

分解可能連続体に関するいくつかの定理について

鹿児島国際大学・経済学部 今村 隼人

Hayato Imamura

The International University of Kagoshima

島根大学・学術研究院理工学系 松橋 英市

Eiichi Matsushashi

Shimane University

島根大学・学術研究院理工学系 大島 慶之

Yoshiyuki Oshima

Shimane University

1 Janiszewski 連続体と関連する結果

コンパクト連結距離空間のことを連続体という。連続体は、2点以上含むとき、非退化であるという。 X の部分連続体全体を $C(X)$ と表す。連続体は、それが2つの真に小さい部分連続体の和として表せるとき、分解可能であるという。距離空間 (X, d) の部分集合 $A \subset X$ に対して、 A の直径を $\text{diam}A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ とする。連続体 X が弧状であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して連続全射 $f: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して、任意の $t \in [0, 1]$ に対して $\text{diam}f^{-1}(t) < \varepsilon$ を満たすときにいう。連続体 X が遺伝的分解可能であるとは、任意の部分連続体が分解可能であるときにいう。単位閉区間 $[0, 1]$ に同相な空間を弧という。

1912年、Janiszewski は次のように直感に反する連続体を構成している。

定理 1.1 ([3]). 弧状かつ遺伝的分解可能連続体であり、弧を含まないものが存在する。

この結果よりも強い結果や関連する結果があるので、いくつか定義を述べる。

定義 1.2. 連続体 X が **Wilder** 連続体であるとは, 互いに相異なる任意の $x, y, z \in X$ に対して, ある $K \in C(X)$ が存在して $x \in K$ をみたし, $y \in K$ あるいは $z \in K$ の一方のみ成り立つときにいう.

定義 1.3. 連続体 X が D -連続体であるとは, 交わりを持たない非退化な任意の $A, B \in C(X)$ に対して, A とも B とも交わりを持つような $C \in C(X)$ が存在して, C が A または B を覆わないときにいう.

定義 1.4. 連続体 X が D^* -連続体であるとは, 交わりを持たない非退化な任意の $A, B \in C(X)$ に対して, A とも B とも交わりを持つような $C \in C(X)$ が存在して, C が A も B も覆わないときにいう.

定義 1.5. 連続体 X が D^{**} -連続体であるとは, 交わりを持たない非退化な任意の $A, B \in C(X)$ に対して, A とも B とも交わりを持つような $C \in C(X)$ が存在して, C が B を覆わないときにいう.

Wilder 連続体はもともと Wilder によって C -連続体という名称で導入されたものである ([4], [7]). また, D -連続体は Lončar によって導入された ([5]). Wilder 連続体と D -連続体はいずれも弧状連結性の一般化である. Wilder 連続体および D^* -連続体は D^{**} -連続体である. また, D^{**} -連続体は D -連続体であり, D -連続体は分解可能である.

2020 年, Espinoza および松橋が次を示している.

定理 1.6 ([1]). 弧状かつ遺伝的分解可能連続体であり, D -連続体を含まないものが存在する.

弧は D -連続体だから, この結果は先ほどの Janiszewski の結果よりも強い.

定義 1.7. 連続体 X が遺伝的弧状連結であるとは, 任意の部分連続体が弧状連結であるときにいう. 同様に, 遺伝的 **Wilder** 連続体, 遺伝的 D -連続体, 遺伝的 D^* -連続体, 遺伝的 D^{**} -連続体を定義する.

定理 1.8 ([1]). 弧状かつ遺伝的 D -連続体であり, D^* -連続体を含まないものが存在する.

このとき、遺伝的 D^{**} -連続体であり D^* -連続体を含まないものは存在するか、という問いは自然である。この問いに対する解答は次の結果から否定的である。

定理 1.9 ([6]). 非退化連続体 X に対して、次の4条件は同値である。

- (1) X は遺伝的 Wilder 連続体,
- (2) X は遺伝的 D^* -連続体,
- (3) X は遺伝的 D^{**} -連続体,
- (4) X は遺伝的弧状連結連続体.

しかし、我々は次の結果を得ることができた。

定理 1.10 ([2]). D^{**} -連続体であり、Wilder 連続体も D^* -連続体も含まないものが存在する。

参考文献

- [1] B. Espinoza and E. Matsushashi, *D-continua, D^* -continua and Wilder continua*, Topology Appl., **285** (2020), 25pp.
- [2] H. Imamura, E. Matsushashi, and Y. Oshima, *Some theorems on decomposable continua*, preprint.
- [3] J. Janiszewski, *Über die Begriffe “Linie” und “Fläche”*, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians II, Cambridge (1912), 126-128.
- [4] K. Królicki and P. Krupski, *Wilder continua and their subfamilies as coanalytic absorbers*, Topology Appl., **220** (2017), 146-151.
- [5] I. Lončar, *Whitney map for hyperspaces of continua with the property of Kelley*, JP Jour. Geometry and Topology, **4** (2004), no. 2, 147-156.
- [6] E. Matsushashi and Y. Oshima, *Some decomposable continua and Whitney levels of their hyperspaces*, Topology Appl., **326** (2023), 9p.
- [7] B. E. Wilder, *Concerning point sets with a special connectedness property*, Colloq. Math., **19** (1968), 221-224.