

# GeoGebra Classroom を用いた実験数学教材の検討

-ヴァンオーベルの定理を題材にした探究活動を通して-

A Study of Experimental Mathematics Teaching Materials Using GeoGebra  
Classroom

-Through an Inquiry Activity on Van Aubel's Theorem-

市川学園 市川中学校・市川高等学校 松本 昌也\*<sup>1</sup>

Masaya MATSUMOTO, Ichikawa Gakuen Ichikawa Junior & Senior High School

東京理科大学 理学部 数学科 清水 克彦

Katsuhiko SHIMIZU, Department of Mathematics, College of Science, Tokyo University of Science

## ABSTRACT

The purpose of this study is to verify the effectiveness of GeoGebra Classroom in experimental mathematics in mathematics education. For this purpose, we used GeoGebra Classroom to teach experimental mathematics material based on Van Aubel's theorem to first-year junior high school students. The results showed that GeoGebra Classroom “students to conduct inquiry activities even if they have no experience using GeoGebra,” “an effective tool for experimental mathematics because it allows students to record concrete figures on worksheets,” and “an experimental mathematics approach to generalized and extended conjectures. and that it can deepen the inquiry”.

キーワード: GeoGebra Classroom ・ ヴァンオーベルの定理 ・ 実験数学

## 1 はじめに

現在, 中学校数学科では, 数量や図形などの性質を統合的・発展的に考察する力の育成が重要視されている [9, p.20]. 統合的・発展的に考察する力を育成する 1 つの授業として, テクノロジーを用いた実験数学がある. 実験数学とは「数学的対象に対して, 帰納的にデータを集め, 観測することで規則性を推測し, さらにその推測が一般に成り立つのかを (必要に応じてテクノロジーを用いて) さらなる具体例をもとに検討する活動」である [3, p.18]. これは, 山本 [10], 小池 [7] の定義をもとに, G.Polya[12] の支持的接触に当たる実験

---

\*<sup>1</sup> masaya.matsumoto@ichigak-net.ed.jp

を強調した定義となっている。またテクノロジーの利用に関しての言及を行っているのが特徴的な点である。具体的プロセスとして以下の活動を行う [3, p.18].

1. 実験によるデータの収集 (データの整理や数学的知識に基づいて観察する)
2. 推測の生成 (数学的な言葉で表現する)
3. 推測の検証実験 (より多くのデータで成り立つかを確認する)
4. 推測の改訂 (得られた反例に着目する)
5. 証明へのアプローチ (証明へどのようにアプローチすればよいか検討する)
6. さらなる問題へ (一般化, 特殊化や類比を用いてどのようになるのか推測を立て検証をする)

本プロセスをもとにした教材として, 完全数を題材にした教材 [3] やフィボナッチ数列・リュカ数列を題材にした教材 [2] を開発されている。これらの教材はテクノロジーとして Google Colaboratory の利用を前提として教材である。一方で, 松本・清水は完全数を題材にした教材の実践において「課題として, 問題や推測を一般化したような問題や推測は創出されなかった。(中略) 問題を発展的に考えるためのプロセスを検討する必要がある。」 [3, p.23] と指摘している。この実践では, 学習者が問題を一般化する際に, どの条件を変更すればよいか分からなかった可能性が残された。一方で, GeoGebra の動的幾何ソフトの機能は, 様々な図形を動かして観察することで, 予想しなかった図形を観察することができ, 問題を一般化されたり, 条件が変わった場合の図形が得られる可能性がある。それにより, 新たな問いや推測が生まれることが期待できる。

本稿では, 昨年度 [1] の教材を一般化や拡張の発想が得られるように改善し, GeoGebra Classroom を用いて中学1年生へ実践を行うことで, 生徒が発見した性質や記述式による感想をもとに, 数学教育における実験数学において GeoGebra Classroom の有効性を検討することを目的とする。

## 2 GeoGebra Classroom

### 2.1 GeoGebra と実験数学

GeoGebra とは動的幾何ソフト (Dynamic Geometry Software, DGS) と数式ソフトウェア (Computer Algebra System, CAS) ならびにスプレッドシートなど統計や解析などの統合的な数学ソフトウェアである。関数のグラフや 2 次元・3 次元の図形の考察が行え, 方程式を解くことや積分計算などが行える。またこれらは単独の機能として使うだけ

