探求活動における Technology の有効活用と数学の楽しみ

生涯学習数学研究所　渡辺信
longlifemath@gmail.com

学校における数学教育で最近行われている探究活動に対して、今回はあえて探求活動とした。数学を研究して活用するというよりは、数学を Technology 活用によって楽しむことを目的にしたい。学問を学ぶことには、他からの圧力や将来のために強制的に学ばざるを得ないことがある。学校教育はこの学びに属するために、楽しむということを排除している。また学ぶことに対して好きなことを行うこともみられる。しかし、最も好ましい学びは、楽しむことであって、そこには努力というものはない。数学を楽しんで学ぶことなどは、困難なこととも考えられる現在の学校教育とは、相反する学びを考えている。

この楽しく数学を学ぶことに対して「誰が」「どのようにして」「どこで」可能なのかを問われるであろう。「どのようにして」「どこで」の問題点はあまり問題にはしないが、「誰が」ということに対しては「すべての人がその人に応じて」と考えたい。数学の知識の多い人はその持っている知識を用いて、より発展的に数学を楽しむことを考えたい。知っていることを再び学んでもそこには楽しみはない。数学の知識が乏しい人もその人がより数学の世界を広めることによって楽しみを探し出したい。

また、このような議論になると「楽しい数学」とは何かが問われる。この数学に対して、難しかったら証明などはいらない、もちろん他からの評価もない数学を考えたい。数学で「証明がない数学」などありえないかもしれないが、楽しい数学は伝統的な「定義・定理・証明」ではなくても良い。証明はできたらやっても良いが、証明という段階は問題外にしたい。このような数学に疑問を感じるのであれな、新しい数学の世界を楽しむこととしたい。楽しむことは自らが積極的に活動することである。この意味では『主体的な学習』ともいえるのではなかろうか。

数学の中から条件を変えてみることやその数学の拡張による問題発見
今回は「グラフを描くこと」と「Σk^{n}の拡張」を話題にする
↓
問題を解決するデータを Technology を活用して集める
↓
データを見て「予想」を考えてみる
この「予想」に対する「証明」はしない

楽しい数学の探究活動の構造

問題発見は学校教育ではほとんど訓練はされない。数学教育においては、新しい数学技能を学ぶこと、与えられた定理を用いる問題を解くことが中心で、自ら問題を発見することはない。今回の問題発見は自らの世界を超えることがないことは当然であっても、その中で問題の条件を変えてみることは難しくはない。そして同時に、今までとは違うこととして Technology の有効活用を前提とする。今まで菜見ることができなかった事柄を簡単に見ることができる道具を持っていることを生かしたい。ガリレオが遠い天体を望遠鏡を用いて眺めたように、また生物の世界で顕微鏡を用いて世界を広げたように、数学においても数学の世界を広げることができる Technology を持つことができた。この道具によって数学を楽しむことが今回の目標である。探求することによって数学が楽しい学びになることは Technology の有効利用が可能にしてくれる。

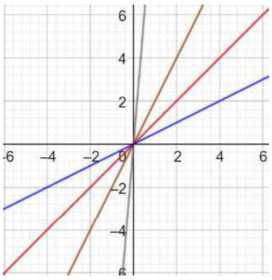
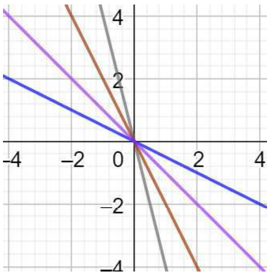
この結果、Technology 活用によって、いろいろな結果を探し出すことを行い、その結果の証明をしなくても数学を楽しむことができることは前提として置く。現在の数学教育において欠けている数学を楽しむことを Technology の有効活用によって、自ら考え着いた疑問・新しい問題に挑戦ができる。数学の授業において学ぶことを延長してみたい。この活動の過程の中に数学を楽しむことが存在し、創造的な活動が Technology によって可能になる。この結果を見ながら「数学的な予想」が生まれたら楽しさをより一層高められるであろう。

1. グラフを描くことと探求活動

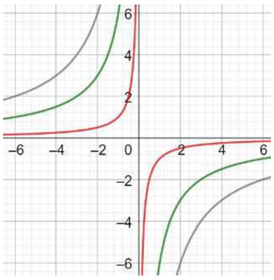
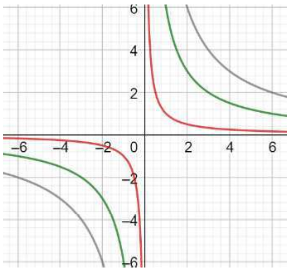
学校教育では正比例と反比例のグラフ表示がある。このときは関数概念としては扱わないが、関数的な考え方の出発点はある。

(1)算数･数学教育で学ぶグラフを整理したい。

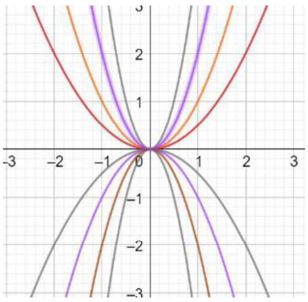
(ⅰ)正比例の原点を通る直線 $y=ax$(比例定数の大小と符号)から $y=ax+b$

