前方後方動的境界条件下での Cahn–Hilliard 方程式について

Survey of Cahn–Hilliard systems with forward-backward dynamic boundary conditions†

深尾 武史 ‡ (龍谷大学・先端理工学部)
Takeshi Fukao (Ryukoku University)

Abstract

この報告では, 適切性やその周辺の研究が近年盛んにされている, 動的境界条件下での Cahn–Hilliard 方程式について, 特に境界上での拡散項に対する粘性消滅の結果, “P. Colli, T. Fukao, and L. Scarpa, J. Evol. Equ., **22** (2022), Article number: 89, 31 pp.” と “P. Colli, T. Fukao, and L. Scarpa, SIAM J. Math. Anal., **54** (2022), 3292–3315” の紹介を中心に GMS モデルと LW モデルの 2 つについて概説を行う. これらの報告は Pavia 大学の Pierluigi Colli 氏と Milano 工科大学の Luca Scarpa 氏との共同研究に基づく.

1. 導入

Cahn–Hilliard 方程式 [6, 7, 40, 41] は相分離現象を記述する偏微分方程式としてよく知られ, 様々な数学/基礎科学/応用研究が行われている. 拡散という現象に注目すると, 自然科学における一般論として物事を均一化する方向に事が進む場合が多いなか, 相分離現象はそれに反し同種の金属が集中する方向に事が進むこと (スピノーダル分解) が, 通常の拡散現象と比べて特徴的な点の 1 つである. これを未知相変数に対する 4 階の偏微分方程式で記述したのが Cahn–Hilliard 方程式である. よって, 未知関数に対して Neumann 境界条件を課す場合が非常に多く, それにより相変数の質量保存則が自然に得られる. 一方, 我々が自然科学に現れる様々な現象を観測する際, 一見すると (質量) 保存則が成立しているように見えない場合もあるだろう. しかし, 実は保存則が成立しているが, 観測レベルでは捉えきれていないということは考えられないだろうか. このような漠然とした問題意識のもと, それまでの動的境界条件下での Cahn–Hilliard 方程式とは異なる種の連立系を考察し, その適切性が [11] で論じられた. ここで, 動的境界条件とは境界の方程式に内部の偏微分方程式が持つ時間微分の階数と同じ (もしくはそれより大きい) 階数の時間微分を含む境界条件を指す. そこで取り扱われたモデルは, 原型が Goldstein–Miranville–Schimperna [30] や Gal[25] によって提唱されており, 標準的な二重井戸型ポテンシャルの場合に, 適切性や解の長時間挙動についてすでにある程度結果が得られていた. なお, このモデルでは総質量保存則が成立する. すなわち, 内部と境界上の積分量の総和が保存する. 以後, このモデルを 3 人の著者の頭文字を取り, GMS モデルと呼ぶことにする. 一方, Liu–Wu[38] では総質量保存則が成立する GMS モデルとは異なり, 内部と境界のそれぞれで質量保存則が成立するモデルが提唱された. 以後, そのモデルを LW モデルと呼ぶことにする. この概説ではこれら GMS モデルと LW モデルのそれぞれに対して, 境界拡散の粘性消滅法により, 境界上で 2 階となる微分方程式への接近について論じる. 特にその極限方程式は前方後方拡散方程式の形をしており, 一見すると非適切な問題に見える点が興味深い.

---

† Survery article of joint works with Pierluigi Colli (Pavia) and Luca Scarpa (Milano).

