

オイラー線上に中心をもつ円族 —外接円・九点円・垂重円とそれらの根軸の球面上での統一的把握—

日本経済大学 岡田 浩一

Koichi Okada, Japan University of Economics

京都大学 一松 信

Sin Hitotumatu, Kyoto University

東海大学・理学部 前田 陽一

Yoichi Maeda, School of Science, Tokai University

1 実験数学のための GeoGebra

本稿では、GeoGebra を用いた実験数学の実践例を紹介する。岡田は、ある数学教育に関する談話会において、2つの複素数 z_1, z_2 の算術平均と調和平均、2つの幾何平均の関係が、

$$\left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}, \sqrt{z_1z_2}, -\sqrt{z_1z_2} \right) = -1,$$

すなわち、4つの値が必ず調和点列 (複比の値が-1) となることを示した。このことを

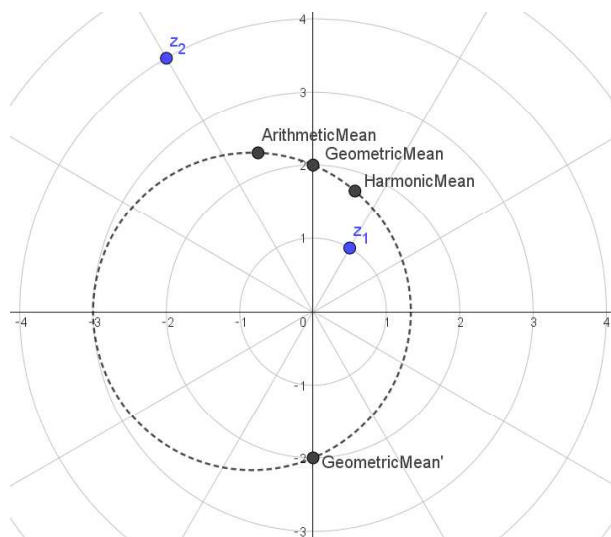


図 1: 4つの平均が調和点列であること。

GeoGebra を用いて作図によって示そうと試みる中で、偶然あることに気が付き、それを発展させたものが今回紹介する内容である。GeoGebra で作図を試みていく過程で思いがけない発見をし、それを検証し、発展させるプロセスを本研究で読者の方々にも追体験していただければと思っている。

2 4つの平均の複素平面上での作図法

算術平均, 調和平均, 2つの幾何平均が調和点列をなすことを GeoGebra で確かめるのは簡単である. 最初に, 平均をとるための2点 z_1, z_2 を平面上にとり, プロパティの数式タグで座標を複素数に設定しておく. その上で, 数式入力バーで, $(z_1 + z_2)/2$ と入力すると算術平均ができ, 同様に, $2 * z_1 * z_2 / (z_1 + z_2)$ で調和平均が, $\sqrt{z_1 * z_2}$, $-\sqrt{z_1 * z_2}$ で2つの幾何平均が容易に作成できる. 4点が同一円周上にあることから複比の値が実数であることがわかる. 複比の計算も入力バーで計算することができ, -1 であることが代数的にわかる. では, 代数(数式)を用いない方法で, ユークリッド幾何的にこれらの平均を作図するにはどのようにすればよいであろうか? 以下の作図法は, その一例である. 複素平面の原点を $O(0)$ とする.

4つの平均の作図法 (図2)

1. z_1 と z_2 の中点をとる. (算術平均)
2. z_1 と z_2 を通る直線 l_1 を引く.
3. z_1 と z_2 の垂直二等分線 l_2 を引く.
4. 角 $\angle z_1 O z_2$ の角の二等分線 l_3 を引く.
5. 原点 O を通り l_3 に垂直な直線 l_4 を引く.
6. 点 $A = l_2 \cap l_4$, 点 $B = l_1 \cap l_4$, 点 $C = l_2 \cap l_3$ をとり, 三角形 ABC を作る.
7. 点 A から直線 BC に下ろした垂線の足をとる. (調和平均)
8. 辺 AB を直径とする円 C_1 を描く.
9. 円 C_1 と直線 l_3 との交点をとる. (2つの幾何平均)