でなく, DGS と CAS を組み合わせて利用することもできる. このような動的幾何ソフトを用いることは, 作図手順の制約を保持したまま図の変形を行え, 条件や手順にもとづいた様々な数学的事実を生成することができるため, 数学ソフトウェアは「実験」の道具としては非常に強力なツールである [4]. これを踏まえれば, GeoGebra は原問題の図形に対して, 動的に動かすことで, 多くの具体例を見ることができ, 予期しない図形を見出すことができる. すなわち, GeoGebra は実験数学のような, 発展的な活動をする際に有効なテクノロジーであるため, 数学科の授業だけでなく, 高等学校の理数探究のような課題研究にも活躍することができるテクノロジーであると言える. また GeoGebra にはワークシートと呼ばれる機能がある. ワークシートには, ggb ファイルだけでなく PDF や画像, 問題などを1つのワークシートにまとめることが可能である.

## 2.2 GeoGebra Classroom の可能性

GeoGebra を実験数学のような発展的に考える授業を設計する際の懸念点として, GeoGebra を日頃使いこなしている学習者であれば, 問題なく, 考えたい図形やグラフを描くことができ, ラベルの変更や色をつけることも容易に可能である. 一方で, 慣れていない場合には, 目的の図を描くまでに必要以上の時間がかかってしまうため, 限られた時間の中で, 本来取り組むべき内容に入れられない可能性がある. また, 事前に作成した ggb ファイルを共有して利用することも考えられるが, 課題が変わるたびにファイルが変わるのは手間であり, 学習者の集中力を欠く. また作成した教材を公開設定することで, web 検索から利用することも可能ではあるが, 授業内で目的の教材を検索させ, 利用させるのは困難であると考えられる.

GeoGebra Classroom とは, 学習者にクラスコードを知らせることにより, GeoGebra ワークシートやブックをクラスに共有することができる学習環境のことで, クラスに入っている学習者の作業を教師はまとめて確認することができる. そのため, 学習者の取り組みの様子をリアルタイムで教師は確認することができる [11]. 学習者も, GeoGebra ファイルを1から作る手間が省け, 数学的な活動のみに集中して取り組むことが可能となる. また, コンピュータ操作が苦手な学習者も容易に活動に参加できる. 実際に大学生への授業実践例として Mariia ら [13] の研究がある. この研究では, 受講者から GeoGebra Classroom の利用は, 肯定的な評価を受けている. 一方で, 否定的な意見として, 学生同士でのインタラクティブな活動が行えなかったことを挙げている. 現状のシステムでは, 学習者同士で, 作成した図の共有をすることはできない. そこで, 本実践ではプロジェクターを通して作成した図形を投影する. これによってクラス全体で協働的な活動が行えると考えられる.

### 3 実践で用いた教材と GeoGebra ファイル

#### 3.1 ヴァンオーベルの定理と実践教材

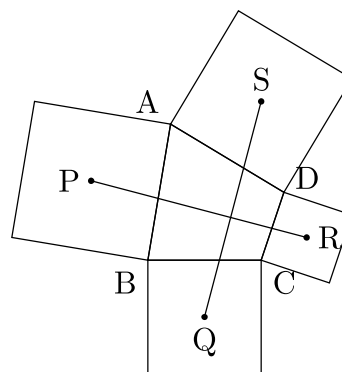
ヴァンオーベルの定理は次のような定理である。

##### ヴァンオーベルの定理

任意の四角形の4つの辺の外側に正方形を作る。このとき、互いに向かい合う正方形の中心を結んだ2つの線分は長さが等しく、直交する。すなわち、右図において

$$PR = QS, PR \perp QS$$

が成り立つ。



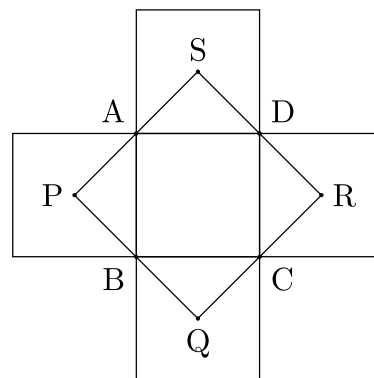
また、この定理の一般化として、任意の四角形の外側に正方形を作るだけでなく、三角形や線分に退化した場合にも成り立つ。さらに、内側に正方形を作る場合でも成り立つことが知られている [14]。課題の設定として、まず、ヴァンオーベルの定理を導出した上で、この拡張について考えるような取り組みが行えるよう教材を作成する。

