ランダム結合カオス系の大自由度極限でのカオス同期現象

京都大学大学院　情報学研究科
梅野　健 (Ken Umeno) [1]

概要

カオスが結合する少数自由度の結合カオス系においてカオス同期現象が起こることが知られており、最近でもその条件が解析的に導出される例などが得られるなど、活発な研究がされてきた。一方、実験系において多自由度の方程式で記述できるレーザーなどでモード同期現象が起こるということが観測されており、この様な多重度系でカオス同期の様な現象が起こるかどうかまたその現象がロバストな現象であるかどうかが未解明であった。本研究では、まずこの問題を調べる動機を記述した後に、ランダム結合系の大自由度極限を考案できるモデルを提示する。その時、このランダム結合系のモデルにおいても、ユニークな極限分布が得られ、カオス同期現象が観測され、カオス同期現象と独立な無限個のカオス力学系の直積で書ける状態との間に相転移現象が起こるという結果が得られた。本報告では、その問題の背景を中心にその主結果 (解析的結果) について概観する。

1　はじめに

ある力学系のパラメーター μ_c を動かしていくと、ある値 μ_c でばらばらのカオスとしてふるまっていたカオス結合系が一斉にカオス同期する様になる。自由度 2 の結合カオス系については完全にそのふるまいを解析することができたが [1]、自由度を大きくするとどうなるのか？そもそもこれは系の状態が質的に異なる状態へ遷移する相転移である。その相転移のふるまい、特に臨界点でのふるまいは解析的に記述できるか？この相転移現象をモデル化し、その安定性も議論したい。実在が証明された顕著な物理現象として**ボース＝アインシュタイン凝縮 (BEC:Bose Einstein Condensation)** が知られている。BEC では無限系でのボース粒子の集合系で温度 T がある臨界温度 T_c 以下になると単一の状態に"凝縮"する。これと同じ様にある巨大な多自由度カオス結合系でその結合係数 ϵ をある転移点 ϵ_c を超えると 1 次元のカオス写像で与えられる一つの状態であるカオス同期現象に"凝縮 (あるいは縮退)"するのではないか？　　この一見、非現実的にも見えるこの問題を理解したい動機は実際、複数存在する。以下説明する。

(**脳とコンピューターのエネルギー効率の問題**)

[1] (chaosken@i.kyoto-u.ac.jp)

人間の脳は、スパコンと比べて 100 万倍から 1000 万倍程度以上のエネルギー効率を持つことが知られているが、何故この様なエネルギー効率を達成しているかのそのメカニズムいんついてはよく解らないことが多い。一つの可能性として、Von Neumann 型のいわゆる通常のコンピューターはメモリを大量に使う様に、エントロピー (情報) 消費型のシステムである。このエントロピー (情報) 消費型の計算システムである限りは、エネルギー消費量を劇的に減らすことは困難である。それを考える上では、エントロピー (消費) を劇的に抑える何か別のカラクリが必要である。ここに、多自由度系 (しかも結合係数はランダム) でカオス同期が起きるか否かを考える動機が存在する。もし仮に多自由度系でカオス同期現象が起これば、転移後では単一の 1 次元カオス系となり、BEC と同じ様に系のエントロピーは劇的に減少する。もちろん脳がこのカオス同期現象を使っているかどうかはいまは仮説ー**カオス同期仮説 (脳 Version)** ーに過ぎないが、この仮説: **カオス同期仮説 (脳 Version)** を具体的なモデルで検証したいというのが一つの主要な研究動機となる。もちろんこのカオス同期現象を使うことにより、カオス同期現象をフル活用した新しいリザーバー計算などの機械学習アルゴリズム (AI) も作ることができるという期待もある。

カオス同期仮説 (脳 Version): 脳は多自由度のランダム結合カオス系で記述でき、カオス同期することでエントロピー (エネルギー) を圧縮する。

(**初期宇宙ブラックホールのエントロピー削減メカニズムの問題**)

初期宇宙は我々の宇宙がどう始まったかという＝我々の起源＝を解明する非常に興味深い問題である。初期宇宙にカオスが深く関わっていることは最近の量子重力や素粒子理論の研究によって解りつつあるが、どうしても未解決な問題がある[2]。これは初期宇宙のブラックホールのエントロピーが何故小さいかを説明できる理論がないという問題である。ここでも、次の仮説＝**カオス同期仮説 (宇宙 Version)** が成り立つと踏まえれば、このエントロピー削減の物理及び数理としてのメカニズム的な背景が理解できる。