‡ 科研費 (課題番号:21K03309) および, 公益財団法人 住友財団 基礎科学研究助成 (No.190367) の助成を受けている. 2023 年 3 月まで京都教育大学・教育学部に所属. fukao@math.ryukoku.ac.jp

2. Cahn–Hilliard 方程式から非線形拡散方程式への接近

$0 < T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ は十分滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ をもつ有界領域とする. $\delta > 0$ とし, 次の標準的な Cahn–Hilliard 方程式を考察する:

$$\partial_t u - \Delta\mu = 0 \quad \text{in } Q := (0, T) \times \Omega, \tag{1}$$

$$\mu = -\delta\Delta u + \beta(u) + \delta\pi(u) - f \quad \text{in } Q, \tag{2}$$

ここで, $\beta + \pi$ は二重井戸型ポテンシャル $\mathcal{W}$ の微分に相当し, 特に β を単調項, π を非単調項とする. 例えば $\mathcal{W}(r) = (1/4)(r^2 - 1)^2$ ならば, $\mathcal{W}'(r) = r^3 - r$ となり, $\beta(r) = r^3$, $\pi(r) = -r$ である. ここで, 形式的に $\delta \to 0$ とすれば, (1)–(2) の極限方程式は

$$\partial_t u - \Delta\beta(u) = 0 \quad \text{in } Q,$$

のような非線形拡散方程式となる (ただし, 簡単のため $f \equiv 0$ としてある). ここで, β には単調性のみを仮定することで, (1)–(2) の適切性が論じられることから, 上記非線形拡散方程式はいわゆる退化放物型方程式, すなわち $\beta'(u) = 0$ となる点が存在することを許容する方程式となる (厳密な漸近解析は [12, 17, 18, 19, 20] を参照). 一方, (2) を次の形に差し替えると状況は一変する:

$$\mu = -\delta\Delta u + \beta(u) + \pi(u) \quad \text{in } Q, \tag{3}$$

この場合, 形式的には極限方程式が

$$\partial_t u - \Delta\bigl(\beta(u) + \pi(u)\bigr) = 0 \quad \text{in } Q$$

となり, これはいわゆる前方後方拡散方程式である. 実際, $\beta(r) + \pi(r) = r^3 - r$ の場合, $-1/\sqrt{3} \le u \le 1/\sqrt{3}$ なる領域では拡散項の係数が正となり, 一般には非適切な状況である. この Cahn–Hilliard 方程式 (1) と (3), もしくは (3) に粘性項の付いた粘性 Cahn–Hilliard 方程式から前方後方拡散方程式への接近を議論したのが [4, 5, 31] である. もちろんいずれの場合にも非適切な問題そのものを解いているわけではない. 本質的なこの粘性消滅の着想, すなわち拡散項の係数 δ を 0 に収束させることによる解の漸近解析を, 次に紹介する動的境界条件下での Cahn–Hilliard 方程式に適応してみる.

3. 動的境界条件下での Cahn–Hilliard 方程式

まずはじめに 2 つの Cahn–Hilliard 方程式系 (GMS) と (LW) を紹介する. $\delta \in (0, 1]$ を近似変数, 未知関数を $u, \mu : Q \to \mathbb{R}$ と $u_\Gamma, \mu_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R}$ とし, まずは

$$\partial_t u - \Delta\mu = 0 \quad \text{a.e. in } Q, \tag{4}$$

$$\mu = -\Delta u + \xi + \pi(u) - f, \quad \xi \in \beta(u) \quad \text{a.e. in } Q, \tag{5}$$

$$u_{|\Gamma} = u_\Gamma, \quad \mu_{|\Gamma} = \mu_\Gamma, \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{6}$$

$$\partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mu - \Delta_\Gamma \mu_\Gamma = 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{7}$$

$$\mu_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u - \delta\Delta_\Gamma u_\Gamma + \xi_\Gamma + \pi_\Gamma(u_\Gamma) - f_\Gamma, \quad \xi_\Gamma \in \beta_\Gamma(u_\Gamma) \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{8}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{0,\Gamma} \quad \text{a.e. on } \Gamma \tag{9}$$

を考察する. この初期値境界値問題 (4)–(9) を (GMS) と呼ぶ. ただし, $u_{|\Gamma}$ は u のトレースを意味する. ここで, $\beta + \pi$ や $\beta_\Gamma + \pi_\Gamma$ の例として以下を挙げておく:

- $\beta(r) = r^3$, $\pi(r) = -r$, $D(\beta) = \mathbb{R}$ の場合, $\mathcal{W}$ は次の古典的な二重井戸型ポテンシャル
$$\mathcal{W}(r) = \frac{1}{4}(r^2 - 1)^2;$$

- $\beta(r) = \ln((1+r)/(1-r))$, $\pi(r) = -2cr$, $D(\beta) = (-1,1)$ の場合, $\mathcal{W}$ は次の log 型 (特異型) ポテンシャル
$$\mathcal{W}(r) = \bigl((1+r)\ln(1+r) + (1-r)\ln(1-r)\bigr) - cr^2,$$
ただし, $c > 0$ は凸性を崩す (二重井戸構造を作る) 十分大きな定数;
- $\beta(r) = \partial I_{[-1,1]}(r)$, $\pi(r) = -r$, $D(\beta) = [-1,1]$ の場合, $\mathcal{W}$ は次の滑らかでないポテンシャル
$$\mathcal{W}(r) = I_{[-1,1]}(r) - \frac{1}{2}r^2,$$
ここで, $I_{[-1,1]}$ は閉区間 $[-1,1]$ 上の指示関数, すなわち
$$I_{[-1,1]}(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r \in [-1,1], \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$
また, $\partial I_{[-1,1]}$ は $I_{[-1,1]}$ の劣微分を意味する (例えば, [3] を参照);
- 特に $\beta_\Gamma(r) = 0$, $\pi_\Gamma(r) = -r$, $D(\beta_\Gamma) = \mathbb{R}$ の場合, 対応する境界方程式は後方拡散方程式となる (後方拡散方程式に見える).

一方, 別の問題として未知関数を $u, \mu : Q \to \mathbb{R}$ と $u_\Gamma, w_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R}$ とし,

$$\partial_t u - \Delta \mu = 0 \quad \text{a.e. in } Q, \tag{10}$$
$$\mu = -\Delta u + \xi + \pi(u) - f, \quad \xi \in \beta(u) \quad \text{a.e. in } Q, \tag{11}$$
$$u_{|\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mu = 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{12}$$
$$\partial_t u_\Gamma - \Delta_\Gamma w_\Gamma = 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{13}$$
$$w_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u - \delta \Delta_\Gamma u_\Gamma + \xi_\Gamma + \pi_\Gamma(u_\Gamma) - f_\Gamma, \quad \xi_\Gamma \in \beta_\Gamma(u_\Gamma) \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{14}$$
$$u(0) = u_0 \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{0,\Gamma} \quad \text{a.e. on } \Gamma \tag{15}$$

を考察してみる. この初期値境界値問題 (10)–(15) を (LW) と呼ぶ. (GMS) と (LW) はそれぞれ GMS モデル [30], LW モデル [38] に対応するが, それぞれの導出については [45] の概説論文が詳しい. 注として, (GMS) では

$$\int_\Omega u(t)dx + \int_\Gamma u_\Gamma(t)d\Gamma = \int_\Omega u_0 dx + \int_\Gamma u_{0,\Gamma} d\Gamma \quad \text{for all } t \in [0,T] \tag{16}$$

なる総質量保存則が成立するのに対し, (LW) では内部と境界のそれぞれで

$$\int_\Omega u(t)dx = \int_\Omega u_0 dx, \quad \int_\Gamma u_\Gamma(t)d\Gamma = \int_\Gamma u_{0,\Gamma} d\Gamma \quad \text{for all } t \in [0,T]$$

が成立する. つまり, (GMS) においては, 境界上の観測では一見すると保存則が成立していないように見えるが, 内部とあわせて観測できれば総質量としての保存則 (16) が成立しているということがおこる. また,(GMS) が (6) によって相変数 u とその境界へのトレース u_Γ, 化学ポテンシャル μ とそのトレース μ_Γ で接合されていることに対して, (LW) においては μ と w_Γ に直接関連は無く, つまり内部の化学ポテンシャル μ と境界の化学ポテンシャル w_Γ として独立しており, それらは (10) と (13) によって間接的に関連する点が特徴的である.