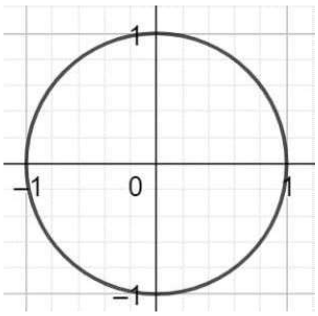
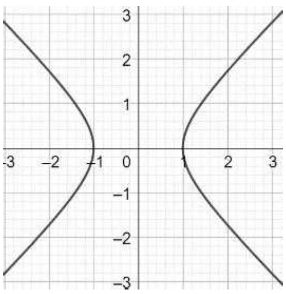
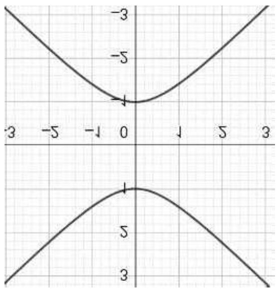
(ⅱ)反比例の双曲線 $xy=a$(反比例定数の大小と符号)

(ⅲ)x^2 に比例する放物線 $y=x^2$ から $y=ax^2+bx+c$



(ⅳ)円と双曲線(楕円は係数を変えるのみ)

円　$x^2+y^2=1$　　　双曲線　$x^2-y^2=1$　　　$x^2-y^2=-1$

(ⅴ)その他の関数のグラフ(今回は利用しない)

(2)問題発見・・・グラフの変化を調べたい

今までに学んできたグラフを見ながら、式の符号と指数を変えることを考えた。

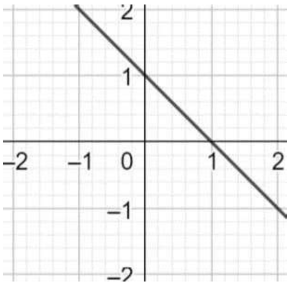
（ⅰ）符号を変える　$x^2+y^2=1 \rightarrow x^2-y^2=1$

（ⅱ）指数を変える　$x^2+y^2=1 \rightarrow x^{10}+y^{10}=1$

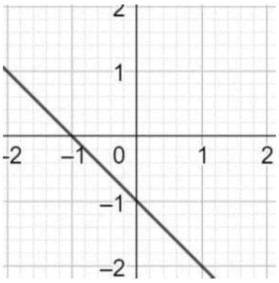
（ⅲ）（ⅰ）と（ⅱ）の組み合わせ　$x^2+y^2=1 \rightarrow x^{10}-y^{10}=-1$