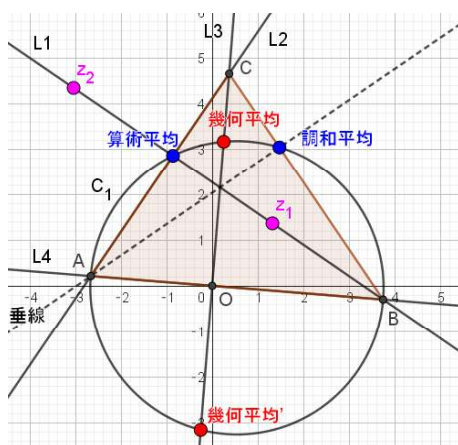


図 2: 算術平均, 調和平均, 2つの幾何平均の作図

3 重心中心の円

前節の作図において、4つの平均の作図にはある三角形が関係していることがわかる。その三角形の垂線の足は、原点 O 、算術平均と調和平均となっている。頂点 C を中心とした円で、 z_1 を通る円の半径は、 $\sqrt{|AC||BC| \cos C}$ で、内積の平方根となっている。各頂点でそのような円を描き、さらに対辺を直径とする円を描いたものが図3である。図3の

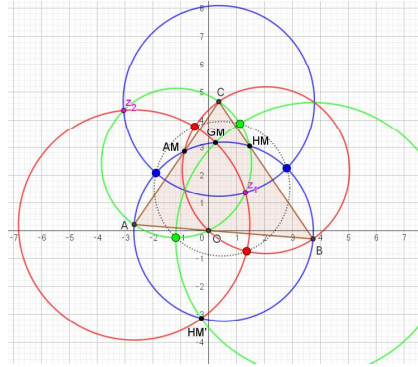


図 3: 頂点を中心とする円と中点を中心とする円

中で、赤い2つの円は、頂点 A を中心とする円と、辺 a を直径とする円である (緑の2円、青の2円も同様)。同じ色の2円の交点、合計6つの点を眺めると、同一円周上にあるような気がする。証明なしで確かめられるのが実験数学の良いところで、その予想が正しいことがわかり、さらにその円の中心が三角形 ABC の重心 G であることもわかる。もし6点が同一円周上にあるならば、その円の中心が重心であることは、例えば赤い2円の中心が頂点 A を通る中線上にあることからわかる。ここで、この重心を中心とする円 C_G が意味あるものかどうか気がなるところである。試しに外接円 C_O と九点円 C_N (3辺の中点を通る円) を描いてみる。 C_G に関して円の鏡映をとると、外接円と九点円が互いに移りあうようにも見える。実際、実験でそれが正しいことがわかり、重心円 C_G の幾何的な重要性も見えてくる (図4)。一般的に、2つの円が与えられたとき、2つの相似の中

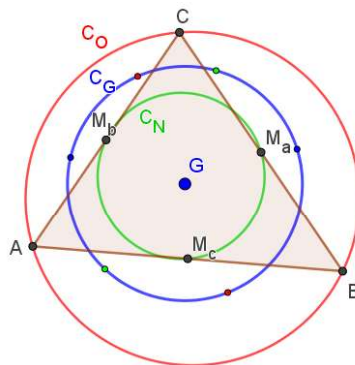


図 4: 外接円の重心円に関する鏡映は九点円である。

心が存在する. 外接円と九点円に対する相似の中心は, 垂心 H と重心 G である. 九点円は, 垂心を中心として外接円を $1/2$ 倍したものである. また, 九点円は, 重心を中心として外接円を $-1/2$ 倍したものにもなっている (図5). 重心が相似の中心になっていることを考えると, 重心円が存在することはむしろ自然なことといえるかもしれない.

