線形空間上の位相構造の束とアフィン，射影幾何学の基本定理について

大阪大学・大学院理学研究科数学専攻
青山　昂頌
Takanobu Aoyama
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

概 要

本稿の目的は [1] における，線形空間上の位相構造の束の剛性定理の証明の背後にアフィン幾何の基本定理があったことを報告し，さらに類似の剛性に関する疑問に関しては射影幾何の基本定理が適用できることを紹介することである．詳しくは [3] を参照されたい．

1　導入

本稿では，K, L はそれぞれハウスドルフな位相体とし，X, Y はそれぞれ K 上，L 上の線形空間を表すとする．線形位相とは，位相体上の線形空間に定まる位相のうち，スカラー倍と加法を連続にする位相の事である．すなわち K 上の線形空間 X 上の位相で

$$\text{スカラー倍} : K \times X \to X, \qquad \text{加法} : X \times X \to X$$

が連続となるものを（X 上の）線形位相と呼び，線形位相が与えられた線形空間を位相線形空間と呼ぶ．関数解析に見られるように，$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ のようなハウスドルフな位相体 K 上の線形空間 X が与えられたとき，X に定まる線形位相は一意的には定まらず，扱う問題によって適切な位相が異なることがある．X 上の定まる線形位相をすべて集めた $\tau_K(X)$ が興味の

対象となる．この集合に位相の強弱（包含関係）を与えた半順序集合は完備束となることが知られている．すなわち，任意の $\tau_K(X)$ の部分集合に対して上限と下限が存在する．とくに，$\tau_K(X)$ は各 2 元に対応して上限と下限が定まる 2 項演算を備えた束構造と呼ばれる代数系となる．また，線形位相とは限らず，X に定まるすべての位相を集めた集合 $\Sigma(X)$ も同様に包含関係により，完備束となることが知られている（[5]）．このとき，以下の剛性定理が得られた[1] ：

定理 1.1. $\dim_K(X) \geq 2$ とする．束同型 $\Phi : \Sigma(X) \to \Sigma(Y)$ であって，$\Phi(\tau_K(X)) = \tau_L(Y)$ を満たすとき，位相体の同型 $\psi : K \to L$ と ψ-半線形同型 $\phi : X \to Y$ および $y_0 \in Y$ がとれて，以下を満たす．

- $|X| = \infty$ のとき，$\Phi = (\phi + y_0)_*$ となる．
- $|X| < \infty$ のとき，$\Phi = (\phi + y_0)_*$ または $\Phi = C \circ (\phi + y_0)_*$ となる．

ここで，ψ-半線形同型 $\phi : X \to Y$ とは，スカラー倍を ψ で捻った線形同型，すなわち加法を保つ全単射 ϕ で，$\phi(\alpha \cdot x) = \psi(\alpha) \cdot \phi(x)$ を満たすもののことであり，写像 $f : X \to Y$ と X 上の位相 $T \in \Sigma(X)$ に対して $f_*(T)$ は

$$\{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in T\}$$

で定められる位相である．また，Y が有限集合のときに $C : \Sigma(Y) \to \Sigma(Y)$ は $T' \in \Sigma(Y)$ に対して

$$\{Y \setminus V \mid V \in T'\}$$

で定められる位相を与える束自己同型である．

系 1.2. 定理 *1.1* と同様の仮定を満たす束同型があれば，位相体 K, L は同型であり，X と Y は同じ次元となる．

系 1.2 の仮定を弱めて，束同型 $\Phi : \tau_K(X) \to \tau_L(Y)$ の存在のみでは同様の結論は得られないことが次の例でわかる（[2]）．

例 1.3. 通常の絶対値による位相を与えた実数体 $\mathbb{R}$ を K とし，相対位相を有理数体 $\mathbb{Q}$ に与えたものを L とする．$X = K^2$, $Y = L^2$ として，$\tau_K(X)$ と $\tau_L(Y)$ は束同型となる．

[1] 本結果は講究録 [1] が出版された研究集会「変換群論の新展開」で発表した定理であるが，そのときに与えた証明は後に述べる事実 1 を知らず，直接証明するものであった．

この例では [6] にあるように X にはハウスドルフな線形位相が唯一つなのに対し，[2] において Y には非同型なハウスドルフな位相が不可算個存在することが示されている．そこでさらに，主張の Φ が X のハウスドルフ線形位相全体 $\tau_K^H(X)$ を Y のハウスドルフ線形位相全体 $\tau_L^H(Y)$ へ写すことを要請することで，次の結果を得る：

定理 1.4. $\dim_K(X) \geq 3$ であるとする．束同型 $\Phi : \tau_K(X) \to \tau_L(Y)$ であって，$\Phi(\tau_K^H(X)) = \tau_L^H(Y)$ を満たすものが存在するとき，K と L は代数的に体同型であり，X と Y は同じ次元となる．