(3)データを集める・・・Technology によってグラフを描く

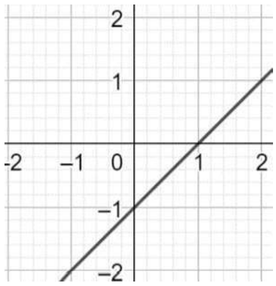
$x+y=1$



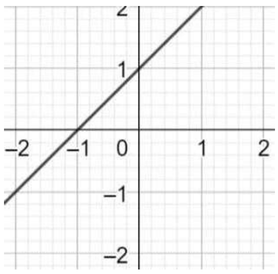
$x+y=-1$



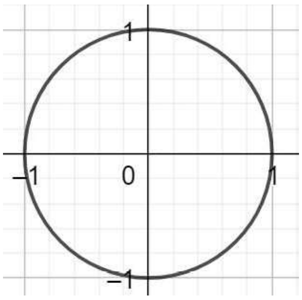
$x-y=1$



$x-y=-1$

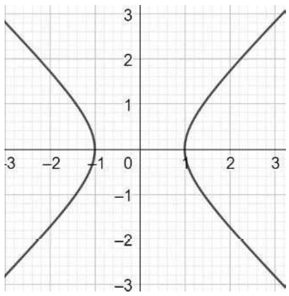


$x^2+y^2=1$（円）

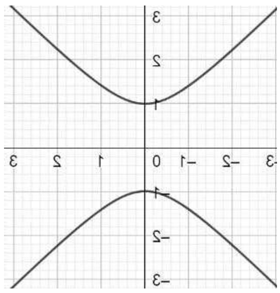


$x^2+y^2=-1$

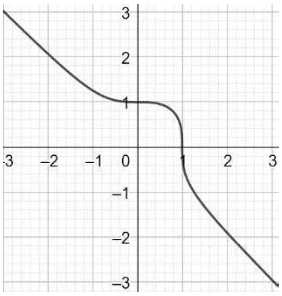
$x^2-y^2=1$（双曲線）



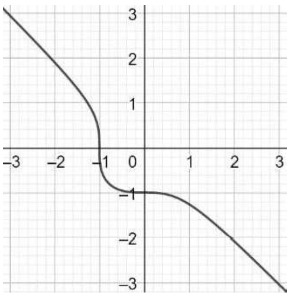
$x^2-y^2=-1$（双曲線）



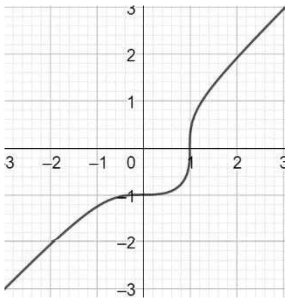
$x^3+y^3=1$



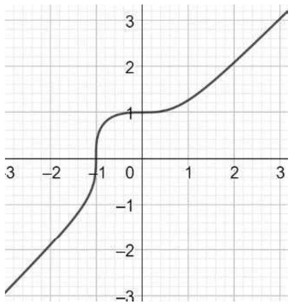
$x^3+y^3=-1$



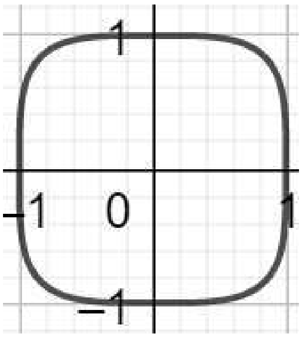
$x^3-y^3=1$



$x^3-y^3=-1$



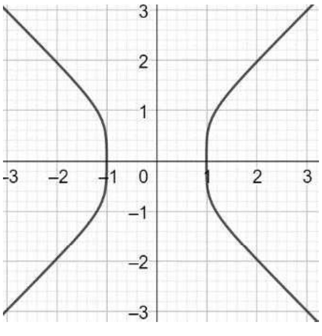
$x^4+y^4=1$



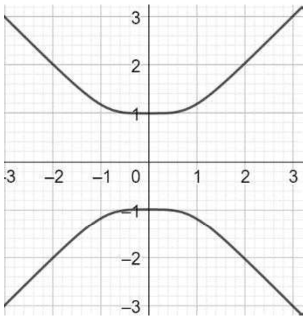
$x^4+y^4=-1$

左辺≧０よりグラフは存在しない

$x^4-y^4=1$

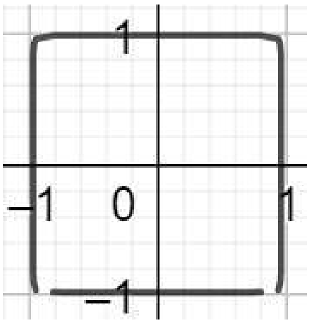


$x^4-y^4=-1$



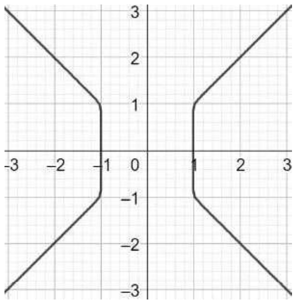
ここまでのグラフを見ることによって、指数が大きくなった時のグラフの概形を偶数・奇数によって分けて考え、次の８通りに分けてグラフの概形が変わることが分かった。

