Stochastic flows on foliated spaces

熊本大学 大学教育統括管理運営機構附属数理科学総合教育センター　須崎 清剛

Kiyotaka Suzaki
Mathematical Science Education Center,
Headquarters for Admissions and Education,
Kumamoto University

概要

本稿は，RIMS 共同研究集会「ランダム力学系・非自励力学系研究の展望：理論と応用」における筆者の発表内容とその補足をまとめたものである．葉層付き空間上に確率微分方程式を導入し，その解の性質と付随する確率流に関して現在までにわかっていることをいくつか紹介する．解の構成や性質については [10], 確率流については稲濱譲氏との共同研究 [7] に基づく．

0　背景

葉を力学系の軌道の一般化と考えることで，葉層付き空間は力学系の一般化と考えられる．葉層付き空間に対するエルゴード理論的研究の 1 つの手法として，まず葉層付き Riemann 多様体上の葉に沿った Brown 運動とその不変測度である調和測度を考える方法が Garnett[6] により導入され，Candel[1] により葉層付き空間上の葉に沿った拡散過程とその不変測度へと一般化された．もしもこのような拡散過程を確率微分方程式の解として導入し，Euclid 空間や多様体上の確率微分方程式に対して得られている様々な結果を葉層付き空間版へと拡張することができれば，葉層付き空間に対して豊かな確率解析的研究を行うことが可能となる．

ここでは，葉層付き空間上の確率微分方程式の解とそれが誘導する確率流について考える．適切な仮定の下で，多様体上の各点 m を出発する確率微分方程式の解 $X = (X(m)_t)_{0\leq t\leq T}$ は, 各時刻 t に対して出発点から t 秒後の点を対応させせる写像 $m \mapsto X(m)_t$ と見なしたとき微分同相写像となり，ランダムな微分同相の流れ，すなわち微分同相の確率流を定めることがよく知られている．しかし，葉層付き空間の場合は，その構造の一般性から多様体での確率流の構成法を直接適用できない難点が生じる．本稿ではその難点部分と，その難点はラフパス理論の基本的手法を用いることにより克服されることも述べる．

1　準備

ここでは主結果を述べるために必要ないくつかの用語と基本的事実をまとめる．$\mathcal{Z}$ を局所コンパクト可分距離付け可能空間とし，k を非負整数または ∞ とする．$\mathbb{R}^p \times \mathcal{Z}$ の開集合 U に対し，$f\colon U \to \mathbb{R}^p$ が C^k_L 級であるとは，z を固定するごとに $f(\bullet, z)$ は通常の意味で C^k 級で，各偏導関数は U で連続であるときをいう．また，V を $\mathbb{R}^p \times \mathcal{Z}$ の開集合とするとき，写像 $f\colon U \to V$ が C^k_L 級であるとは，f は局所的に $f(y,z) = (f_1(y,z), f_2(z))$ と表され，f_1 は C^k_L 級，f_2 は連続となるときをいう．可分な距離付け可能空間 $\mathcal{M}$ は，次の (i), (ii) をみたす開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ をもつとき，葉層付き空間と呼ばれる．

(i)　各 α に対して，U_α から $\mathbb{R}^p$ の連結開集合 $B_{\alpha,1}$ と $\mathcal{Z}$ の開集合 $B_{\alpha,2}$ への直積への同相写像 $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to B_{\alpha,1} \times B_{\alpha,2}$ が存在する．

(ii)　$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき，座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞_L 級である．

$\varphi_\alpha^{-1}(B_{\alpha,1} \times \{z\})$ の形をした $\mathcal{M}$ の部分集合は plaque と呼ばれる．$m \in \mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{L}_m$ を有限個の plaque によって m と結ばれる点 m' 全体，すなわち

$$\mathcal{L}_m = \left\{ m' \in \mathcal{M} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{有限個の plaque } P_1, P_2, \dots, P_n \text{ が存在して} \\ m \in P_1,\, m' \in P_n,\, \text{どんな } 1 \leq i \leq n-1 \text{ についても} \\ P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset. \end{array} \right\}$$