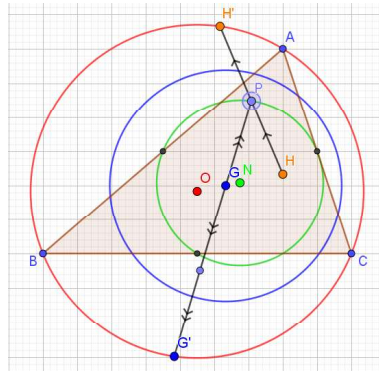


図 5: 外接円と九点円の2つの相似の中心

4 垂心中心の円

外心 O , 重心 G , 九点円の中心 N , そして垂心 H は, Euler 線上にこの順番で調和点列をなす. すなわち, 複比の値が $(O, N, G, H) = -1$ である. さて, 外接円 C_O , 九点円 C_N , 重心円 C_G があるのならば, 垂心を中心とする円があっても不思議ではない. 垂心を中心とする円としては, 方べきを考慮に入れた円が考えられる. 図6は, 3垂線と方べきの関係を表した図である. 垂線の足を H_A, H_B, H_C とするとき, 方向も考慮した3つの方べき $HA \cdot HH_A, HB \cdot HB_H, HC \cdot HH_C$ の値は符号も含めて等しくなる. そのことは, 各辺を直径とする円を考えると容易にわかる. 鋭角三角形の場合は, 方べきの値は負になり, 鈍角三角形の場合は正になる. 鋭角三角形と鈍角三角形では状況が異なるので, 以下の議論では, 対象とする三角形を鋭角三角形に限定して考察を進めることにする. 垂心円 C_H を, 垂

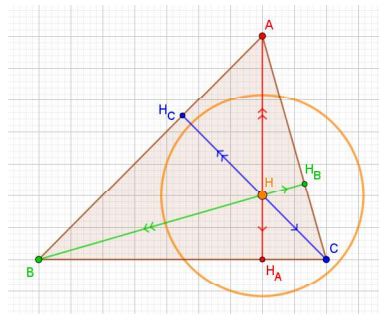


図 6: 方べきを考慮に入れた垂心円

心 H を中心として, 半径が $\sqrt{-HA \cdot HH_A}$ ($= \sqrt{-HB \cdot HB_H} = \sqrt{-HC \cdot HH_C}$) である

円と定義しよう. さて, 図6は2次元図形であるが, これを3次元直交軸があって, 原点に中心を持つ球面をある視点(原点と三角形の垂心が重なるような視点)から見た投影図と考えると, そのように見えなくもない. 実は, この垂心円は, 3次元直交軸を利用すると簡単に作図することができる. 図7は, 3次元直交軸上に3頂点 $A(\alpha, 0, 0)$, $B(0, \beta, 0)$, $C(0, 0, \gamma)$

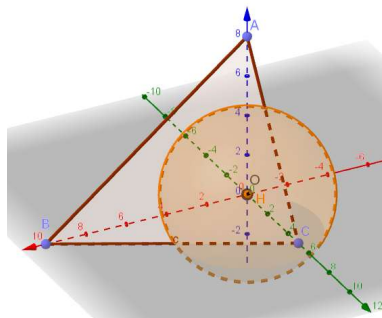


図 7: 3次元直交軸を利用した垂心円の作図

を配置した鋭角三角形に対して垂心円を作図する方法を示している. 垂心 H を中心として原点 $O(0, 0, 0)$ を通る球面を考え, その球面と平面 ABC との交線をとると, それが垂心円 C_H になっている. このことは, 各辺を直径とする球面がいずれも原点 O を通過することから容易にわかる. ここで, 重心円 C_G が垂心円 C_H と同じ方法で作図できないかを考えてみよう. 図7の設定の下では, $\sqrt{|AC||BC| \cos C} = \gamma$ となり, 重心 G を通り, 原点 O を通る球面は, 重心円 C_G を大円に持つことがわかる. したがって, 2つの円 C_G, C_H は, とともに原点 O を通る球面を用いて簡単に作図できることがわかる(図8). ここで注