まず、この定理を実験的に生徒が見出すために、四角形 PQRS の対角線に関する性質であると捉え、次のような課題を作成した。

##### Q<sub>1</sub>

図のように正方形 ABCD に対して、各辺を1辺にもつ正方形を外接させる。外接させた正方形の対角線の交点を中心と呼ぶことにし、中心を結んだ四角形 PQRS について考える。四角形 ABCD が正方形のときは、四角形 PQRS は正方形になる。

四角形 ABCD を変えたとき、四角形 PQRS はどのようなになるか調べてみよう。



実際に、四角形 ABCD を動かすことで、四角形 PQRS は様々な四角形に変わる (表 1)。それらに共通する性質を見出すことで、ヴァンオーベルの定理を見出す活動が行える。

その後、次の問いに取り組む。

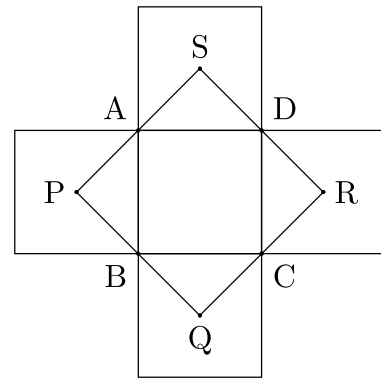
表1 四角形 ABCD と四角形 PQRS の対応表

四角形 ABCD	正方形	長方形	ひし形	平行四辺形	等脚台形	ブーメラン型
四角形 PQRS	正方形	正方形	正方形	正方形	たこ形 二等辺三角形 ブーメラン型	等脚台形

Q<sub>2</sub>

前回は以下の図の四角形 ABCD を変えたとき、四角形 PQRS はどのようなになるか調べてみた。今回はさらに、四角形 ABCD の点 A, B, C, D を自由に動かして、さまざまな図形にして、いろんな条件をみつめてみよう。まずは原問題にチャレンジし、この問題を変えてみよう。

**原問題** 点 A, B, C, D を自由に動かして、点 P, Q, R, S が正方形になるように作りなさい。



この問いを設定することで、四角形 ABCD から自由な拡張へと発展的な活動が行える。

### 3.2 実践に利用した GeoGebra Classroom に関して

今回の実践では、Q<sub>1</sub> に取り組む際、方眼用紙を用いて取り組みを行った。その理由としては、以下の2点である。

- 方眼用紙に描かせることで、図形を四角形に限定した状態で取り組むことができる。
- 紙とペンでは考えづらい図形に対して、テクノロジーを用いることで想定していない具体例が得られ、テクノロジーの有効性を経験的に理解することができる。

始めから GeoGebra を用いると、点を動かすことで、ヴァンオーベルの定理を拡張した図形も具体例として観察が可能となり、考察する対象が多くなる。そのため、活動の難易度が高くなると考えられる。また2点目に関しては、まず紙とペンで対称性や、図形の性質を踏まえてから考えることで、数学的な事実に基づいて実験が行われる。その後、GeoGebra を用いることで、事前には想定していなかった図形が現れ、問題に取り組む動機付けや、一般化・拡張の側面を踏まえた活動ができると考えられる。実際に、牧下 [8, p.11] は定規・コンパスと GeoGebra による作図の取り組みに関して「定規とコンパスによる作図に十分な時間を費やしてからでないと、GeoGebra の良さを引き出せない可能性が高い。そのためにも、具体的な図形において作図の基本操作の習熟を図ること」と述べている。GeoGebra

の良さを引き出すためには、定規・コンパスにおける指導が不可欠である。今回は定規・コンパスを用いる活動ではないが、紙とペンで考察することも同様なことが言えると考えられる。