GMS モデルは Goldstein–Miranville–Schimperna[30] で提唱され, 標準的な二重井戸型ポテンシャルの場合に, 適切性および解の長時間挙動に対する全列収束の結果が研究された後, 様々な研究が続いている. より広い二重井戸型ポテンシャルの場合に, 弱解の存在や一意性, 連続依存性および強解に関する結果 [11] の他, 時間周期問題は [43], 境界上の熱源 f_Γ を制御項とする最適制御問題は [22], 特異ポテンシャルの場合に純粋層からの分離定理および長時間挙動については [21], 最大正則性については [32] などがある. さらに関連する結果として, 境界を主領域とし内部の方程式を補助条件とする準静的問題への応用が [13] で扱われている. 数値解析に目を向けると有限要素法による結果が [9, 10], 構造保存数値計算に強い [24] の応用研究が [23, 44] や, その他 [35] がある. 一方, LW モデルは Liu–Wu[38] で提唱され, 二重井戸型ポテンシャルにかなり制限をかけるが, 境界拡散の粘性消滅について漸近解析の結果が一部得られている ([27] も参照). より広い二重井戸型ポテンシャルの場合に, 弱解の存在や一意性, 連続依存性や境界に関する結果が [16] で得られている. 有限要素法による数値計算スキームとその収束については [39] の他, [1] の研究もある.

さらに, これら (GMS) と (LW) をつなぐ新しい解釈として, Robin(第 3 種) 境界条件に注目した結果がある. それらの中間に位置する問題として Knopf–Lam–Liu–Metzger[34] らによって次の問題が取り扱われた: $\ell > 0$ をその比を表す変数とし

$$\partial_t u - \Delta\mu = 0 \quad \text{a.e. in } Q, \tag{17}$$

$$\mu = -\Delta u + u^3 - u - f \quad \text{a.e. in } Q, \tag{18}$$

$$u_{|_\Gamma} = u_\Gamma, \quad \ell\partial_{\boldsymbol{\nu}}\mu + \mu_{|_\Gamma} = w_\Gamma, \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{19}$$

$$\partial_t u_\Gamma + \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mu - \Delta_\Gamma w_\Gamma = 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{20}$$

$$w_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u - \delta\Delta_\Gamma u_\Gamma + u_\Gamma^3 - u_\Gamma - f_\Gamma \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{21}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad u_\Gamma(0) = u_{0,\Gamma} \quad \text{a.e. on } \Gamma. \tag{22}$$

境界条件 (19) の第 2 式が μ に対するいわゆる非斉次 Robin(第 3 種) 境界条件であり, さらに w_Γ 自身も (21) で決定されるため未知であるが, (LW) と同様に μ と w_Γ にはトレース条件が課されていない. (17)–(22) において $\ell \to 0$ とすれば, μ と w_Γ のトレース条件が回復するため (GMS) へ, $\ell \to +\infty$ とすれば, μ に対する斉次 Neumann 境界条件が回復するため, (LW) へ接近することが見て取れる. 実際, (20) から左辺第 2 項が消えると (13) となる. この中間に位置する問題に対しては, 長時間挙動の研究 [28] や [2] などの数値解析からの研究が続いている.

