Generalized uniform laws for occupation times of intermittent maps

世良 透
大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Toru Sera
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University

中立不動点を持つ間欠写像力学系について，様々な長時間挙動が研究されてきた．本稿では，先行研究の一つとして Thaler の一般化逆正弦法則を述べる．その後に本稿の主題である一般化一様法則を述べる．前者は条件付けのない分布極限定理であるのに対し，後者はピン留め条件を課した際の分布極限定理である．後者の結果は Jon Aaronson 氏との共同研究に基づくものである．

まず間欠写像力学系の設定を述べる．$0 < \alpha < 1$ とする (したがって $1 + 1/\alpha > 2$)．写像 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ を次で定める：

$$f(x) = \begin{cases} x + 2^{1/\alpha} x^{1+1/\alpha}, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - f(1 - x) & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$x = 0, 1$ は f の中立不動点である．我々は，f の反復作用による力学系の軌道 $(x, f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots)$ の長時間挙動に興味がある．

基本的な性質を述べよう．以下が成り立つ：

- ルベーグ測度と同値でエルゴード的な f-不変測度 μ が存在．定数倍を無視するとただ一つ．
- $A_0, A_1 \subset [0, 1]$ をそれぞれ点 $0, 1$ の適当な近傍で $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ とし，$Y = [0, 1] \setminus (A_0 \cup A_1)$ とする．このとき

  $$\mu(A_0) = \mu(A_1) = \infty, \quad 0 < \mu(Y) < \infty.$$

  以下では改めて正規化することで $\mu(Y) = 1$ とする．
- $i \neq j$ に対し $f(A_i) \cap A_j = \emptyset$．力学系が A_i から A_j へ移る際途中で Y を経由．(分離性)
- Y を訪れる度に力学系は過去の情報を部分的に忘れる．(更新性)
- $A \subset [0, 1]$ をルベーグ測度正の集合とする．ほとんど全ての初期点 x に関し，軌道 $(x, f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots)$ は A を無限回訪れる (再帰性).

間欠写像力学系の滞在時間の長時間挙動について考える．

$$S_n^A(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{f^k(x) \in A\}}$$

と置く．つまり $S_n^A(x)$ は，初期点 x の下で時刻 n までに力学系が A を滞在した時間の総数である．上述の基本性質と無限エルゴード理論により，次が分かる：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(S_n^{A_0}(x) + S_n^{A_1}(x)) = 1, \quad \text{a.e. } x.$$

つまり力学系はほとんどの時間，0 と 1 の近傍に滞在している．統計物理において，力学系が $A_0 \cup A_1$ に滞在している場合は長期的な安定状態 (層流状態)，Y に滞在している場合は間欠的な不安定状態 (乱流状態) と見なされる．このような事情から，この力学系は間欠写像力学系と呼ばれるのである．

それでは，$n \to \infty$ の下で $S_n^{A_0}(x)/n$ はどのような振る舞いをするだろうか？この問題に分布極限の意味で解答を与えたのが，以下の Thaler の一般化逆正弦法則である：

定理 A. (Thaler [8]) $[0,1]$ 上の任意の絶対連続な確率測度 ν に対し，

$$\nu\left[x \in [0,1] : \frac{S_n^{A_0}(x)}{n} \in \cdot\right] \overset{\text{weakly}}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left[\frac{\xi_0}{\xi_0+\xi_1} \in \cdot\right], \quad \text{as } n \to \infty.$$

ただし，$\overset{\text{weakly}}{\longrightarrow}$ は確率測度の弱収束を意味する．また ξ_0, ξ_1 は独立同分布な正値確率変数で，ラプラス変換が

$$\mathbb{E}[\exp(-\lambda \xi_j)] = \exp(-\lambda^\alpha/2), \quad \lambda > 0,$$

となるものである (つまり片側 α-安定分布に従う)．

この定理に現れる極限分布は Lamperti の一般化逆正弦分布と呼ばれるものの一種であり，$\alpha = 1/2$ の場合は通常の逆正弦分布に一致する．Lamperti の一般化逆正弦分布は，ある種の更新過程や一次元拡散過程の滞在時間の極限分布としても現れることが知られている [5, 3, 9, 12]．