とし，m を通る葉と呼ぶ．各葉には，plaque を座標近傍とするような滑らかな p 次元多様体の構造が入ることがわかる．まとめると $\mathcal{M}$ は各座標近傍として $\mathbb{R}^p$ の開集合と $\mathcal{Z}$ の開集合の直積が与えられ，座標変換が plaque の並んだ層状の構造を滑らかに保つことから，各葉は滑らかな多様体となっている．別の言い方をすれば，葉層付き空間はいくつもの葉と呼ばれる多様体によって分割されている位相空間であって，その分割の様子が局所的には $\mathbb{R}^p$ の開集合と $\mathcal{Z}$ の開集合の直積と思える位相空間である．

以降，葉層付き空間 $\mathcal{M}$ はコンパクトであると仮定する．$\mathcal{M}$ 上の葉に沿うベクトル場 $V\colon \mathcal{M} \ni m \mapsto V(m) \in T_m(\mathcal{L}_m)$ が C^k_L 級であるとは，各局所座標表示が C^k_L 級であるときをいう．$\mathcal{M}$ 上の実数値 C^k_L 級関数の集合 $C^k_L(\mathcal{M})$ と，$\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}$ への C^k_L 級写像の集合 $C^k_L(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ も，多様体の場合と同様にそれぞれ各局所座標表示が C^k_L 級である関数，写像の集合として定義される．また，ここでは葉を保つ $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}$ 自身への C^k_L 微分同

相写像全体を $\mathrm{Diff}_L^k(\mathcal{M})$ と表す．すなわち，

$$\mathrm{Diff}_L^k(\mathcal{M})=\left\{f\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}\;\middle|\;\begin{array}{l} f\text{ は全単射で，}f,f^{-1}\in C_L^k(\mathcal{M},\mathcal{M}),\\ \text{任意の }m\in\mathcal{M}\text{ に対し，}f(\mathcal{L}_m)=\mathcal{L}_m.\end{array}\right\}.$$

$\mathrm{Diff}_L^k(\mathcal{M})$ は，自身とその逆写像の k 階までのすべての偏導関数まで込めた局所一様収束の位相で Polish 空間となることがわかる．葉層付き空間の基礎や例については [2],[3],[9], その上の写像空間の位相については [7] の中に述べられている．

$V_0,V_1,\ldots,V_d$ を C_L^3 級のベクトル場とし，次の $\mathcal{M}$ 上の確率微分方程式

$$dX_t=\sum_{i=1}^d V_i(X_t)\circ dB_t^i+V_0(X_t)dt \tag{1.1}$$

を考える．ここで，$\mathcal{M}$ に値をとる連続な確率過程 $X=(X_t)_{0\le t\le T}$ が確率微分方程式 (1.1) の解であるとは，d-次元標準 Brown 運動 $B=\{B_t\}_{0\le t\le T}$ が存在して，どんな $f\in C_L^3(\mathcal{M})$ に対しても

$$f(X_t)-f(X_0)=\sum_{i=1}^d\int_0^t V_if(X_s)\circ B_s^i+\int_0^t V_0f(X_s).$$

が成立するときをいう．

2　結果

確率微分方程式 (1.1) の解の存在と，それに付随する確率流についての結果を紹介する．以下では Polish 空間 $\mathcal{X}$ に対して，閉区間 $[0,T]$ 上の $\mathcal{X}$ に値を取る連続なパス全体に一様収束位相を備えた空間を $C([0,T],\mathcal{X})$ で表す．とくに $t=0$ で $0\in\mathbb{R}^d$ の値をとる $w=(w_t)_{0\le t\le T}\in C([0,T],\mathbb{R}^d)$ 全体の集合を $C_0([0,T],\mathbb{R}^d)$ で表し，P^W をその上の d-次元 Wiener 測度，すなわち d-次元標準 Brown 運動の確率分布とする．

定理 1 ([10])**.** (i) 確率微分方程式 (1.1) は，一意的な強い解をもつ．とくに任意の $m\in\mathcal{M}$ に対して，$(C_0([0,T],\mathbb{R}^d),P^W)$ 上で定義された (1.1) の解 $X=(X(m,w)_t)_{0\le t\le T}$ であって $X(m)_0=m$ をみたすものが一意的に存在する．

(ii) $X=(X(m,w)_t)_{0\le t\le T}$ は出発点 m に関して確率連続性をもつ．すなわち，$m_n\to m$ のとき $C([0,T],\mathcal{M})$ 値確率変数として $X(m_n)$ は $X(m)$ へ確率収束する．

注意. 多様体上の確率微分方程式の解から確率流を構成する 1 つの方法は，Kolmogorv-Chentsov-Totoki の連続修正定理を用いる方法である（[8]）．その特別の場合を述べると