カオス同期仮説 (初期宇宙 Version): 初期宇宙は何らかの意味で多自由度の結合カオス系で記述でき、カオス同期が実現されることでエントロピー (エネルギー) を圧縮する。

これらの複数の**カオス同期仮説**を考える理由としては、多自由度カオス力学系で劇的にエントロピー削減を達成するメカニズムとしてはカオス同期現象以外に他に思いつく

[2] これは、京大理学研究科の橋本さん、佐々さんと梅野 (情報) の 3 研究室で、2022 年度にやっていた合同セミナー (カオスセミナー, 京大の SPIRITS プログラム (2022) での懇話会) で梅野がカオス同期の説明をした時に、そこに参加していた素粒子論の院生の指摘によって開眼した問題である。同院生にこの場を借りて感謝したい。

ものがないということにあることから、逆に我々はこのカオス同期現象こそが普遍的にエントロピー削減するメカニズムとして考察する。ランダム結合系を考察する理由は、この大自由度系でのカオス同期現象が特殊な系で起こるのではなく、普遍的な現象であることを示したいという動機から来るものである。

Table 1: 種々のカオス同期仮説 (ϵ: カオス結合定数)

カオス同期仮説のタイプ	$\epsilon \geqq \epsilon_c (> 0)$	$(0 <)\epsilon < \epsilon_c$
カオス同期仮説 (脳 Version)	カオス同期 (エントロピー劇的削減)	カオス非同期
カオス同期仮説 (初期宇宙 Version)	カオス同期 (エントロピー劇的削減)	カオス非同期

また、もう少し抽象論的な動機ー数学的 (確率論) と物理的な動機もある。
(**カオス変数の極限定理、カオス的場の理論の構成の問題**)

ランダムな確率変数 $X_1, \cdots, X_N$ の和の極限については極限分布が存在するならば、無限分解可能分布によって特徴づけられることが知られている。そして更に、

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N}{A_N} - B_N \tag{1}$$

という形の極限の分布は無限分解可能分布のクラスの中の重要なクラスである**安定分布**によって記述されることも知られている [2]。これらの確率論の極限定理である中心極限定理あるいは一般化中心極限定理については、それぞれ安定分布の特殊系であるガウス分布 (中心極限定理)、あるいは安定分布 (一般化中心極限定理) を極限分布として持つことが知られている。

2 安定分布

安定分布 $S(x; \alpha, \beta, \gamma, \mu)$ とは、以下の式で与えられる特性関数 $\phi(t)$ のフーリエ変換

$$S(x; \alpha, \beta, \gamma, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-\mathrm{I}xt} dx \tag{2}$$

で書ける４つのパラメータ $(\alpha, \beta, \gamma, \mu)$ を持つ分布関数である。但し、特性関数 $\phi(t)$ は

$$\phi(t) = \exp\{i\mu t - \gamma^{\alpha}|t|^{\alpha}(1 - i\beta \mathrm{sgn}(t) w(\alpha, t)\} \tag{3}$$

$$w(\alpha, t) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha/2) & \text{if} \quad \alpha \neq 1 \\ -2/\pi \ln |t| & \text{if} \quad \alpha = 1 \end{cases} \tag{4}$$

で与えられる。ここでパラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ はそれぞれ、べき指数、歪度、尺度母数、平均値の意味を持ち、$0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1, \gamma > 0$ である。$\alpha = 2$ の時、$\beta = 0$ の安定分布 S はガウス分布に一致し、$\alpha = 1, \beta = 0$ の時、安定分布 S はコーシー分布に一致する。
条件 (超一般化中心極限定理)[6]

(i) $C_+ > 0, C_- > 0$ がそれぞれ確率分布 $\mathrm{P}_{c_+}(c)$, $\mathrm{P}_{c_-}(c)$ に従う正値確率変数とし、以下の様に平均が存在するとする。

$$\mathrm{E}[C_+] < \infty, \mathrm{E}[C_-] < \infty \tag{5}$$

(ii) 各確率変数 X_i は同一のべき指数 $\alpha(0 < \alpha < 2)$ を持つべき分布であり、その確率密度関数 $f_i(x)$ は、漸近的に

$$f_i(x) \simeq \begin{cases} c_{+i}x^{-(\alpha+1)} & \text{for} \quad x \to \infty \\ c_{-i}|x|^{-(\alpha+1)} & \text{for} \quad x \to -\infty \end{cases} \tag{6}$$