4. (GMS) から前方後方拡散方程式への接近

以後, 次の表記を用いる: $H := L^2(\Omega)$, $V := H^1(\Omega)$, $W := H^2(\Omega)$ $H_\Gamma := L^2(\Gamma)$, $Z_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma)$, $V_\Gamma := H^1(\Gamma)$, $W_\Gamma := H^2(\Gamma)$. また, $\boldsymbol{H} := H \times H_\Gamma$ や $\boldsymbol{Z} := \bigl\{\boldsymbol{z} := (z, z_\Gamma) \in V \times Z_\Gamma : z_\Gamma = z_{|_\Gamma} \text{ a.e. on } \Gamma\bigr\}$, $\boldsymbol{V} := \bigl\{\boldsymbol{z} \in V \times V_\Gamma : z_\Gamma = z_{|_\Gamma} \text{ a.e. on } \Gamma\bigr\}$, $\boldsymbol{W} := \bigl\{\boldsymbol{z} \in W \times W_\Gamma : z_\Gamma = z_{|_\Gamma} \text{ a.e. on } \Gamma\bigr\}$ とおく. 以後, $\boldsymbol{z}$ の表記で (z, z_Γ) のような関数の組を意味することにする. つまり $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}$ では $z : \Omega \to \mathbb{R}$ と $z_\Gamma : \Gamma \to \mathbb{R}$ は全く無関係であるが, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}$ や $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$ では z_Γ と z のトレース $z_{|_\Gamma} = \gamma_0 z$ が一致する. さらに, 総質量保存則の効果的な利用から次の関数空間を用意する: $\boldsymbol{H}_0 := \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H} : m(\boldsymbol{z}) = 0\}$, ここで, $m : \boldsymbol{H} \to \mathbb{R}$ は

$$m(\boldsymbol{z}) := \frac{1}{|\Omega| + |\Gamma|}\left\{\int_\Omega z\,dx + \int_\Gamma z_\Gamma\,d\Gamma\right\} \quad \text{for } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}$$

と定義し, さらに簡単のため $m_0 := m(\boldsymbol{u}_0)$ とおく. ただし, $\boldsymbol{u}_0 := (u_0, u_{0,\Gamma})$. また, $\boldsymbol{V}_0 := \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}_0$ とおく. それぞれの関数空間は通常のノルムを備えているが, $\boldsymbol{V}_0$ のノ

ルムについては, 総質量保存則に対応したPoincaré–Wirtingerの不等式を得ることで$|\boldsymbol{z}|_{\boldsymbol{V}_0} := a_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})^{1/2}$ $(\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0)$が採用できる. ここで, 双線形形式$a_\delta : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$を$\delta \in (0,1]$に対して

$$a_\delta(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{z}}) := \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla \tilde{z} dx + \delta \int_\Gamma \nabla_\Gamma z_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma \tilde{z}_\Gamma d\Gamma \quad \text{for } \boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{V}$$

で定義しておく. 実際, ある定数$C_\mathrm{P} > 0$が存在して

$$|\boldsymbol{z}|_{\boldsymbol{V}}^2 \le C_\mathrm{P} |\boldsymbol{z}|_{\boldsymbol{V}_0}^2 \quad \text{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0$$

を満たし, $\boldsymbol{V}_0$からその共役空間$\boldsymbol{V}_0^*$への写像$\boldsymbol{F}$を$\langle \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{z}} \rangle_{\boldsymbol{V}_0^*, \boldsymbol{V}_0} := a_1(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{z}})$と定義すれば$\boldsymbol{F} : \boldsymbol{V}_0 \to \boldsymbol{V}_0^*$は双対写像となる. また, $\boldsymbol{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{H}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{V}_0^*$なる稠密かつコンパクトな埋め込みが成立する ([11, Appendix] を参照).

以上の設定の下, 剣持–Niezgódka–Pawłow[33], 久保 [36] による発展方程式の抽象理論による接近に倣い (GMS) の適切性を論じることができる. そこで, 次の変数変換を用意する:

$$\boldsymbol{v} := (v, v_\Gamma) := (u - m_0, u_\Gamma - m_0), \quad \boldsymbol{v}_0 := (v_0, v_{0,\Gamma}) := (u_0 - m_0, u_{0,\Gamma} - m_0).$$

また, 次の表記を用いる: $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{z}) := (\beta(z), \beta_\Gamma(z_\Gamma))$, $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{z}) := (\pi(z), \pi_\Gamma(z_\Gamma))$.