注意 1.5. 定理 *1.4* の結論の K, L 間の体同型は同相写像とは限らない．実際，K を通常の複素数体 $\mathbb{C}$ とし，L を p-進数体の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の完備化 $\mathbb{C}_p$ とすれば，K と L は体同型ではあるが，いかなる体同型でも同相とはならない．他方で $X = K^3, Y = L^3$ としたときの線形位相の束は，それぞれ K^3, L^3 の線形部分空間全体からなる束と同型であることが知られているから（[2, 9]），$\tau_K(X)$ と $\tau_L(Y)$ は束同型である．さらに，[6] にあるように X, Y のハウスドルフな線形位相は唯一つ，$\tau_K(X), \tau_L(Y)$ の最大元のみであるので，あらゆる束同型で移り合う．

2　アフィン，射影幾何の基本定理

このセクションでは，証明の核となるアフィン，射影幾何の基本定理を紹介する．アフィン，射影幾何は線形空間を用いてモデルが作られるが，そこから得られる幾何学は，その線形空間特有のものであることを主張するのがこれらの定理である．まず，線形空間の 2 つの部分集合 A_1, A_2 が平行な 2 直線であるとは，1-次元線形部分空間 l と 2 点 p_1, p_2 がとれて，$A_1 = l + p_1,\ A_2 = l + p_2$ と表されることと定める．このとき，アフィン幾何の基本定理は以下のように述べられる．

事実 1 (アフィン幾何の基本定理). $\dim_K(X) \geq 2$ として，X から Y への全単射 $\phi : X \to Y$ が，X の平行な *2* 直線を Y の平行な *2* 直線に写すとする．このとき，体同型 $\psi : K \to L$ と $y_0 \in Y$ がとれて，ϕ は ψ-半線形同型と y_0 による平行移動の合成により表される．

[8] における主張は $K = L, X = Y$ の場合であるが，証明はそうとは限らない場合でも同様である．

次に射影幾何の基本定理を述べる．これは線形空間 X の部分空間全体や Y の部分空間全体をそれぞれ $\sigma_K(X), \sigma_L(Y)$ としたとき，包含関係 $\subset$ による半順序付けを行えば，束となることがわかる．その束構造が元の線形空間を決定するというものである．

事実 2 (射影幾何の基本定理)**.** $\dim_K(X) \geq 3$ として，束同型写像 $\Phi : \sigma_K(X) \to \sigma_L(Y)$ はある半線形同型 $\phi : X \to Y$ から得られる．すなわち，各部分空間 $S \subset X$ に対して，$\Phi(S)$ は S の ϕ による像 $\phi(S)$ と一致する．

注意 2.1. 証明は [4] によるが，この証明は有限次元の部分空間からなる $\sigma_K(X), \sigma_L(Y)$ の部分束間の同型写像という仮定だけでも同様の結論が成り立つ．

これらの幾何の基本定理は，全単射の仮定を緩めたり，線形空間以外の代数でも類似の結果が得られることが知られており，研究が続いている．

3 証明の概要

本節では，定理 1.1 と定理 1.4 の幾何の基本定理を用いた証明の概要を説明する．詳しくは [3] を参照されたい．幾何の基本定理を用いるためには，位相と部分空間を結びつける必要がある．

定義 3.1. K 上の線形空間 X に対して，写像 $\mathfrak{S}_X : \tau_K(X) \to \sigma_K(X)$ と $\mathfrak{T}_X : \sigma_K(X) \to \tau_K(X)$ をそれぞれ以下で定める．

$$\mathfrak{S}_X(T) = \bigcap_{0 \in U \in T} U,$$
$$\mathfrak{T}_X(S) = \{U \mid U + S = U \in T_K^{\max}(X)\},$$

ここで，$T_K^{\max}(X)$ は $\tau_K(X)$ における最大元である．

$\mathfrak{S}_X(T)$ は T において原点と位相的に区別できない点の集合であり，$\mathfrak{T}_X(S)$ は S 方向に平行移動不変な開集合からなる位相を与えている．

注意 3.2. 写像 $\mathfrak{S}_X, \mathfrak{T}_X$ は $(\tau_K(X), \subset)$ と $(\sigma_K(X), \subset)$ の間のガロア接続となっている．
ここで，*2* つの半順序集合 $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ と $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$ の間の写像の組 (f, g) がガロア接続であるとは，$f : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ と $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{P}$ は順序を逆転させ，

$$p \leq_{\mathbb{P}} g(q) \Leftrightarrow q \leq_{\mathbb{Q}} f(p)$$

が $p \in \mathbb{P}, q \in \mathbb{Q}$ に対して成り立つことである．

[**定理 1.1 の証明の概要**] まず，位相構造の束の間の同型写像は全単射から誘導されるという次の結果が使える．

事実 3 (J.Hartmanis[7])**.** $\Phi : \Sigma(X) \to \Sigma(Y)$ を束同型とするとき，全単射 $\phi : X \to Y$ で次を満たすものが唯一存在する．