となる。但し、c_{+i},c_{-i} は i 毎に異なるとし、それぞれそれぞれ 1) の確率密度関数 $\mathrm{P}_{c_+}(c)$, $\mathrm{P}_{c_-}(c)$ に従う。この条件の元で以下の定理が成立する。

定理 1 (超一般化中心極限定理,2018[6])

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - A_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \xrightarrow{d} S(x;\alpha,\beta^*,\gamma^*,0) \quad \text{for} \quad n \to \infty. \tag{7}$$

但し、確率変数 X_i は**条件 (超一般化中心極限分布)** を満足する独立な確率変数であり、A_n は X_i の特性関数 $\varphi_i(t) = \mathrm{E}[\exp(\mathrm{I}tX_i)]$ と $\Im Y$: 複素数 Y の虚数部分という定義の下、式

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 < \alpha < 1 \\ n\sum_{i=1}^n \Im \ln(\varphi_i(1/n)) & \text{if} \quad \alpha = 1 \\ \sum_{i=1}^n \mathrm{E}[X_i] & \text{if} \quad 1 < \alpha < 2 \end{cases} \tag{8}$$

で決定され、安定分布のパラメータ β^*,γ^* は,

$$\beta_i = \frac{c_{+i} - c_{-i}}{c_{+i} + c_{-i}}, \gamma_i = \left\{\frac{\pi(c_{+i} + c_{-i})}{2\alpha\sin(\pi\alpha/2)\Gamma(\alpha)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \tag{9}$$

の重み付き平均で、

$$\beta^* = \frac{\mathrm{E}_{C_+,C_-}[\beta_i\gamma_i^\alpha]}{\mathrm{E}_{C_+,C_-}[\gamma_i^\alpha]}, \gamma^* = \{\mathrm{E}_{C_+,C_-}[\gamma_i^\alpha]\}^{\frac{1}{\alpha}} \tag{10}$$

で与えられる。ここで、E_{C_+,C_-} は確率密度関数 f_i の漸近的特性を示すパラメータ C_+,C_- の確率分布 $\mathrm{P}_{c+},\mathrm{P}_{c-}$ に関する平均である。

証明は [6] を参照。

3　安定分布を不変測度として持つカオス写像ーコーシー分布の場合ー

一般化ブール変換 $X' = \alpha X - \beta\dfrac{1}{X} \equiv f(X)$ $(0 < \alpha < 1, \beta > 0)$ の場合、X が尺度母数 γ のコーシー分布に従うとすると、X' も尺度母数 γ', 但し

$$\gamma' = \alpha\gamma + \beta\frac{1}{\gamma} \equiv g(\gamma) \tag{11}$$

のコーシー分布に従うことが判る [5,7]。従って一般化ブール変換のエルゴード的な不変測度 $\mu(dx)$ は

$$\mu(dx) = \frac{\gamma^* dx}{\pi(x^2 + \gamma^*)} \tag{12}$$

となる。ここで γ^* は

$$\gamma^* = g(\gamma^*) = \alpha\gamma^* + \beta\frac{1}{\gamma^*} \tag{13}$$

を満足する不動点となり

$$\gamma^* = \sqrt{\frac{\beta}{1-\alpha}} > 0 \tag{14}$$

である。
さて、一般化ブール変換は混合性を持つことが証明されいる [4]。従って、一般化ブール変換の結合系 (結合カオス系)

$$X' = \alpha X - \beta\frac{1}{X} + \epsilon_1 Y, \quad Y' = \alpha Y - \beta\frac{1}{Y} + \epsilon_2 X \tag{15}$$