$x^{\text{偶数}}+y^{\text{偶数}}=1$

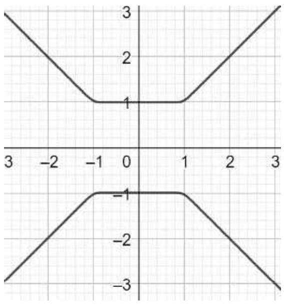


$x^{\text{偶数}}+y^{\text{偶数}}=-1$

$x^{\text{偶数}}-y^{\text{偶数}}=1$

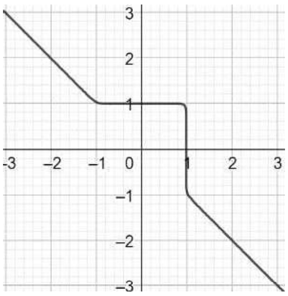


$x^{\text{偶数}}-y^{\text{偶数}}=-1$



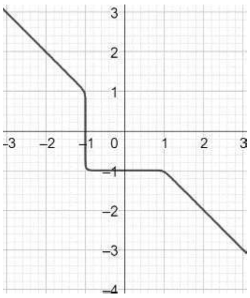
円の延長　　　　双曲線の延長

$x^{\text{奇数}}+y^{\text{奇数}}=1$



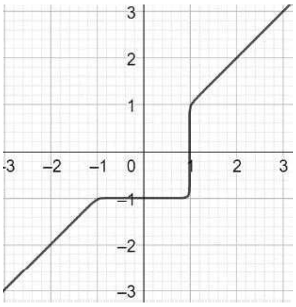
直線 $x+y=1$ の延長

$x^{\text{奇数}}+y^{\text{奇数}}=-1$



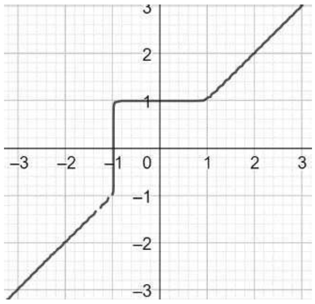
直線 $x+y=-1$ の延長

$x^{\text{奇数}}-y^{\text{奇数}}=1$



直線 $x-y=-1$ の延長

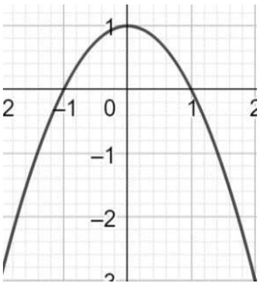
$x^{\text{奇数}}-y^{\text{奇数}}=-1$



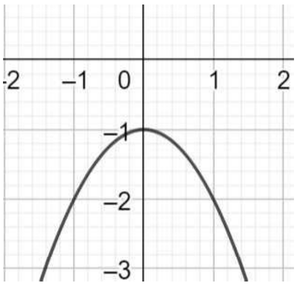
直線 $x-y=-1$ の延長

(4)データを集める・・・偶奇の組み合わせを変える

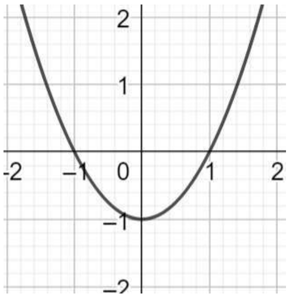
$x^2+y=1$



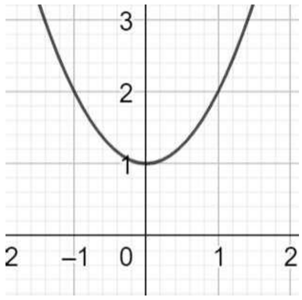
$x^2+y=-1$



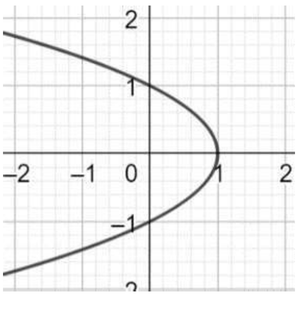
$x^2-y=1$



$x^2-y=-1$



$x+y^2=1$



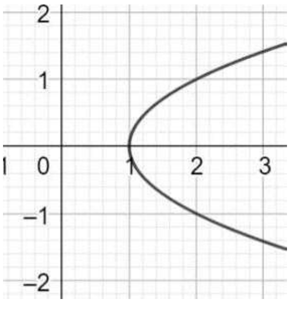
$x+y^2=-1$

（このグラフを描かない）

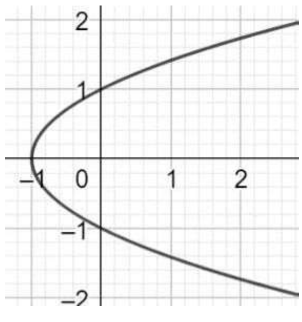
GeoGebra の特殊性？

ｘの範囲を与えると？

$x+y^2=1$

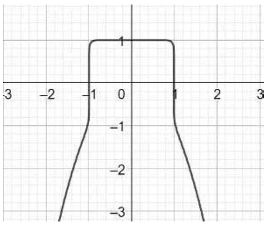


$x+y^2=-1$



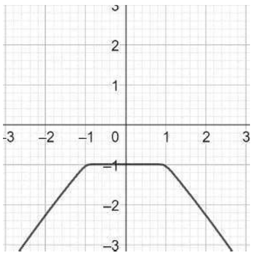
おそらく指数を大きくしてみるグラフの外形箱の放物線の概形は似ているグラフが作られるのであろう。ただ、 $-1 \leqq x \leqq 1$ 付近の変化が異常な変化をしているであろう。この変化の様子も調べると面白そうであったが、グラフを描くことに疲れていることは、やや興味を失いかけている。楽しむことから調べることに対する苦痛が生じている。楽しむことが薄れている。

$x^{\text{偶数}}+y^{\text{奇数}}=1$



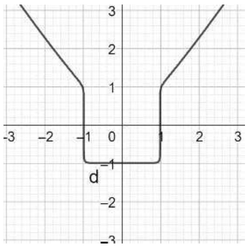
$x^2+y=-1$（放物線）

$x^{\text{偶数}}+y^{\text{奇数}}=-1$



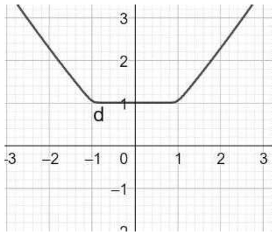
$x^2-y=1$（放物線）

$x^{\text{偶数}}-y^{\text{奇数}}=1$



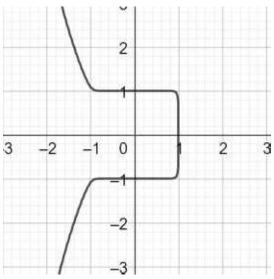
$x^2-y=1$（放物線）

$x^{\text{偶数}}-y^{\text{奇数}}=-1$



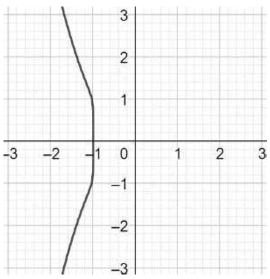
$x^2-y=-1$（放物線）

$x^{\text{奇数}}+y^{\text{偶数}}=1$



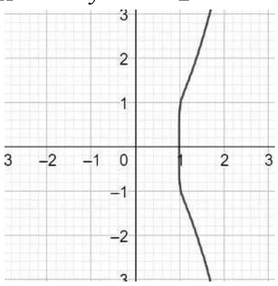
$x+y^2=-1$（放物線）

$x^{\text{奇数}}+y^{\text{偶数}}=-1$



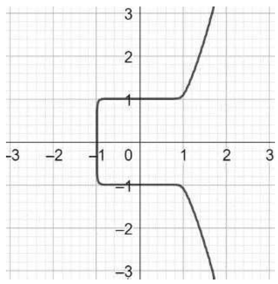
$x-y^2=-1$（放物線）

$x^{\text{奇数}}-y^{\text{偶数}}=1$



$x-y^2=1$（放物線）

$x^{\text{奇数}}-y^{\text{偶数}}=-1$



$x-y^2=-1$（放物線）

(5)残した問題点

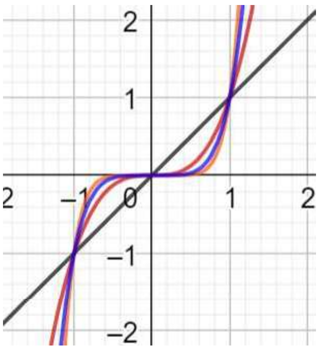
（ⅰ）どこまで大きくしても同じなのか(同じと予想したい)

（ⅱ）偶数同士、奇数同士の数の差が大きくなった時の変化

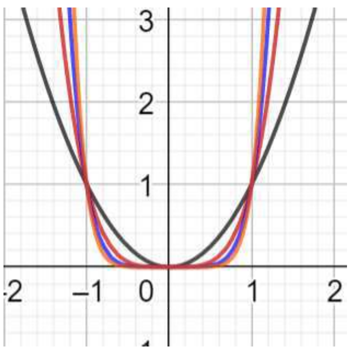
（ⅲ）偶数と奇数の差が１の場合のグラフであるが、この差を大きくしたらグラフの変化