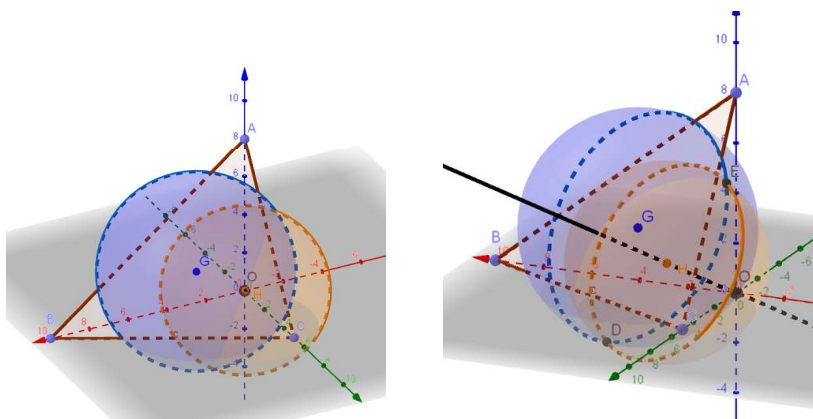


図 8: 3次元直交軸を利用した垂心円と重心円の作図

意したいことは, 垂心円と重心円の交点についてである. この2交点は, 垂心円 C_H の対心点となっている(図8の右図の点 D と E). 実は, この事実が後に平面図形を球面上で考えるきっかけとなっている.

5 6つの図形の球面での統合

岩田至康の幾何学大辞典 [2] を紐解くと、次のように書かれている。

幾何学大辞典 1 岩田至康編 (槇書店) P. 280

(4) 三角形に関する共軸円

353 三角形の外接円, 9点円, 極円, 垂重円 (HG を直径とする円) および接線三角形の外接円はみな共軸である. その根軸を垂足軸という. (Griffiths)

図9は, 外心を原点とし, Euler線を x 軸に配置し, 三角形の頂点が単位円上にあるとして, 様々な円を描いたものである. 重心 G を決めると, 垂心 H と九点円の中心 N が決まる. 単位円上に頂点 A をとると, 三角形が決定される. 円として, 外接円 C_O (単位円), 重心円 C_G , 九点円 C_N , 垂重円 C_{GH} , 以上4つの円に直交する共通垂円と垂心円 C_H の6つがある. 根軸 RA は, C_O, C_G, C_N, C_{GH} への方べきがすべて等しい点の集合で垂足軸と呼ばれている. ここで, 図9を球面に描かれた図形を立体射影して得られた像と考えてみよう. 鍵となる点は, 重心円と垂心円との交点である. 垂心円の対心点であることに注