### 3.3 作成した GeoGebra ファイル

まず、GeoGebra のサイトからログインをし、「教材を作成する」から、「ワークシート」を選択して作成した。GeoGebra ファイルはその場で作成するか、事前にアプリ等で作成した ggb ファイルをアップロードするか、オンライン上に上がっている教材を選択することができる。また、GeoGebra のアプレット以外に、テキストや質問、画像・動画・PDF ファイルなど多くの要素を挿入することができる。本教材では、GeoGebra 以外に、質問を挿入した。質問内容は四角形 PQRS の概形を聞くもので、具体例を入力し、後から見返せるようにした。多くの具体例を記録できるようにアプレットと質問は同じものは多く複製してワークシートを作成した。

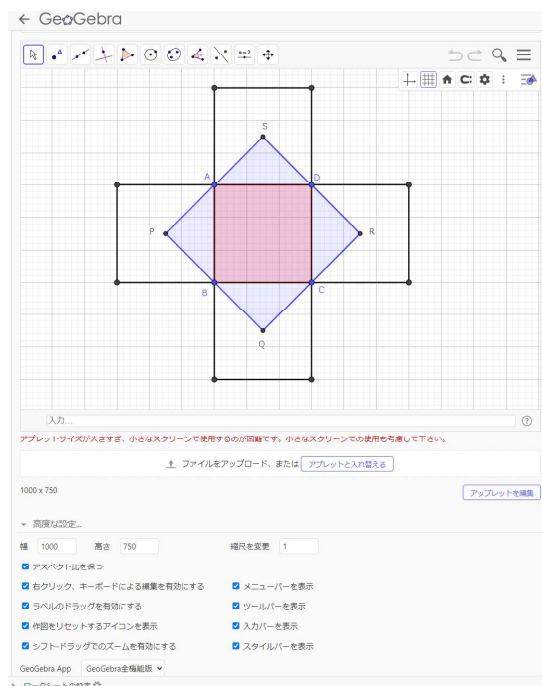


図1 ワークシートの作成過程

高度な設定では、GeoGebra の表示サイズやその他の設定ができる。本教材は生徒が自由に動かせるように、表示していないツール等も使えるように、通常のアプリと同様に、全項目にチェックを入れて作成した。

## 4 授業実践

### 4.1 実践概要

以下の生徒を対象に 5 回で授業を実践した。

- 中学1年生 (男子 26 人, 女子 15 人).
- 三角形の合同を学習済みであり、三角形の合同を用いて中点連結定理を学習したの

ち、四角形の性質の探究として本教材を実施.

- iPad は 1 人 1 台所持しておらず, 数学において ICT を用いるのは初めてである.

- 実施内容

第 1 回 これから必要となる補題・GeoGebra の使い方.

第 2 回 フィンスラー・ハドヴィガーの定理の証明・ $Q_1$  の活動.

第 3 回  $Q_1$  の活動とヴァンオーベルの定理の証明.

第 4 回  $Q_2$  の活動 1.

第 5 回  $Q_2$  の活動 2.

本稿では, GeoGebra Classroom を用いた授業の可能性を検討する.

## 4.2 実践結果

問い  $Q_2$  の活動において, 1 班 4 人から 5 人に 1 台 iPad を貸し出し, web 検索で「GeoGebra Classroom」と検索し, GeoGebra Classroom を開いてもらい, クラスコードを知らせ, 教材の共有を行った. 生徒に実際に自由に点を動かしてもらい, 見出した性質で特徴的なものがあった場合, 指名し, 教師用の GeoGebra から生徒たちのグループのファイルに入り, プロジェクターを通して映し出し, 生徒はそれをもとに発見した性質を発表してもらった. 実際に発表を聞いて, 自分たちで真似して作ってみたりする様子も見られたため, インタラクティブな活動が行えた (図 3).