（ⅳ）$-1 \leqq x \leqq 1$ のグラフの変化の様子

(6) $y=ax^{\text{奇数}}$ と $y=ax^{\text{偶数}}$ における $a>0$ の大きさの変化とグラフ



$y=ax^{\text{奇数}}$



$y=ax^{\text{偶数}}$

2．グラフとの対話も数学を楽しむ動機付けになる

グラフを描くだけではなく、物語をグラフで表現することや、グラフから物語を作ることなど、グラフとの対話も興味がある。ただグラフを描くのではなく、グラフが持つ変化、その変化が意味していることにも理解が深くなるであろう。数学が日常化されることと考えてもよい。この場合、グラフを読むことが「時間と距離」の関係だけになっていることは､「時間と距離」の関係だけより世界を広げる必要がある。グラフを見ながらグラフとの対話ができるならば、グラフを描くことがもっと楽しくなるであろう。またグラフが持つ意味を知って変化の不思議を考えたならば､その不思議が数学の楽しみを広げる可能性があるに違いない。今までのかつそうでは数学がグラフを描くことで終わっていたが、そのグラフに物語を付けてみることや、逆に物語をグラフによって表現することも面白いのではないかと考えた、

(1) 物語からグラフを作る

Story　太郎君は学校に行く途中で忘れ物に気がつき、急いで家に戻り、机の中を探してから急いで学校に向かった。学校についた時間はいつもとは少し遅れたが始業時間には間に合った。

問題　この物語にふさわしいグラフを描く

① ｘ軸（時間）とｙ軸（距離）の設定

② 家を出て普通の速度で歩く

③ 忘れ物に気がつく

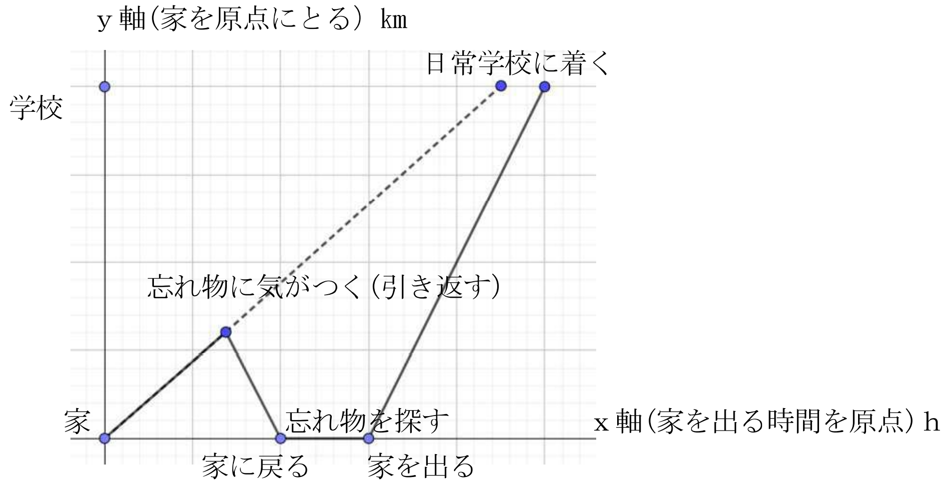
④ 家に戻る

⑤ 探し物をする

⑥ 急いで学校に行く

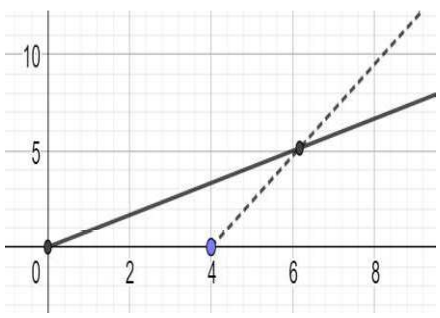
⑦ いつもの登校時間より遅く着く

この物語のグラフを作ってみる。

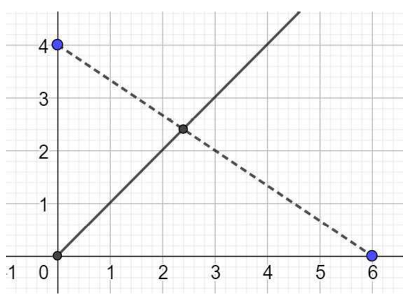


このグラフでは傾きの符号が持つ意味は「家から学校への＋（正)」と「学校から家へのー（負」」の方向の違いを表している。また傾きの絶対値の大小は速度の速さの問題である。初めに歩いていた速度よりも、引き返したときの速度・フタタ簿学校に向かうときの傾きの変化は速度の違いである。

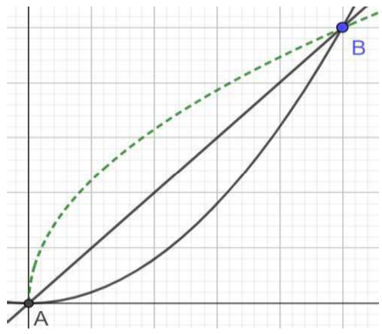
グラフにおいて直線の交点の意味は何かを考えたい。もし２人（実践と点線）の歩くことで物語を作るならば、はじめのグラフは点線が追いつく点であり、後者は向きの違う２人が出あう点である。また２人の速度の比較もできる。変化の様子が一定ではないグラフによって、だんだん早くなることとか、逆にだんだん遅くなることを表現するグラフを考えておくことも必要である。一定の速さによる変化は直線で表現できるが、変化が曲線のグラフについても考えたい。