命題. D を $\mathbb{R}^p$ の領域とし，$(X(x))_{x\in D}$ を Euclid 空間値確率変数の族とする．また，正数 γ, C と $\alpha > d$ が存在して，すべての $x, y \in D$ に対し

$$E[|X(x) - X(y)|^\gamma] \leq C|x-y|^\alpha \tag{2.1}$$

が成立するとする．このとき $X(x)$ は連続修正をもつ．すなわち各 $x \in D$ に対して $X(x) = Y(x)$ a.s. をみたす $(Y(x))_{x\in D}$ であって a.s. で $x \mapsto Y(x)$ が連続なものが存在する．

葉層付き空間は局所的に $\mathbb{R}^p$ の開集合と抽象的な位相空間 $\mathcal{Z}$ の開集合の直積であるため，連続修正定理を直接適用することができない．連続修正定理における D を抽象的な位相空間の領域へと一般化することも難しい問題と思われる．また，一般化できたとしても，確率微分方程式 (1.1) 中のベクトル場が $\mathcal{Z}$ 方向にはただの連続で，とくに Lipschitz 連続とは仮定されていないため，不等式 (2.1) は標準的な方法では得られない（定理 1(ii) で述べられている確率連続性は示すことができる）．

しかし，ラフパス理論の基礎を用いることにより，次にまとめるように葉層付き空間上の確率微分方程式が誘導する葉を保つ微分同相の確率流が構成される．

定理 2 ([7])**.** 写像

$$\mathcal{M} \times (C_0([0,T], \mathbb{R}^d) \ni (m, w) \mapsto \Phi(m, w) \in C([0,T], \mathcal{M})$$

であって，次の性質をみたすものが存在する．

(i) Φ は $\mathcal{B}(\mathcal{M}) \otimes \overline{\mathcal{B}(C_0([0,T], \mathbb{R}^d))}^{P^W}$-可測である．

(ii) 各 $m \in \mathcal{M}$ に対し，$\Phi(m, w) = X(m, w)$ P^W-a.s.w が成立する．すなわち $\Phi = (\Phi(m, w)_t)_{0\leq t\leq T}$ は $X = (X(m, w)_t)_{0\leq t\leq T}$ の修正である．

(iii) $V_0, V_1, \ldots, V_d$ が C_L^{k+3} 級であれば, P^W-a.s.w で $t \mapsto \Phi(\bullet, w)_t$ は $C([0,T], \mathrm{Diff}_L^k(\mathcal{M}))$ に属す．したがって Φ は，確率微分方程式 (1.1) に付随する葉を保つ C_L^k 微分同相の確率流と言える．

3　証明の概略

定理 1 については，まず確率微分方程式 (1.1) を各座標近傍内で考えることは，以下の形の確率微分方程式を考えることに対応していることに注意する．

$$dY_t = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(Y_t, z)\, dB_t^j + \sigma_0(Y_t, z)\, dt, \quad Y_0 = y. \tag{3.1}$$

ここで，$\sigma(y,z) = (\sigma_j^i(y,z))$ と $\sigma_0(y,z) = (\sigma_0^i(y,z))$ は $\mathbb{R}^p \times \mathcal{Z}$ 上で定められたそれぞれ $\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^d$ 値と $\mathbb{R}^p$ 値の有界な C_L^k 級写像である．この確率微分方程式 (3.1) に Euclid 空間での一意的な強い解の存在証明と同様の方法を行い，(i) が得られる．(3.1) の解を $Y = (Y(y,z)_t)_{0 \le t \le T}$ で表すと，係数 σ, σ_0 が C_L^k 級であることから，$(y_n, z_n) \to (y,z)$ のとき

$$E\left[\sup_{0 \le t \le T} |Y(y_n, z_n)_t - Y(y,z)_t|^p\right] \to 0$$

となることがわかり，(ii) が示される．

次に定理 2 の証明の概略を述べるために，ラフパス理論のいくつかの基本的な用語と事実を紹介する．確率微分方程式 (1.1) の解は，対応するラフ微分方程式の解と Brown ラフパスの合成の形に表される．ラフパス理論の基本事項は，[4], [5] で得られる．$\Delta = \{(s,t)\colon 0 \le s \le t \le T\}$, $1/3 < \alpha < 1/2$ とし，$T^{(2)}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus (\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ を 2 階の切り捨てテンソル代数とする．0 階が恒等的に 1 の連続写像 $\mathbf{w} = (1, \mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2)\colon \Delta \to T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ が次の性質をみたすとき，$\mathbf{w}$ を α-Hölder ラフパスという．