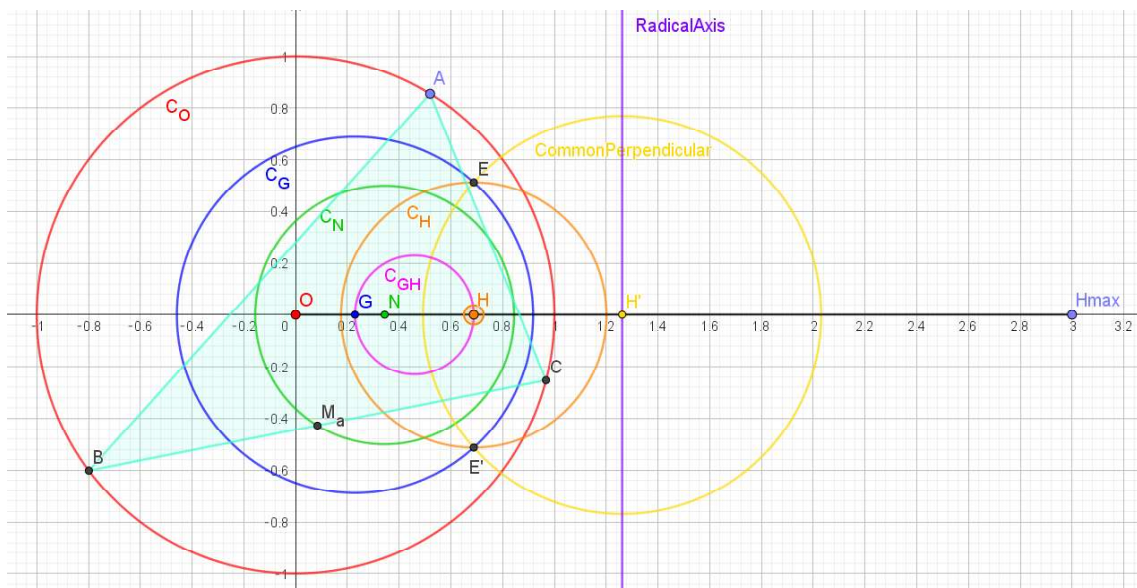


図9: 3次元直交軸を利用した垂心円の作図

意すると, 垂心円を赤道だと思えば, 重心円は赤道の対心点で交わる大円となる. そこで, 垂心 H と前述の原点 O を結ぶ線分を直径とする球面 S を用意し, 原点 O からの立体射影で平面上の図形を S 上に写すことを考えよう. そうしてできたものが図10である. 図10の左図では, 重心円 C_G に関して鏡映の関係にあった外接円 C_O と九点円 C_N が, 球面上では, 重心円 C_G に関して対称の関係になっている (垂重円 C_{GH} と根軸 RA との関係も同様). このように球面上に写すと, 平面上の図形が地軸の傾いた地球上の緯線と公転面のように見えてくる. 根軸と合わせた5つの円と地球上の諸円の対応を表にしたものが表1である. 地軸の傾きは, 元の三角形が正三角形の場合は傾きが 0° で, 三角形が直

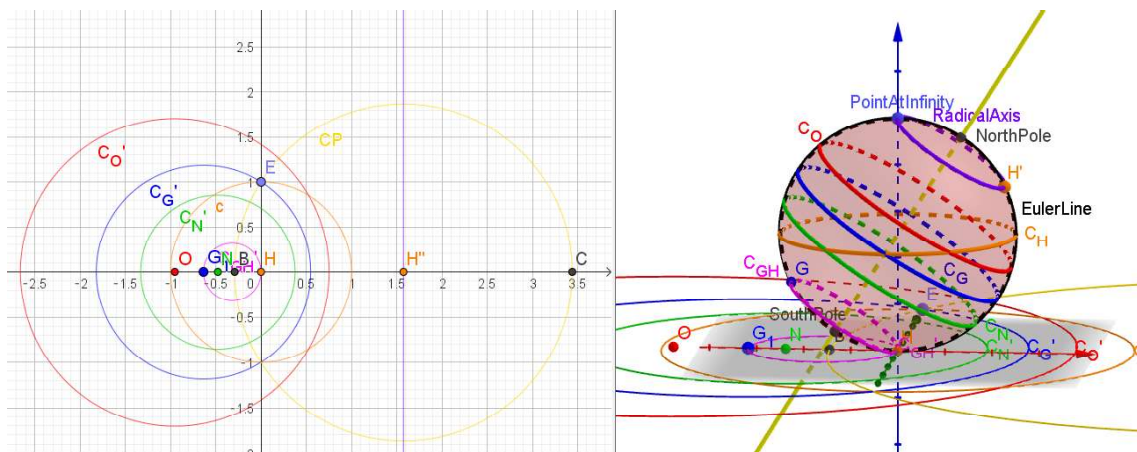


図 10: 立体射影で球面に引き戻した像

角三角形に近づくにしながら傾きが 90° に近づく.

表 1: 球面上の図形と地球での比喻

図形	比喻
垂心円 C_H	公転面
重心円 C_G	赤道
外接円 C_O	北回帰線
九点円 C_N	南回帰線
垂重円 C_{GH}	南極線
垂足軸 RA	北極線

6 緯線の円族

立体射影で球面上に写すと、地球上での緯線に相当するものがいくつか得られた。では、緯線に相当する円族の方程式はどのような式で与えられるのだろうか？一松は、外接円と九点円を含む円族を考え、円族の方程式を重心座標を用いて求めた。ここでは、4章において垂心円を作図するときに利用した3次元直交軸を用いて、平面 ABC 上の円族を、その平面と交わる球面族、あるいは楕円錐族を考えてみよう。鋭角三角形 $\triangle ABC$ の3頂点が直交軸上にあり ($A = (\alpha, 0, 0), B = (0, \beta, 0), C = (0, 0, \gamma)$), 原点を $O = (0, 0, 0)$ とする。 λ をパラメータとして、次のような球面族を考えよう。