以後, 以下を仮定する:

(A1) β, β_Γ: $\mathbb{R} \to 2^\mathbb{R}$は極大単調で, ある適正下半連続凸関数$\widehat{\beta}, \widehat{\beta}_\Gamma : \mathbb{R} \to [0,\infty]$で$\widehat{\beta}(0) = \widehat{\beta}_\Gamma(0) = 0$を満たすものによって$\beta = \partial\widehat{\beta}$, $\beta_\Gamma = \partial\widehat{\beta}_\Gamma$のように劣微分で表現されている;

(A2) π, $\pi_\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$はLipshitz連続;

(A3) $D(\beta_\Gamma) \subset D(\beta)$で, さらにある定数$\varrho, c_0 > 0$が存在して

$$\bigl|\beta^\circ(r)\bigr| \le \varrho \bigl|\beta_\Gamma^\circ(r)\bigr| + c_0 \quad \text{for all } r \in D(\beta_\Gamma),$$

ここで, $\beta^\circ(r) := \{r^* \in \beta(r) : |r^*| = \min_{s \in \beta(r)} |s|\}$;

(A4) $m_0 \in \mathrm{int} D(\beta_\Gamma)$でさらに$\widehat{\beta}(u_0) \in L^1(\Omega)$, $\widehat{\beta}_\Gamma(u_{0,\Gamma}) \in L^1(\Gamma)$が成立する;

(A5) $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{V}$.

βが一価写像であればもちろん$\beta^\circ = \beta$である. また$\beta = \beta_\Gamma$の場合には(A3)の仮定は自動的に成立する. すなわち, (A3)は内部と境界で異なるポテンシャルを取り扱うための1つの条件で, βは(A3)の意味でβ_Γに支配されている (例えば [8]). Allen–Cahn型の動的境界条件の場合であれば, 支配関係が逆の仮定での取り扱いも [29] にある.

このとき, (GMS) に対して以下の弱解の存在定理が成立する:

定理 4.1 [11, Theorem 2.2]. $\delta \in (0,1]$ とする．(A1)–(A5) の下, ある組 $(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{\mu}_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta)$ が次のクラス

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v}_\delta \in H^1(0,T;\boldsymbol{V}_0^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{V}_0) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{W}), \\ \boldsymbol{\mu}_\delta \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}), \quad \boldsymbol{\xi}_\delta \in L^2(0,T;\boldsymbol{H}), \\ \xi_\delta \in \beta(v_\delta + m_0) \ \textit{a.e. in } Q, \quad \xi_{\Gamma,\delta} \in \beta_\Gamma(v_{\Gamma,\delta} + m_0) \ \textit{a.e. on } \Sigma \end{gathered}$$

に存在して

$$\begin{gathered} \bigl\langle \boldsymbol{v}_\delta'(t), \boldsymbol{z} \bigr\rangle_{\boldsymbol{V}_0^*, \boldsymbol{V}_0} + a_1\bigl(\boldsymbol{\mu}_\delta(t), \boldsymbol{z}\bigr) = 0 \quad \textit{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0, \\ \bigl(\boldsymbol{\mu}_\delta(t), \boldsymbol{z}\bigr)_{\boldsymbol{H}} = a_\delta\bigl(\boldsymbol{v}_\delta(t), \boldsymbol{z}\bigr) + \bigl(\boldsymbol{\xi}_\delta(t) + \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{v}_\delta(t) + m_0\mathbf{1}) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{z}\bigr)_{\boldsymbol{H}} \quad \textit{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}, \end{gathered}$$

for a.a. $t \in (0,T)$ で, さらに $\boldsymbol{v}_\delta(0) = \boldsymbol{v}_0$ を満たす.

次の仮定を追加すれば, β が多価写像という強い非線形性の仮定 (A1) の下でも (GMS) に対する強解の存在が証明できる:

(A5)' $\boldsymbol{f} \in H^1(0,T;\boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{f}(0) \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{V} \cap (H^3(\Omega) \times H^3(\Gamma))$, $\boldsymbol{\beta}^\circ(\boldsymbol{u}_0) \in \boldsymbol{V}$.