- 各 $0 \le s \le u \le t \le T$ に対し，
$$\mathbf{w}_{s,t}^1 = \mathbf{w}_{s,u}^1 + \mathbf{w}_{u,t}^1, \quad \mathbf{w}_{s,t}^2 = \mathbf{w}_{s,u}^2 + \mathbf{w}_{u,t}^2 + \mathbf{w}_{s,u}^1 \otimes \mathbf{w}_{u,t}^1.$$
- $\displaystyle \|\mathbf{w}^1\|_\alpha = \sup_{0 \le s < t \le T} \frac{|\mathbf{w}_{s,t}^1|}{(t-s)^\alpha}, \quad \|\mathbf{w}^2\|_{2\alpha} = \sup_{0 \le s < t \le T} \frac{|\mathbf{w}_{s,t}^2|}{(t-s)^{2\alpha}} < \infty.$

以後 0 階の “1” は省略して $\mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2)$ と表す．$\Omega_\alpha([0,T], \mathbb{R}^d)$ を α-Hölder ラフパス全体とし，距離 $d_\alpha(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) = \max_{i=1,2} \|\mathbf{w}^i - \hat{\mathbf{w}}^i\|_{i\alpha}$ を考える．$C_0^{1-\mathrm{Hld}}([0,T], \mathbb{R}^d)$ を 0 出発の $\mathbb{R}^d$ に値をとる Lipschitz 連続なパス全体とする．$w \in C_0^{1-\mathrm{Hld}}([0,T], \mathbb{R}^d)$ に対し，

$$\mathbf{w}_{s,t}^1 = w_t - w_s, \quad \mathbf{w}_{s,t}^2 = \int_s^t (w_u - w_s) \otimes dw_u.$$

と定めると，$\mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2) \in \Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ であることがわかる．この対応 $\mathbf{L}\colon C_0^{1-\mathrm{Hld}}([0,T],\mathbb{R}^d) \ni w \mapsto \mathbf{w} \in \Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ は持ち上げ写像と呼ばれる．したがってラフパスは，パスの差分とパスより定まる反復積分の組を一般化したものと考えることができる．

$$G\Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d) = \overline{\mathbf{L}(C_0^{1-\mathrm{Hld}}([0,T],\mathbb{R}^d))}^{d_\alpha}$$

の元は，α-Hölder 幾何学的ラフパスと呼ばれる．

$\mathbf{w} \in G\Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ に対し，$\mathbf{w}$ によって駆動される $\mathcal{M}$ 上のラフ微分方程式

$$dx_t = \sum_{i=1}^{d} V_i(x_t) d\mathbf{w}_t^i + V_0(x_t)dt \tag{3.2}$$

を考える．ここで $x = (x_t)_{0\le t\le T} \in C([0,T],\mathcal{M})$ がラフ微分方程式 (3.2) の解であるとは，どんな $f \in C_L^3(\mathcal{M})$ と $(s,t) \in \Delta$ に対しても

$$\begin{aligned} f(x_t) - f(x_s) = \sum_{i=1}^{d} V_i f(x_s)\mathbf{w}_{s,t}^{1,i} + \sum_{j,k=1}^{d} V_j V_k f(x_s) \mathbf{w}_{s,t}^{2,jk} \\ + V_0 f(x_s)(t-s) + O(|t-s|^{3\alpha}). \end{aligned}$$

が成立するときをいう．

注意． ラフ微分方程式はいくつかの定式化が存在するが，解が通常のパスであり，葉層付き空間上でも自然に考えられる Davie の定式化と呼ばれる考えをここでは用いる．

定理 2 の証明の概略を説明するために，以下の図式を用いる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{W}(w) \arrow[rr, mapsto, bend left] & G\Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d) \arrow[dr, "(2)"] & (\Phi(m,\mathbf{W}(w))_t)_{0\le t\le T} \\
w \arrow[u, mapsto] & C_0([0,T],\mathbb{R}^d) \arrow[u, "(3)"] \arrow[r, "(1)"'] & C([0,T],\mathcal{M}) \\
& w \arrow[r, mapsto] & (X(m,w)_t)_{0\le t\le T}
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

