$ の跡の母関数 $\sum_{k=0}^\infty \mathrm{tr}(T_k(n))X^k$ が X の有理関数になることが分かり, そこから

$$[\mathbb{Q}_k:\mathbb{Q}] \gg \sqrt{k}$$

が証明できる. さらに前田予想を仮定すると $[\mathbb{Q}_k:\mathbb{Q}] \gg k$ になる. 今思いついたので文献はあるのかどうか分からない.

——-

Ono から上記の結果を告げられた際, 筆者はそのような結果を知らなかったので “I'm not sure” と答えた. それに対し Ono は “I'm sure” と答えて説明を続け, 会場を沸かせていたのが印象的である. 筆者は Ono の考察の細部をチェックしていないが, 重さアスペクトで上記の評価の $k^{1/2}$ を k^{α}(ただし $1/2 < \alpha \leqslant 1$) に改良するという方向性の研究は興味深いのかもしれない.

Acknowledgements

講演および本記事の執筆の機会を与えて下さった世話人の加塩朋和氏 (東京理科大学), 千田雅隆氏 (東京電機大学) にはこの場を借りて感謝いたします. 講演後にさまざまなコメントを下さった三枝洋一氏 (東京大学) にも感謝いたします. また, この原稿をチェックしてくださった佐久川憲児氏 (信州大学) にもこの場を借りて感謝いたします.

また筆者は JSPS 科研費 19K21025(研究活動スタート支援), 20K14298(若手研究) の助成を受けております.

References

[1] A. N. Andrianov, *Quadratic forms and Hecke operators*, Grundl. math. Wiss., **286**, Springer-Verlag, (1987).
[2] J. Arthur, L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Mathematics Studies, vol. **120**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
[3] P. Deligne, K. A. Ribet, *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math., **59** (1980), no. 3, 227-286.
[4] S. A. Evdokimov, *Euler products for congruence subgroups of the Siegel group of genus 2*, Math. USSR Sb. 28, (1976), 431–458.
[5] E. Freitag, *Siegelsehe Modulfunktionen*, Grundl. math. Wiss., vol. **254**, Springer, 1983.
[6] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika, *Conducteur des repr'esentations du groupe lin'eaire*, Math. Ann., **256**, 199–214 (1981).
[7] A. F. Jarvis, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, J. Reine Angew. Math. **491** (1997), 199–216.
[8] H. Katsurada, *Congruence of Siegel modular forms and special values of their standard zeta functions*, Math. Z., **259** (2008), 97–111.
[9] N. M. Katz, *p-adic L-functions for CM fields*, Invent. Math., **49** (1978), no. 3, 199–297.
[10] H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, *Equidistribution theorems for holomorphic Siegel cusp forms of general degree: the level aspect* , preprint, arXiv:2106.07811 [math.NT].
[11] N. Kurokawa, *On Siegel eigenforms*, Proc. Japan Acad., **57**, Ser. A. (1981), 47–50.
[12] S. Mizumoto, *On integrality of Eisenstein liftings*, Manuscripta Math., **89** (1996), no. 2, 203–235.
[13] S. Mizumoto, *Corrections to : On Integrality of Eisenstein Liftings*, Manuscripta Math., **90** (1996), no. 2, 267–269.
[14] J. D. Rogawski, J. B. Tunnell, *On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight one*, Invent. Math. **74** (1983), no. 1, 1–42.
[15] E. Royer, *Facteurs $\mathbb{Q}$-simples de $J_0(N)$ de grande dimension et de grand rang,* Bull. Soc. Math. France 128 (2000), no. 2, 219–248.
[16] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of l*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 583–634.
[17] T. Satoh, *On certain vector valued Siegel modular forms of degree two*, Math. Ann. **274** (1986), no. 2, 335–352.
[18] J. P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p*, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), no.1, 75–102.
[19] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. **45** (1978), no.3, 637–679.
[20] S. W. Shin and N. Templier, *On fields of rationality for automorphic representations*, Compos. Math. **150** (2014), no. 12, 2003–2053, 2014.
[21] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *Existence of Hilbert cusp forms with non-vanishing L-values*, Canad. J. Math. **68** (2016), 908–960.
[22] R. Taylor, *On Congruences between modular forms*, PhD. thesis, Princeton University, 1988.