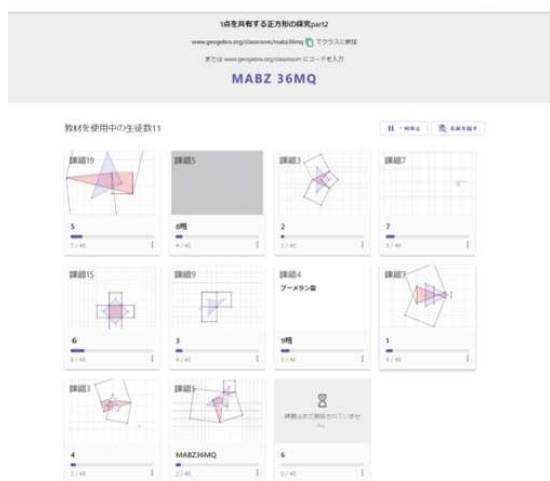


図 2 GeoGebra Classroom の画面

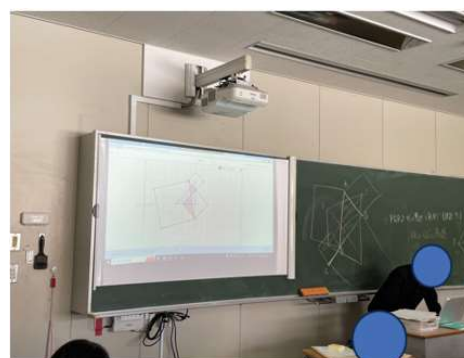


図 3 発表の様子

実際に生徒が作成した図形は次のようなものである (図 4 から 7).

(1)四角形PQRSが正方形となる例を作りなさい.

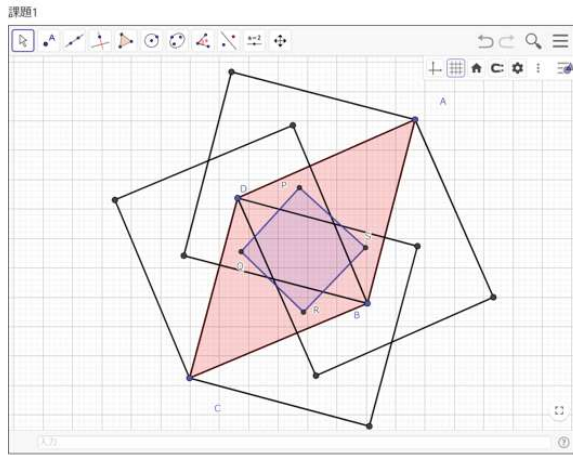


図4 生徒作成1

(1)四角形PQRSが正方形となる例を作りなさい.