- $|X| = 1, 2$ または ∞ のとき，$\Phi = \phi_*$ となる．
- $|X| = 3, 4, \cdots < \infty$ のとき，$\Phi = \phi_*$ または $\Phi = C \circ \phi_*$ となる．

定理の仮定の束同型 Φ に対して全単射 ϕ をとり，$\Phi = \phi_*$ となっているときを考える．平行移動によって，原点を固定するとしてよい．このとき，$\mathfrak{S}_Y(\phi_*(T))$ が $\phi(\mathfrak{S}_X(T))$ となることがわかり，$\sigma_K(X), \sigma_L(Y)$ は ϕ によって束同型となる．とくに X の 1 次元部分空間は Y の 1 次元部分空間へと ϕ によって写される．位相線形空間 (X, T) は平行移動が同相写像であることから，原点以外の点 $x \in X$ は $\mathfrak{S}_X(T) + x$ が位相的に区別できない点である．ゆえに，$(Y, \phi_*(T))$ においては $\phi(\mathfrak{S}_Y(T)) + \phi(x)$ が $\phi(x)$ と位相的に区別できない点となる．よって，ϕ は平行な直線を平行な直線へと写すので，アフィン幾何の基本定理が適用できる．$\Phi = C \circ \phi_*$ の場合は，$C \circ \Phi = \phi_*$ を前の議論に適用することで示される．最後に，$\psi : K \to L$ の同相性は，0 ではない $x_0 \in X$ を 1 つとると，X と Y の 1 次元部分空間 $\langle x_0 \rangle$ と $\langle \phi(x_0) \rangle$ にそれぞれ $T_K^{\max}(X), T_L^{\max}(Y)$ の相対位相を与えたものは ϕ によって同相であり，さらに，それぞれ x_0 と $\phi(x_0)$ の係数をみることで K, L と位相線形空間として同型となる．この同一視が $\psi : K \to L$ に他ならないので，ψ は同相となる．

[**定理 1.4 の証明の概要**] 2 つの写像 F, G を以下のように合成で定義する．

$$F : \sigma_K(X) \overset{\mathfrak{T}_X}{\to} \tau_K(X) \overset{\Phi}{\to} \tau_L(Y) \overset{\mathfrak{S}_Y}{\to} \sigma_L(Y),$$
$$G : \sigma_L(Y) \overset{\mathfrak{T}_Y}{\to} \tau_L(Y) \overset{\Phi^{-1}}{\to} \tau_K(X) \overset{\mathfrak{S}_X}{\to} \sigma_K(X).$$

$F \circ G(S) \subset S, G \circ F(S') \subset S'$ が成り立つことと，線形位相 T がハウスドルフであることは $\mathfrak{S}(T)$ が 0 次元であることが同値であることを用いると，F, G が有限次元部分空間全体の間の同型写像となることが次元の帰納法で示される．これより，事実 2 が適用できて，定理 1.4 の帰結を得る．

4 問題

定理 1.1 や定理 1.4 は 2 つの線形空間を比べたものであったが，1 つの線形空間 X に対して，係数体や次元を求める方法を探りたい．すなわち，完備束 $(\Sigma, \leq)$ と部分集合 τ であって，$(\tau, \leq)$ が完備束である組 (Σ, τ) が与えられたとき，ある K 上の線形空間 X から得られる $(\Sigma(X), \tau_K(X))$ と束同型となる条件や，そのときの K や X を Σ, τ から求める方法を探る．

参考文献

[1] Aoyama, T., *On lattice isomorphisms between lattice of topologies on linear spaces*, RIMS Kôkyûroku 2199 (2021), 34–41.

[2] Aoyama, T., *The Canonical Lattice Isomorphism between Topologies Compatible with a Linear Space and Subspaces*, Tsukuba J. Math. **47** (2023), no. 1, 41–64.

[3] Aoyama, T., *On the Rigidity of Lattices of Topologies on Vector Spaces*, to appear in Order, Springer.

[4] Bael, R., *Linear Algebra and Projective Geometry*, Dover Publications, New York, 2005.

[5] Birkhoff, G., *On the combination of topologies*, Fund. Math. **26** (1936), 156–166.

[6] Bourbaki, N., *Topological Vector Spaces*, 1981. (French) (English translated version: *Topological Vector Spaces Chapter 1-5*, Translated by H. G. Eggleton, S. Madan, 1987, Springer-Verlag.)

[7] Hartmanis, J., *On the lattice of topologies*, Canadian J. Math. **10** (1958), 547–553.

[8] Scherk, P., *On the fundamental theorem of affine geometry*, Canad. Math. Bull. **5** (1962), 67–69.

[9] Steiner, E. F., *On finite dimensional linear topological spaces*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 34–35.