の極限分布も、コーシー分布を持つ乱数の和がコーシー分布であるという安定分布性 (尺度母数はそれぞれの尺度母数の和) を持つことから、その結合系の極限分布もコーシー分布となり、X, Y それぞれの極限分布としてのコーシー分布尺度母数 γ_X, γ_Y が以下の連立方程式の解 (セルフコンシスト解) として与えられる [1]。

$$\gamma_X = \alpha\gamma_X + \beta\frac{1}{\gamma_X} + |\epsilon_1|\gamma_Y, \quad \gamma_Y = \alpha\gamma_Y + \beta\frac{1}{\gamma_Y} + |\epsilon_2|\gamma_X \tag{16}$$

文献 [1] は、この一般化ブール変換の結合カオス系の極限分布を以上の様に求め、そこからカオス同期する必要十分条件を求めた。ここではそのランダム結合系への一般化を試みる。

4　ランダム結合カオス写像

ここでは、自由度 2 の結合系から N 個のカオス系が相互にランダムな結合係数 ϵ_i により結合している系を考える。

$$X_i[n+1] = f(X_i[n]) + \frac{K}{N-1}\sum_{i\neq j}^{N} \epsilon_i X_i[n] = \alpha X_i[n] - \beta\frac{1}{X_i[n]} + \frac{K}{N-1}\sum_{i\neq j}^{N} \epsilon_i X_i[n] \quad (17)$$

ここで、$K > 0$ とし、結合係数 ϵ_i の絶対値の期待値は存在する、つまり

$$\langle|\epsilon_i|\rangle \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\epsilon_i| < \infty \quad (18)$$

とする。すると、自由度 2 の相互結合系の場合と同様に、極限分布がコーシー分布の積で書け、各変数 X_i の極限分布コーシー分布の尺度母数を γ_i とすると、超一般化中心極限定理から極限定理も安定分布であるコーシー分布であり、それぞれの尺度母数は以下の N 変数のセルフコンシステントな方程式 (N 個の FP 方程式が結合した系) の解として与えられる。

$$\gamma_i = g(\gamma_i) + \frac{K}{N-1}\sum_{i\neq j}^{N} |\epsilon_i|\gamma_i = \alpha\gamma_i + \beta\frac{1}{\gamma_i} + \frac{K}{N-1}\sum_{i\neq j}^{N} |\epsilon_i|\gamma_i \quad (19)$$

もし、結合係数がランダムでなく定数とすると、つまり $\epsilon_i = \epsilon$ とするとその尺度母数解は、全ての i に対して

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{\beta}{1-\alpha-K|\epsilon|}} \quad (20)$$

と一意に与えられる。

5　大自由度極限

ここでは更に進み、ランダム結合カオス系の大自由度極限 $N \to \infty$ を考える。すると自然にランダム結合定数の絶対値の平均値が以下の通り存在する。

$$\langle|\epsilon|\rangle \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\epsilon_i| < \infty \quad (21)$$

その時の極限分布はコーシー分布の無限積で書け、各変数のコーシー分布の尺度母数は

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{\beta}{1-\alpha-K\langle|\epsilon|\rangle}} \quad (22)$$

で与えられる。つまりランダム結合系の大自由度極限のコーシー分布の尺度母数は結合係数の絶対値の平均値 $\langle|\epsilon|\rangle$ で与えられる。ここで、文献 [3] の可解カオスを f とする例を考える。この時、$\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ であり尺度母数は、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\langle|\epsilon|\rangle K}} \tag{23}$$

となる。ここで尺度母数 γ が存在する条件は

$$0 < \langle|\epsilon|\rangle < \frac{1}{2K} \tag{24}$$

となる。また条件付きリアプノフ指数 λ は、$K = 1$ の時、

$$\lambda = \log(1 - \langle|\epsilon|\rangle + 2\sqrt{1 - 2\langle|\epsilon|\rangle}) \tag{25}$$

で与えられる [6]。但し、この条件付きリアプノフ指数は [1] と同じく、完全同期する場合から η だけずれる場合にその摂動項 η の時間発展の不安定性をエルゴード性から計算したものである (計算方法は [6] 参照。極限分布が与えられるので計算可能)。従って、カオス同期が起こるのは、その条件付きリアプノフ指数 λ が負、つまり