追いつくグラフ



出会うグラフ



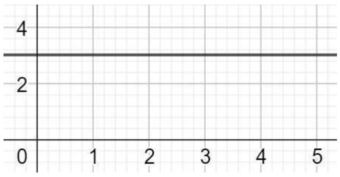
点Ａから点Ｂまでの変化の様子

(3) グラフを見て不思議に思うことが楽しむ動機付けに発展する

(ⅰ)軸の意味(単位)に注目

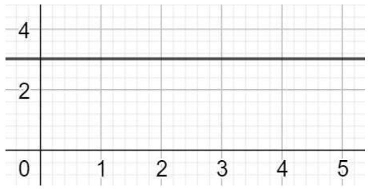
グラフが語り掛けることは座標軸が何を意味しているかによって違ってくる。この座標軸の単位が違っていると、2つのグラフは同じでも、グラフが語り掛けることは全く異なる意味がある。

速度(km/h)



時速 3km/h で歩く（速度一定）

距離(km)

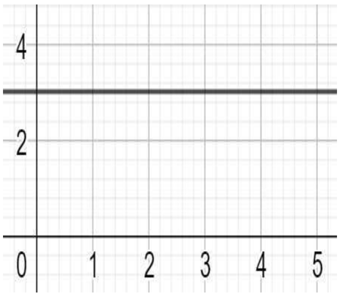


時間に対して場所 3km は変化しない(停止中)

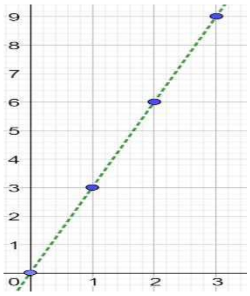
(ⅱ)微分積分学を意識して「不思議」を意識させたい

次のグラフ同士の物語ができる。不思議と思うことが「ある発想」につながると同時に数学を楽しむことによって数学概念の理解につなげたい。

速度



距離



速度のグラフから

1時間後に進んだ距離　3 km

2時間後に進んだ距離　6 km

・・・

x時間後に進んだ距離　3 x km

これをプロットしてできるグラフ

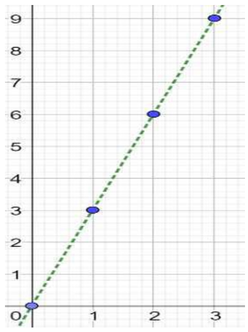
右のグラフの傾きをグラフ

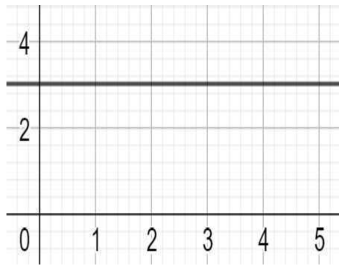
1時間魏の傾き　3

2時間魏の傾き　3

・・・

常に傾き一定

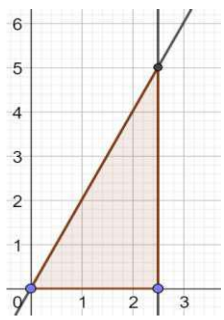




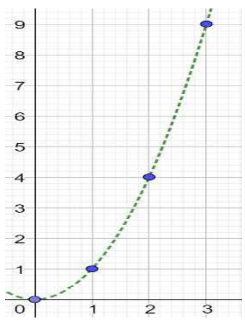
考えていることが違っていてもグラフが元に戻る「不思議さ」を示す。この段階では

同じ問題を1次元上げて考えたい。「不思議」と思うことによって、もっといろいろなグラフについて考えてみる。初めは速度を与えて、そこから進んだ距離を求めること(距離の値は面積として求められる)であり、もう一方のグラフ同士の関係はグラフの傾きを見る問題である。この全く違うことを行うことが逆関係になっていることに「不思議」を感じるかが、数学を考える動機付けになるとともに、数学の楽しさにもつながると考えられる。

速度(km/h)



距離(km)



時間 x における面積＝x^2

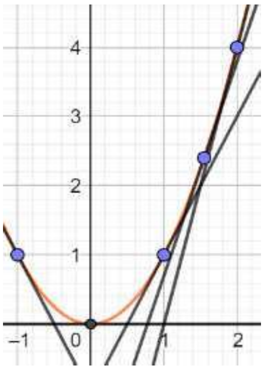
曲線 y＝x2 における接戦の傾きは放物線上の点を与えることによって即座に知ることができる

x=1 のとき接線の傾き　2

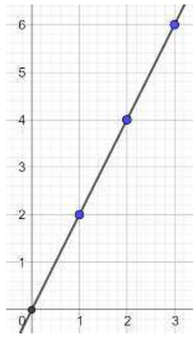
x=2　　　　　　　　　4

x=3　　　　　　　　　6

面積の値を表示



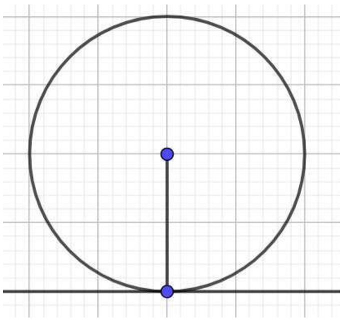
(0, 0)、(1, 2)、(2, 4)、(3, 6)を取る



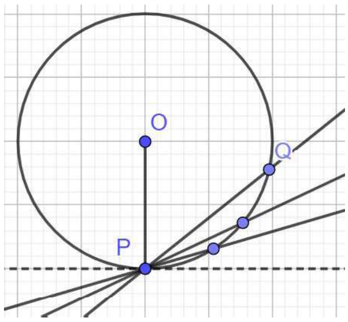
接線の傾き（初めのグラフに戻る）

教科書を読んでも分からなかったことを、再度学習の意味で同じ教科書を読んでも数学は分からないことが多い。復習の重要性は違う説明をする必要があるのではなかろうか。納得するときには、以前説明を受けたことがわかる。微分積分を説明するときにグラフに物語を付けることによって、理解できることがでる。面積を求める＝積分と、曲線に接線の傾きを求める＝微分について、グラフと物語は興味があった。

