場の理論を用いた非線形ホークス過程の解法

金澤 輝代士

筑波大学システム情報系

Kiyoshi Kanazawa

Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba
Email: kiyoshi@sk.tsukuba.ac.jp

2022 年 12 月 29 日

概要

非線形ホークス過程は自己励起性をモデル化する非マルコフ過程のモデルである．本講演では，既出版の 4 つの論文（K. Kanazawa and D. Sornette, Phys. Rev. Lett. 2020; Phys. Rev. Research 2020; Phys. Rev. Lett. 2021; Phys. Rev. Research 2023）に基づき，場の理論を用いて本モデルを解析的に解く手法を報告した．具体的には，非マルコフ過程を高次元のマルコフ過程（マルコフ確率偏微分方程式）に埋め込み，それに対応するマスター方程式を導出する．最終的にはこのマスター方程式を解くことで， 強度変数の定常分布を解析した．特に定常分布がベキ分布に漸近することに着目し，そのべき指数を様々な非線形ホークス過程に対して分類して導出した．

1　マルコフ過程

確率過程は非常に有用な数学的道具であり，自然現象や社会現象を記述する際によく使われている．確率過程で最も解析ツールが整備されているのはマルコフ過程である．マルコフ過程とは，時間発展が現在の状態変数のみに依存するモデルであり，つまり過去の履歴に強い依存性をもたない現象をモデル化できる．マルコフ過程の標準解法 [1] とは，次の流れだと金澤は理解している：

- 確率微分方程式の標準形に基づき，現象をモデル化する．

- 対応するマスター方程式[*1]を導出する．
- マスター方程式の固有値問題を解くことで，知りたい統計量について解析する．

この手順について簡単に解説しよう．まず確率微分方程式には標準形があり，基本的にドリフト項・拡散項・ジャンプ項でダイナミクスが構成される．例えば，1 変数系の確率微分方程式なら

$$\frac{d\hat{x}_t}{dt} = -a(\hat{x}_t) + b(\hat{x}_t)\cdot\hat{\xi}^{\mathrm{G}} + \hat{\xi}^{\mathrm{P}}_{\lambda(y|\hat{x}_t)} \tag{1}$$

という形になる．ここで $a(\hat{x}_t)$ はドリフト項，$\hat{\xi}^{\mathrm{G}}$ は白色ガウスノイズ，$\hat{\xi}^{\mathrm{P}}_{\lambda(y|\hat{x}_t)}$ は複合ポアソンノイズである．但し，$\lambda(y|\hat{x}_t)$ は $\hat{x}_t$ で条件付けした時の，ジャンプ幅 y のイベントが発生する強度関数である．

ところで確率微分方程式は確率変数のパスをモデル化するが，確率分布の時間発展を記述するのがマスター方程式である．確率微分方程式に対応するマスター方程式が一意に決まるが，統計物理学では解析計算のためにマスター方程式を優先的に扱うことが多い．何故なら，マスター方程式は常に線型方程式になることがわかっているからだ．具体的には確率分布 $P_t(x)$ の時間発展は

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \mathcal{L}P_t(x) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}P_t(x) := \frac{\partial}{\partial x}a(x)P_t(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}b^2(x)P_t(x) + \int_{\infty}^{\infty} dy[\lambda(y|x-y)P_t(x-y) - \lambda(y|x)P_t(x)] \tag{3}$$

と書ける．ここで $\mathcal{L}$ は線形演算子であるため，この固有値問題

$$\mathcal{L}\phi_\mu(x) = -\mu\phi_\mu(x) \tag{4}$$

を解く事とマスター方程式を解析することは等価になる（μ は固有値，ϕ_μ は固有関数）．つまり，確率微分方程式を解くことは，関数空間での「線型代数」の問題を解くことに帰着する．統計物理学では，この「線型代数」の問題をどうやって個別具体的に解くかが議論の焦点になる．その意味で，マルコフ過程に関して標準的な解法は極めて明快に整理することが出来る．

一方で，非マルコフ過程ではどうだろうか？このような標準的な解法は非マルコフ過程では整備されていない．非マルコフ過程の確率微分方程式の標準形はなく，それに対応す

[*1] 物理ではマスター方程式，もしくはフォッカープランク方程式などと呼ばれるが，分野によって呼び方は異なる．コルモゴロフの前進方程式，微分形チャップマン・コルモゴロフ方程式などとも呼ばれる．