$$\epsilon_c = -1 + \sqrt{2} < \frac{1}{2} \tag{26}$$

に対して、

$$\epsilon_c = -1 + \sqrt{2} < \langle|\epsilon|\rangle < \frac{1}{2} \tag{27}$$

の時、カオス同期が起こる。一方、その臨界値 ϵ_c より結合定数の絶対値の平均値が小さい場合、つまり、

$$0 < \langle|\epsilon|\rangle < \epsilon_c = -1 + \sqrt{2} \tag{28}$$

の時はカオス同期が起こらず、N 個 (実際には無限大) のカオスがあたかも独立なカオスの集まりの様に振る舞う。つまり $N \to \infty$ でカオス同期ーカオス非同期の相転移が起こり、その臨界点は

$$\langle|\epsilon|\rangle = \epsilon_c = -1 + \sqrt{2} \tag{29}$$

となる。

6 議論

本結果は、おそらくランダムなカオス結合系でその極限を明示的に与えた初めての解析結果の速報となる。大自由度結合形ではランダムな結合係数で結合される場合、そのランダ

ムさ故にカオス同期が容易に起きにくい状況となるが、その大自由度極限 $N \to \infty$ を考えた時に、カオス同期状態が達成される状態が生じ、カオス非同期ーカオス同期の相転移が起きることが分かった。これは Lee-Yang の分配関数 $(N \to \infty)$ の零点の解析的性質から相転移の性質が解るのと似ていて、条件付きリアプノフ指数 λ の零点が臨界点の構造を与える。このランダム結合系の大自由度極限のカオス同期状態というのは、その構成 (ランダム結合系) 故に**構造安定**であることが解る。つまり、物性の相転移と同じで、$N \to \infty$ で初めてカオス同期 v.s. カオス非同期の相転移が起き、その相転移の構造は安定的である。また、実際のシミュレーションでは有限の N ですることとなり、その場合は完全に同期することがなく、準同期の様な現象 (だいたいの変数が同期している) ことが観察されている。これは講演会で見せた通りである。その意味で実際のランダム系でカオス同期が起こるかどうかは物性の相転移と同じく本質的に $N \to \infty$ か有限系かの違いによる。これについては、今後の課題となる。少なくとも、エントロピーが劇的に現象するカオス同期現象がランダム系の無限大の極限で実現できるという命題は真であることを具体例を構成し示した。同様にカオスを基礎とする場の理論 (この場合は隣接のみ結合する) においても同様のカオス同期ーカオス非同期の相転移が現れることが示されているが、それについては、また別の機会に発表したい。いずれにしても、カオス同期ーカオス非同期というのがある多自由度カオス力学系の普遍的な相転移現象であることが見て取れる。これと脳とどう関係あるかは非自明であるが、脳は有限系というよりはどちらかというと非常に大きな自由度をもつ無限系で良く近似できることを考えると、このカオス同期ーカオス非同期相転移現象のロバスト性から脳にも起こっており、カオス同期が実現した時にエントロピーが激減し、著しい高いエネルギー効率が実現できることになる。少なくともこの多自由度系のカオス同期は、エントロピーを激減させるメカニズムであり、このカオス同期以外にエントロピーを激減させる機構は著者には不明であるのである。ここ (ランダム結合系のカオス同期と脳の省エネ計算との関係) については、今後の研究を更に進めていかなければいけない部分だと考えている。

References

[1] T. Kano and K. Umeno, "Chaotic synchronization of mutually coupled systems-arbitrary proportional linear relation", *Chaos*, **32**, 113137 (2022).

[2] B.V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, "Limit Distributions For Sums of Independent Random Variables", (Addison-Wesley, 1954)

[3] Ken Umeno, "Superposition of chaotic processes with convergence to Levy's stable law", *Physical Review* E **58**,pp.2644-2647 (1998).

[4] Ken Umeno and Ken-ichi Okubo, "Exact Lyapunov exponents of the generalized Boole transformations", *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Volume 2016, Issue 2, 021A01 (2016).

[5] Ken Umeno, "Ergodic Transformations on R preserving Cauchy laws", *NOLTA, IEICE*, **7**,pp. 14-20(2016).

[6] Masaru Shintani and Ken Umeno, "Super Generalized Central Limit Theorem Limit Distributions for Sums of Non-identical Random Variables with Power Laws", *J. Phys. Soc. Jpn.* (Letters) vol. **87**, 043003 (2018).

[7] Masaru Shintani and Ken Umeno, "Conditional Lyapunov exponent criteria in terms of ergodic theory", *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Volume 2018, Issue 1, 013A01 (2018).