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

この球面族は、原点 O を通り、中心が直線 OG 上にある球面族である。このように定義すると、平面 ABC との交線である円として、根軸 ($\lambda = 0$), 外接円 ($\lambda = 1$), 重心円 ($\lambda = \frac{3}{2}$),

九点円 ($\lambda = 2$), 重垂円 ($\lambda = 3$) が得られる (図 11 の左図). また, 平面 ABC の方程式が $x/\alpha + y/\beta + z/\gamma = 1$ であることに注意すると, 上式は簡単に斉次化できる.

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = (\alpha x + \beta y + \gamma z) \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \right).$$

この斉次化により, 球面族から楕円錐族が得られる. 球面族の場合と同様に, 平面 ABC との交線である円として, 根軸 ($\lambda = 0$), 外接円 ($\lambda = 1$), 重心円 ($\lambda = \frac{3}{2}$), 九点円 ($\lambda = 2$), 重垂円 ($\lambda = 3$) が得られる (図 11 の右図).

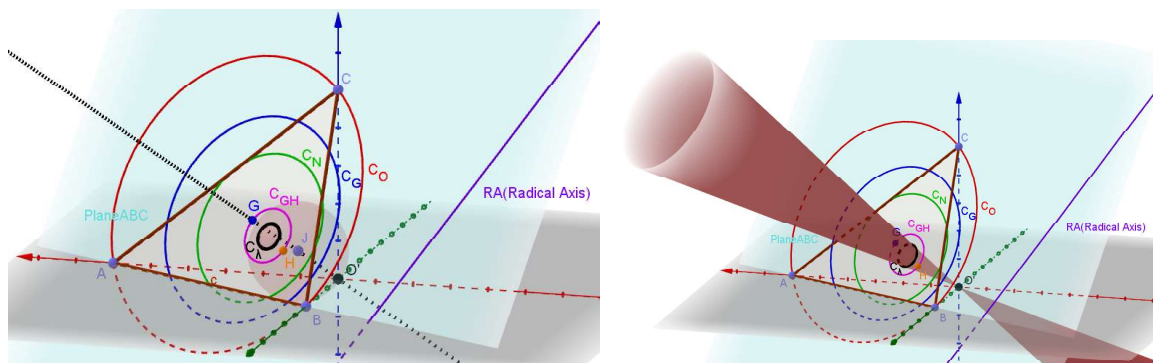


図 11: 球面との交線としての円族 (左), 楕円錐との交線としての円族 (右).

7 実験数学の効果と今後の課題

GeoGebra は幾何学 (Geometry) 的側面と代数学 (alGebra) 的側面を融合させた優れた動的ソフトウェアである. 現代数学は式の計算により抽象度を高め, 視覚では捉えにくい数学的対象を扱える方向に発展してきた. GeoGebra は, 代数的計算と幾何的計算とを結び付け, その相互作用により 3次元空間で数学的オブジェクトを可視化することを可能にする. 今回の実験数学は, 初等幾何学にはまだまだ美しいものがたくさんあることを教えてくれているような気がする. 数学に興味がある人々が GeoGebra を対話型計算ツールとして, 電卓のように身近なものとして扱うようになる時代はすぐそこまで来ていると思われる. 本稿が, 実験数学の実践例として参考になることを願っている. 6章で得られた楕円錐族の式には, ある双対性が見える. また, 今回は鋭角三角形に考察を制限したが, 直角三角形や鈍角三角形では同様の考察が可能なのかなど, 様々な方向への発展が期待される.

参考文献

- [1] 安藤哲哉, 三角形と円の幾何学, 海鳴社, 2006.
- [2] 岩田至康, 幾何学大辞典 1, 槇書店, 1971.

[3] 一松信, 畔柳和生, 重心座標による幾何学, 現代数学社, 2014.