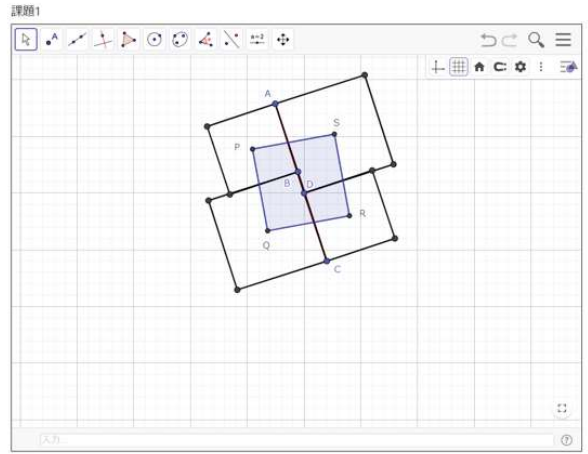


図5 生徒作成2

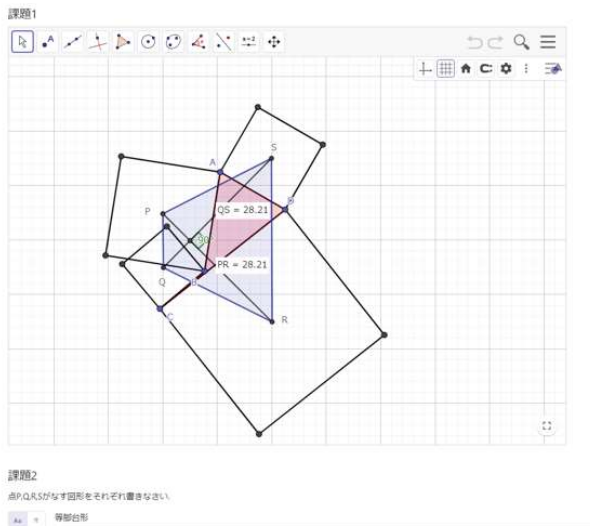


図6 生徒作成3

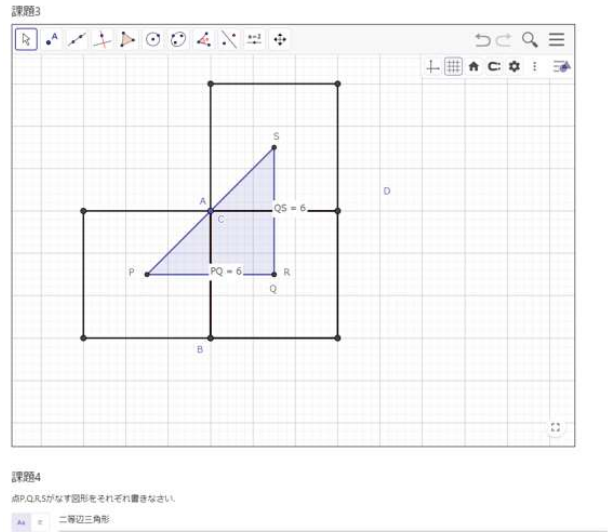


図7 生徒作成4

図4, 5は四角形PQRSが正方形になるパターンを調べている. これらの例から生徒は,  $Q_1$ で調べたとき以外にも, 四角形PQRSが正方形になるときはあるのかを調べている. 図4の場合は四角形ABCDに正方形を内接させた場合である. 具体例は見出されたが, 生徒から, 正方形を外接させた場合と内接させた場合で対応が変わるのかどうかという問いは生まれなかった.

図6, 7では解答欄に図形の名前が記入されている. 四角形PQRSが正方形以外のときを調べていることが見られる. これは, 四角形ABCDが線分をもつ三角形や2つの線分に退化した場合でもヴァンオーベルの定理が成り立っているのかを長さ・角度を図るツールで調べている様子が見える. ここから条件を変えても成り立つのかという問いをもって



調べていると考えられる。ここから、拡張された推測に対しても支持的接触の段階の実験を行っていることが分かる。

生徒による記述式の感想としては、GeoGebra Classroom に関するものと証明活動に関してが中心であった。GeoGebra Classroom に関しては次のようなものが挙げられた。

- タブレットを使うことで様々な図形の法則性を見つける活動ができ、良かった。GeoGebra を家でも使ってみたい。
- はじめてコンピュータを使って図形の条件をかえて、いろいろと規則などを発見しておもしろかった。
- コンピュータを使うことで法則が見つけやすくなった。

本活動では、ヴァンオーベルの定理の一般化した性質を GeoGebra で見出したが、様々な図形を調べる際に意欲的に調べていることが感想から見て取れる。一方で、否定的な意見は 6 名おり、GeoGebra が使いこなせなかったこと・紙の方がよかったなどの意見が中心であった。

### 4.3 考察

今回の実践では以下の 3 点が成果として得られた。

- GeoGebra Classroom を用いることで、GeoGebra の利用経験がなくても探究活動を行うことができる。
- GeoGebra Classroom を用いることで、具体的な図形をワークシートに記録することができるため、実験数学には有効な道具である。
- GeoGebra Classroom を用いることで、一般化・拡張した推測に対しても実験数学アプローチが行え、探究をより深めることができる。

1 点目に関しては、すでに完成された GeoGebra ファイルを GeoGebra Classroom で共有され、生徒が行う操作が、点を動かすことと、長さを図ったり、角度を図るだけの基本的な操作のみであったため、生徒は数学的な活動以外での困難さがなかったと考えられる。GeoGebra の利用が慣れていない学習者に対する授業や作成に時間がかかるような図形に関する授業などでは、GeoGebra Classroom は有効な道具である。

2 点目に関しては、GeoGebra Classroom では 1 枚のワークシートに何個も考えた図形とそのメモが記録できるようにしていたため、随時自分たちの具体例を参照することができた。これは通常の GeoGebra アプリではできないことである。実験数学のように多くの

具体例を参照し記録をしていく上では、GeoGebra Classroom による共有は有効な道具である。また、教師用のファイルには生徒たちの記録が随時蓄積される。それらの具体例をプロジェクターを通して学級全体で参照し、具体例の検討ができる。個人活動だけでなく協働的な活動においても有効な道具であると考えられる。