るマスター方程式の標準形も存在しない．そこで金澤はこういった「標準的解法」を，非マルコフ過程に対しても確立することを長期的な目標としてきた．本講演ではそのための第一歩として，非線形ホークス過程に着目して上記のプログラムを適用した．

2　非線形ホークス過程

非線形ホークス過程 [2] は次のように定義される：非線形ホークス過程は点過程（point process）と呼ばれるクラスの確率過程であり，イベントの発生をモデル化する．イベントが $[t, t+dt)$ に発生する確率を $\hat{\lambda}_t dt$ と記述する．この $\hat{\lambda}_t$ を強度（intensity）と呼ぶ．非線形ホークス過程では，強度を次の式でモデル化する：

$$\hat{\lambda}_t = g\left(\sum_{i=1}^{\hat{N}_t} \hat{y}_i h(t-\hat{t}_i)\right). \tag{5}$$

但し，g は非負関数，$\hat{N}_t$ は $[0,t)$ での総イベント回数，$\hat{t}_i$ は i 番目のイベント時刻，$\hat{y}_i$ は i 番目のイベントの影響を表す確率変数（マークと呼ばれ，確率分布 $\rho(y)$ に従って独立同分プに生成される），h は記憶を表す関数である．

本モデルは過去のイベント発生時系列 $\{\hat{t}_i\}_i$ に依存して強度が時間発展するため，非マルコフ過程の代表的なモデルである．歴史的には線型ホークス過程 [3, 4, 5] が最初に提案され，社会現象・地震現象などの予測モデルとして使われてきた．更に非線形ホークス過程が文献 [2] で提案され，経済現象等への応用 [6] が議論されている．しかし，非線形ホークス過程は非マルコフ性と非線形性を兼ね備えるため，解析的な性質は特殊なケースを除いて殆ど知られてこなかった．

3　本講演の目標

そこで本講演では，この非線形ホークス過程を解析的に解く手法を，我々の最近の論文 [7, 8, 9, 10] に従って報告した．具体的には非線形ホークス過程にマルコフ埋め込み法を適用した．マルコフ埋め込みとは，変数を必要な数だけ増やすことで非マルコフ過程を高次元のマルコフ過程に変換する手法である．本研究では 1 次元の非マルコフ過程を無限次元の非マルコフ過程に変換した．具体的には，1 次元の場の確率過程を記述する確率偏微分方程式に変換した．このマルコフ確率偏微分方程式に対応する場のマスター方程式を導出した．最後に，場のマスター方程式の固有値問題を解くことで，非線形ホークス過程の強度定常分布の漸近形を調べた．結果，幅広い非線形ホークス過程では強度の定常分布

はベキ分布に従うことが分かった．

本研究結果は，複雑系で遍く観測されるべき則を理解する上で有用だと期待される．また，今後は非線形ホークス過程という具体例を超え，一般の非マルコフ過程を理解する標準解法を開発することが重要だと考えている．

謝辞

本研究は JST さきがけ (No. JPMJPR20M2)，ならびに，科研費 (No. 22H04830) の支援を受けて遂行されました．

参考文献

[1] C.W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods*, 4th ed. (Springer, Berlin, 2009).

[2] P. Brémaud and L. Massoulié, Stability of nonlinear Hawkes processes, Ann. Probab. **24**, 1563 (1996).

[3] A. Hawkes, Point spectra of some mutually exciting point processes, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) **33** (3), 438 (1971).

[4] A. Hawkes, Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes, Biometrika **58** (1), 83 (1971).

[5] A. Hawkes and D. Oakes, A cluster process representation of a self-exciting process, J. Appl. Prob. **11** (3), 493 (1974).

[6] P. Blanc, J. Donier, and J.-P. Bouchaud, Quadratic Hawkes processes for financial prices, Quant. Financ. **17**, 171 (2017).

[7] K. Kanazawa and D. Sornette, Nonuniversal power law distribution of intensities of the self-excited Hawkes process: a field-theoretical approach, Phys. Rev. Lett. **125**, 138301 (2020).

[8] K. Kanazawa and D. Sornette, Field master equation theory of the self-excited Hawkes process, Phys. Rev. Research **2**, 033442 (2020).

[9] K. Kanazawa and D. Sornette, Ubiquitous power law scaling in nonlinear self-excited Hawkes processes, Phys. Rev. Lett. **127**, 188301 (2021).

[10] K. Kanazawa and D. Sornette, Exact asymptotic solutions to nonlinear Hawkes processes: a systematic classification of the steady-state solutions, to appear in Phys. Rev. Research (2023); arXiv:2110.01523 (2021).