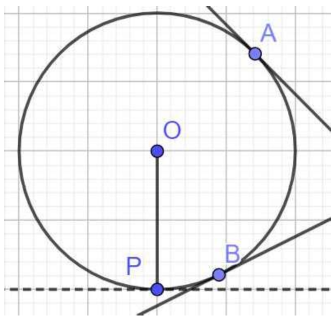
この段階でも問題点は接線の傾きをどのようにして求めるかであった。接線という言葉は円を学ぶときに学んでいて問題はない。



半径に直交する接線



点 Q が点 P に円周上を移動する



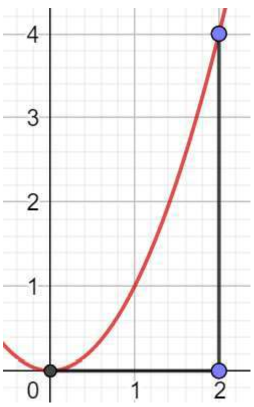
傾き-1

傾き 1/2

傾き 0

接線の傾きは Technology で求める

接線は半径に直交すると考え、曲線の半径に当たるものを考える。円の接線に対しては理解しても、その直線の方婿を求めることは考えていない。接線の傾きについても曲線状の点を与えると接線を引き傾きが求まる機能がある。特別に点 Q が点 P に近づくことを考えなくても数学的な技能は Technology によって置き換えられる時代になっている。



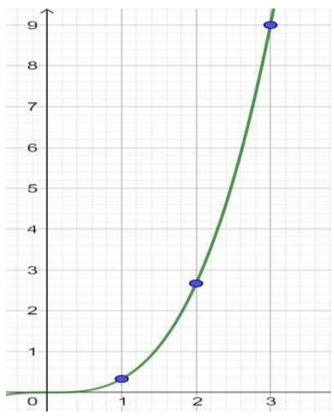
x=1 のとき面積　1/3（1, 1/3）

x=2 のとき面積　8/3（2, 8/3）

x=3 のとき面積　27/3（3, 3）

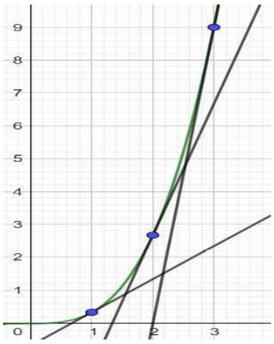
・・・

x のとき　　　　$x^3/3$　$(x, x^3/3)$



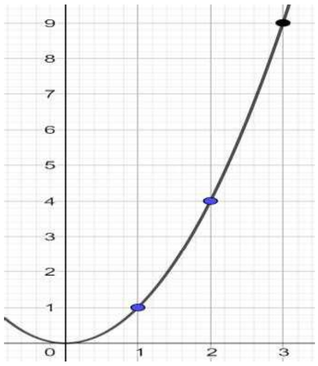
曲線で囲まれた面積を求める

$\Sigma k^3=n(n+1)(2n*1)/6$



Technology によって接線の傾き
(1,1/3)の接線の傾き 1
(2,8/3)の接線の傾き 4
(３,9)の接線の傾き 9

(1, 1)、(2, 4)、(3, 9)をプロット



3．計算技能は Technology によって置き換わる

面積を求める積分の計算公式を求めるときに、Technology がなかった時代(50 年前)に次の表を作った。この表を作ろうと思った動機は教科書には n=4 までは書いてあったが、そのあとは何も書いてなかったので n ≧5 のときはどのようになるか知りたかったのかもしれない。この表を作ってもなにも役立たない。試験に出る問題でもなく、何かを証明するためでもない。同じような計算が繰り返されるだけではあったが、時間がたつのを忘れた。次の表を作った。

表 1．以前手計算によって作ったΣｘn, n=0 から 10 までの結果

0	n
1	n(n+1)/2
2	n(n+1)(2n+1)/6
3	n^2(n+1)^2/4
4	n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30
5	n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12
6	n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)/42
7	n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)/24
8	n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)/90
9	n^2(n+1)^2(2n^6+5n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)/20
10	n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)/66

この表を作った動機は教科書に載っている公式の拡張であった。計算は面倒であったが楽しかった。途中で因数分解ができるか、どこまでやると既約になるかは因数定理を使う以外には何も方法はなかった。10 時間くらいかかったのであろうが、途中でやめたいとは思わなかった記憶がある。作った後で予想を考えた。何がわかるかは計算をしているときには、何かを予想しようとは思わなかった。出来上がった表を見ながら、予想を見つけることはおもしろい。