(1) 定理 1 より，P^W-a.s.w に対し，確率微分方程式 (1.1) の解 $X = (X(m,w)_t)_{0\le t\le T}$ が定まる．

(2) ラフ微分方程式 (3.2) に対して，解が一意的に存在することと，その解は $\mathcal{M}$ 上の葉を保つ C_L^k 微分同相の流れを定めることがわかる．

定理. 各 $m \in \mathcal{M}$ と $\mathbf{w} \in G\Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ に対し，ラフ微分方程式 (3.2) の解 $\Phi = (\Phi(m,\mathbf{w})_t)_{0\le t\le T}$ で $\Phi(m,\mathbf{w})_0 = m$ をみたすものが一意的に存在する．もし $V_0, V_1, \dots, V_d$ が C_L^{k+3} 級であれば，どんな $\mathbf{w} \in G\Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ についても $\Phi(\bullet,\mathbf{w}) \in C([0,T],\mathrm{Diff}_L^k(\mathcal{M}))$ で，写像

$$G\Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d) \ni \mathbf{w} \mapsto \Phi(\bullet,\mathbf{w}) \in C([0,T],\mathrm{Diff}_L^k(\mathcal{M}))$$

は連続になる．

注意.(2-i) $\mathcal{M}$ 上の C_L^k 微分同相の流れを定めることは，ラフパス理論で重要な定理の 1 つである Lyons の連続性定理が証明の鍵となる．

(2-ii) ここでは確率測度 P^W は無関係なことに注意する．ラフパス理論を用いることで，葉層付き空間上の確率流の構成問題において P^W を切り離して考えることができる．

(3) $w \in C_0([0,T],\mathbb{R}^d)$ に対し，$w^{(n)} \in C_0^{1-\ \mathrm{Hld}}([0,T],\mathbb{R}^d)$ を $[0,T]$ の分割 $0 = 0/2^n < T/2^n < \cdots < 2^nT/2^n = T$ による w の折れ線近似とする．P^W-a.s.w に対し，$\{\mathbf{L}(w^{(n)})\}$ は $G\Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ で収束することがわかり，$G\Omega_\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ に値をとる $\overline{\mathcal{B}(C_0([0,T],\mathbb{R}^d))}^{P^W}$ -可測な確率変数

$$\mathbf{W}(w) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{L}(w^{(n)})$$

が定まることが知られており，Brown ラフパスと呼ばれる．

(4) 最後に $m \in \mathcal{M}$ ごとに図式 (3.3) は P^W-a.s. で可換となる．すなわち，各 $m \in \mathcal{M}$ に対して

$$\Phi(m,\mathbf{W}(w)) = X(m,w) \quad P^W\text{-a.s.}w$$

が成り立ち，定理 2 が証明される．

注意. 定理 2 における $\Phi(m,w)$ は正確には $\Phi(m,\mathbf{W}(w))$ である．

以上のように，葉層付き空間上の確率微分方程式の解について，とくにその解が定める確率流の構成においてはラフパス理論が重要な役割を果たす．今後葉層付き空間の様々な確率解析的研究を進める際には，必要に応じてラフパス理論の中で用いられるアイデアを用いることが非常に有効だと考えられる．

参考文献

[1] A. Candel, The harmonic measures of Lucy Garnett. Adv. Math. 176 (2003), 187–247.

[2] A. Candel and L. Conlon, Foliations I, Amer. Math. Soc., Providence, 2000.

[3] A. Candel and L. Conlon, Foliations II, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[4] P. Friz and M. Hairer, A course on rough paths. With an introduction to regularity structures. Springer, 2014.

[5] P. Friz and N. Victoir, Multidimensional stochastic processes as rough paths. Cambridge University Press, 2010.

[6] L. Garnett, Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion. J. Funct. Anal. 51 (1983), 285–311.

[7] Y. Inahama and K. Suzaki, Stochastic flows and rough differential equations on foliated spaces, Bull. Sci. Math. 160 (2020), 102852.

[8] H. Kunita, Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[9] C. C. Moore and C. L. Schochet, Global analysis on foliated spaces 2nd. ed., Cambridge University Press, New York, 2006.

[10] K. Suzaki, An SDE approach to leafwise diffusions on foliated spaces and its applications. Tohoku Math. J. (2) 67 (2015), no. 2, 247–272.