3 点目に関しては、紙での実験から完成された GeoGebra ファイルを動かすことで、考えていなかった具体例が多く出てくることから、より様々な図形で調べてみようという動機変わったと考えられる。またそのような図においても、ヴァンオーベルの定理などのこれまで成り立ってきた規則は成り立つのかどうかという吟味が自然と行われている。これらは紙だけの探究では行われなかった活動であり、GeoGebra Classroom 上でも通常の GeoGebra と同じように探究できたと考えられる。紙を使わず、GeoGebra だけで行うと始めから拡張された具体例が多く出てしまい、具体例の整理の難易度が上がってしまう。紙と数学ソフトウェアのそれぞれの良さを踏まえて授業を行うことで、生徒自身も経験的にそれぞれの重要性を気付くきっかけになると考える。

## 5 まとめ

本研究ではヴァンオーベルの定理を題材にした GeoGebra Classroom を用いる授業に関して考察を行い、その有効性について述べた。GeoGebra Classroom による GeoGebra ファイルの共有はコンピュータ操作が苦手な学習者や、GeoGebra 初心者には非常に有効な道具であり、多くの生徒を巻き込んで探究活動が行えることが示唆として得られた。また GeoGebra Classroom 上に多くの具体例を記録でき、随時確認しながら推測ができ、実験数学にとって有効な道具である。これらを踏まえ、様々な単元において GeoGebra Classroom を用いることで授業がどのように変わるのか。それらについて今後考察していく。

中等数学教育においてより数学ソフトウェアの活用とそれを有効に活用する教材が求められてくる。その際、紙での活動がすべて数学ソフトウェアに変わるわけではなく、紙での活動と数学ソフトウェアそれぞれの良さを踏まえた授業が重要である。

## 謝辞

本研究は科学研究費補助金基盤研究 (C) 21K02931 の助成ならびに国際共同利用・共同研究拠点京都大学数理解析研究所の支援を受けた。

## 参考文献

- [1] 松本昌也・若尾波月・清水克彦 (2022a). Van Aubel's Theorem を題材にした実験数学探究教材の開発-GeoGebra Classroom を用いて問題を発展的に考える授業の提案-. 数理解析研究所講究録, 2236, 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, pp.9-29.
- [2] 松本昌也・清水克彦 (2022b). テクノロジーを用いた問題づくりを行う実験数学教材の開発-フィボナッチ数列とリュカ数列を題材にして-日本数学教育学会第 55 回秋期大会発表集録, pp.293-296.
- [3] 松本昌也. 清水克彦 (2023). Google Colaboratory を用いる実験数学教材の開発-完全数を題材に実験のプロセスに焦点を当てて-日本数学教育学会誌, 105(11), pp.16-26.
- [4] 清水克彦 (2013). 数学教育における「実験」の機能とコンピュータの活用. 日本科学教育学会年会論文集, 37, pp.92-95.
- [5] 清水克彦 (2010). 実験数学による創造性の育成についての検討-テクノロジーによる帰納・類比そして推測の導入-. 日本科学教育学会年会論文集, 34, pp.97-98.
- [6] 飯島康之 (2021). ICT で変わる数学的探究. 明治図書.
- [7] 小池正夫 (2010). 実験・発見・数学体験. 数学書房.
- [8] 牧下英世 (2015). 教職課程での ICT の利活用と実践. 数理解析研究所講究録, 1951, 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, pp.1-13.
- [9] 文部科学省 (2017). 中学校学習指導要領解説 数学編 理数編. 実教出版.
- [10] 山本芳彦 (2000). 実験数学入門. 岩波書店.
- [11] GeoGebra Team. <https://www.geogebra.org/m/hncrgruu> 2023 年 10 月 15 日確認.
- [12] G.Polya(1958). *Mathematics and plausible reasoning vol.1 induction and analogy in mathematics*. Princeton Univ Pr.
- [13] Mariia Astafieva, Oksana Hlushak and Oksana Lytvyn(2021). *GeoGebra Classroom as a component to ICT support inquiry based mathematics education in a blended learning*. EasyChair Preprint no. 6736. [https://easychair.org/publications/preprint\\_open/LX9r2023](https://easychair.org/publications/preprint_open/LX9r2023) 年 10 月 15 日確認.
- [14] V.Oxman.,& M.Stupel(2015). *Elegant special cases of van aubel's theorem* The Mathematical Gazette, Vol99, pp.256-262.