予想	1．約数ｎ(ｎ+1）を持つ　たたしｎ≠０
	2．ｎが偶数のとき約数（2n+1）を持つ　たたしｎ≠０

この予想に対して証明を付けることは分からなかった。それでも満足であった。数学は証明は重要であると言われているが、証明のない予想が作れたら楽しい。

現在、この表を作ることは難しくない。ボタンを押すと即座に作り出せる。今まで用いられていた数学の技能はすべて Technology によって置き換えられた。この表から展開することを試みた。

グラフ電卓(TI-89)画面上の表示	
$\Sigma(x^t,x,1,n)\vert t=2$	n(n+1)(2n+1)/6
expand(n(n+1)(2n+1)/6)	$1/3n^3+1/2n^2+1/6n$

表 2．Σ(x^t,x,1,n)　(展開式は Technology を活用)

0	n						
1	1/2n^2	+1/2n					
2	1/3n^3	+1/2n^2	+1/6n				
3	1/4n^4	+1/2n^3	+1/4n^2				
4	1/5n^5	+1/2n^4	+1/3n^3	-1/30n			
5	1/6n^6	+1/2n^5	+5/12n^4	-1/12n^2			
6	1/7n^7	+1/2n^6	+1/2n^5	-1/6n^3	+1/42n		
7	1/8n^8	+1/2n^7	+7/12n^6	-7/24n^4	+1/12n^2		
8	1/9n^9	+1/2n^8	+2/3n^7	-7/15n^5	+2/9n^3	-1/30n	
9	1/10n^10	+1/2n^9	+3/4n^8	-7/10n^6	+1/2n^4	-3/20n^2	
10	1/11n^11	+1/2n^10	+5/6n^9	-n^7	+n^5	-1/2n^3	+5/66n
11	1/12n^12	+1/2n^11	+11/12n^10	-11/8n^8	+11/6n^6	-11/8 n^4	+5/12n^2
	赤字部分予想・黒字部分実際に計算						

この結果を見て予想できること

予想　1. 各列の指数の並び方は 1，2，3、…と並んでいる

2. 行を見ると初めの 3 つの項は指数が 1 減るが、その後は 2 ずつ指数が減る

3. n が奇数のとき最後の指数は 2
　　偶数のとき　　　　　　1

4. 係数の予想はできない

すでに分かっていることはこの計算が正しいかに使われた。

分かっていたこと　最高次の係数　$1/(n+1)=\int x^{n}dn\ (0\leqq x\leqq 1)$

次の項の係数＝1/2

第 2 項目の係数が 1/2 であることは知っていた。もし知らなかったらば、驚きと共に発見した喜びがあったであろう。何らかの形で与えられた知識の再発見には数学の楽しさはない。どんなに簡単なことであっても、また多くの人が知っている事実であっても、自ら発見できることは大きなよ p ロコ日であるに違いない。

4. 数学の楽しさ

今回用いたグラフの問題・積分のための級数和の公式は簡単な思い付きから始まった。我々が学んだ数学・教科書に書いてある事柄から、ちょっとはみ出したことに興味を持って始めた者であった。このちょっとした事柄から数学の面白みが始まったと考えられる。

数学が面白いと思うのは成長段階で違う。

幼児期　　　数を数えられる
小学校初期　計算ができる楽しみ
より高学年　問題が解ける楽しみ

この段階を過ぎると、入試等による強制的な数学によって、数学から離れていく。数学の問題は時間的には約解くこと、答えが出ることを要求されるためにエレガントな解法は必要とされない。多くの数学の問題は答えがあることが前提とされているために、解くことができて当然である。このような数学を考える楽しみは消えていく。楽しむことが年齢層によって違うことは同じ一つのことをやっていてもはっきりと表れることが多い。そして、出来ないことを知って数学から離れていく。

今回の例を参考にすると数学の楽しみはどこにあったのであろうか。グラフを描くことは Technology が行うが、どのようなグラフを描かせるかを決めて、グラフを予想する楽しみがあった。一つ一つのグラ

フは瞬時に描かれるが、どのような式を入れたらよいかを考えるのは楽しかった。出てきたことを整理して、その中から規則を発見する作業は難しい問題であり、予想を作れればよかったとしたい。その予想の証明までは要求する必要性はなしと考えたい。数学は証明があって初めて成立するという考えは、数学を楽しむことからは外れていてもよいと考えたい。この証明を重視する数学を「伝統的な数学」と呼びたい。証明が出来なくともよいと考えることによって、数学を楽しむことが可能になるのではなかろうか。

50 年前には数学ソフトはなかったので、計算がすべて手計算で行われた。$\Sigma(x^n,x,1,n)$の結果は n=3 までは教科書に書いてあった、そして、その求め方も n=2 から n=3 を求める方法は与えられていた。n が 4 以上の場合はどこでも使わないので必要なかったのかもしれない。その時に n=4 であったらどのようになるかを知りたくなった理由は分からないが、一つの好奇心が働いたのかもしれない。計算は面倒であったが楽しかったのであろう。n=10 まで計算に要した時間は長かった。今ではこの表を作るのは簡単である。計算には楽しみはない。昔の計算は展開するよりも因数分解することに心ひかれていた。今回その結果を展開してみたのが表 2 である。この表を作るにあたっては Technology を活用したのでおもしろみはない。

数学の面白みは「ある小さな発想」から始まる。そして自らデータを集めることには数学の楽しみがある。その集めたデータの中に潜む数学が発見できたならば満足感が生じるのではなかろうか。その予想は証明できなくてもよい。やはり数学における証明は数学の楽しさからは異質な活動ではなかろうか。

数学は証明ができたときに、その問題の所有権を得ることができると考えられている。しかし、証明には至らなくても数学の楽しさを経験できる。