$S_n^{A_0}(x)$ だけでなく，$S_n^Y(x)$ も含めた長時間挙動についても様々な極限定理が成り立つ．例えば次のことが成り立つ：

定理 B (S.[7])**.** 適当な定数 $C > 0$ をとると，

$$\nu\left[x \in [0,1] : \left(\frac{S_n^{A_0}(x)}{n}, \frac{S_n^Y(x)}{Cn^\alpha}\right) \in \cdot\right] \overset{\text{weakly}}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left[\left(\frac{\xi_0}{\xi_0+\xi_1}, \frac{1}{(\xi_0+\xi_1)^\alpha}\right) \in \cdot\right], \quad \text{as } n \to \infty.$$

この定理で第一成分のみ取り出したものは定理 A に他ならない．また第二成分のみ取り出したものは [7] 以前に Aaronson [1] により得られている．極限分布の第二成分は Mittag-Leffler 分布と呼ばれ，Bessel 拡散過程の原点局所時間の分布などにも現れる [3]．

次にピン留め条件とは何かということを説明する．$p \in (0,1/2)$ を写像 f の 2 周期点とする．技術的な理由により，以下 $A_0 = [0,p], Y = (p, f(p)), A_1 = [f(p), 1]$ の場合のみ考える．また初期分布 ν はリーマン積分可能な確率密度を持ち，かつ $\mathrm{supp}(\nu) \subset (0,1)$ とする．このとき次が成り立つ：

定理 C. (Gouëzel [4], Melbourne–Terhesiu [6]) 適当な $C' > 0$ が存在して，測度 0 でない可測集合 $A \subset Y$ に対し

$$\nu[f^{-n}(A)] \sim C'\mu(A)n^{-1+\alpha}, \quad \text{as } n \to \infty,$$

が成り立つ.

定理 C は,「時刻 n において力学系が間欠的な不安定状態になる確率」が n に関してべき的に減衰する，ということを主張している．この「時刻 n において力学系が間欠的な不安定状態になる」という条件をピン留め条件と呼ぶことにする.

ピン留め条件下での滞在時間の極限定理を述べよう．$\nu[A|B] = \nu(A \cap B)/\nu(B)$ は条件 B の下で A が生起する条件付き確率を表す.

定理 D. (Aaronson–S., in preparation)

$$\begin{aligned} &\nu\left[x \in [0,1] \ : \ \left(\frac{S_n^{A_0}(x)}{n}, \frac{S_n^Y(x)}{Cn^\alpha}\right) \in \cdot \,\middle|\, f^{-n}(A)\right] \\ &\overset{\text{weakly}}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\left(\frac{\xi_0}{\xi_0+\xi_1}, \frac{1}{(\xi_0+\xi_1)^\alpha}\right) \in \cdot\right\}} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\xi_0+\xi_1)^\alpha}\right], \end{aligned}$$

極限分布は原点から原点へのピン留め Bessel 拡散過程などの正側滞在時間，原点局所時間の結合分布としても現れる [10, 3, 11]．この定理で第二成分のみに制限したものは，既に [2] により得られている．極限分布の第一成分は $[0,1]$ 上の一様分布を一般化したものと言える．$\alpha = 1/2$ の場合は通常の一様分布に一致する.

参考文献

[1] J. Aaronson. Random f-expansions. *Ann. Probab.*, 14(3):1037–1057, 1986.

[2] J. Aaronson and T. Sera. Tied-down occupation times of infinite ergodic transformations. available at arXiv:1910.09846.

[3] M. Barlow, J. Pitman, and M. Yor. Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 294–314. Springer, Berlin, 1989.

[4] S. Gouëzel. Correlation asymptotics from large deviations in dynamical systems with infinite measure. *Colloq. Math.*, 125(2):193–212, 2011.

[5] J. Lamperti. An occupation time theorem for a class of stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:380–387, 1958.

[6] I. Melbourne and D. Terhesiu. Operator renewal theory and mixing rates for dynamical systems with infinite measure. *Invent. Math.*, 189(1):61–110, 2012.

[7] T. Sera. Functional limit theorem for occupation time processes of intermittent maps. *Nonlinearity*, 33(3):1183–1217, 2020.

[8] M. Thaler. A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(4):1289–1312, 2002.

[9] S. Watanabe. Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks. In *Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993)*, volume 57 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 157–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[10] J. G. Wendel. Zero-free intervals of semi-stable Markov processes. *Math. Scand.*, 14:21–34, 1964.

[11] Y. Yano. On the occupation time on the half line of pinned diffusion processes. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(3):787–802, 2006.

[12] Y. Yano. On the joint law of the occupation times for a diffusion process on multiray. *J. Theoret. Probab.*, 30(2):490–509, 2017.