定理 4.2 [11, Theorem 4.2]. $\delta \in (0,1]$ とする． (A1)–(A4),(A5)' の下, ある組 $(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{\mu}_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta)$ が次のクラス

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}_\delta \in W^{1,\infty}(0,T;\boldsymbol{V}^*) \cap H^1(0,T;\boldsymbol{V}) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{W}), \\ \boldsymbol{\mu}_\delta \in L^\infty(0,T;\boldsymbol{V}) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{W}), \quad \boldsymbol{\xi}_\delta \in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}), \\ \xi_\delta \in \beta(u_\delta) \ \textit{a.e. in } Q, \quad \xi_{\Gamma,\delta} \in \beta_\Gamma(u_{\Gamma,\delta}) \ \textit{a.e. on } \Sigma \end{gathered}$$

に存在して (4)–(9) を満たす.

弱解の存在定理 (定理 4.1) の証明の本質的な着想は, 次の抽象発展方程式の初期値問題とその近似解に対する一様評価の工夫にある:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{v}_\delta'(t) + \partial\varphi\bigl(\boldsymbol{v}_\delta(t)\bigr) = \boldsymbol{P}\bigl(-\boldsymbol{\xi}_\delta(t) - \boldsymbol{\pi}\bigl(\boldsymbol{v}_\delta(t) + m_0\mathbf{1}\bigr) + \boldsymbol{f}(t)\bigr) \quad \text{in } \boldsymbol{H}_0, \\ \boldsymbol{\xi}_\delta(t) \in \boldsymbol{\beta}\bigl(\boldsymbol{v}_\delta(t) + m_0\mathbf{1}\bigr) \quad \text{in } \boldsymbol{H}, \quad \text{for a.a. } t \in (0,T), \\ \boldsymbol{v}_\delta(0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{in } \boldsymbol{H}_0, \end{gathered}$$

ここで, $\varphi : \boldsymbol{H}_0 \to [0,\infty]$ は次の適正下半連続凸関数

$$\varphi(\boldsymbol{z}) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla z|^2 dx + \dfrac{\delta}{2}\int_\Gamma |\nabla_\Gamma z_\Gamma|^2 d\Gamma & \text{if } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0, \\ \infty \quad \text{if } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}_0 \setminus \boldsymbol{V}_0. \end{cases}$$

また, $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}_0$ は $\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} := \boldsymbol{z} - m(\boldsymbol{z})\mathbf{1}$, ただし $\mathbf{1} := (1,1)$. このとき, 楕円型正則性と Δz の評価を有効に使えば $D(\partial\varphi) = \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{V}_0$ でさらに, $\partial\varphi(\boldsymbol{z}) = (-\Delta z, \partial_{\boldsymbol{\nu}} z - \delta\Delta_\Gamma z_\Gamma)$ を得る ([11, Appendix] を参照). この場合, $\boldsymbol{\mu}_\delta = \partial\varphi(\boldsymbol{v}_\delta) + \boldsymbol{\xi}_\delta + \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{v}_\delta + m_0\mathbf{1}) - \boldsymbol{f}$ であるが, その $\boldsymbol{V}$ の一様評価を得るのに $\nabla\mu_\delta$, $\nabla_\Gamma\mu_{\Gamma,\delta}$ の評価に加え $m(\boldsymbol{\mu}_\delta)$ の評価を得ることで Poincaré–Wirtinger の不等式が応用できる点が本質的な着想の 1 つである．後述の LW モデルに対する結果ではこの点を別の方法で解決している点にも注目したい.

(GMS) の解に対する一様評価, ならびに $\delta \to 0$ なる収束の議論から以下の前方後方拡散方程式に対する解の存在定理が得られる.

定理 4.3 [14, Theorem 2.8]. (A1)–(A5) の下, ある組 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi})$ が次のクラス

$$\boldsymbol{u} \in H^1(0,T;\boldsymbol{V}^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{Z}), \quad \Delta u \in L^2(0,T;H)$$
$$\boldsymbol{\mu} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}), \quad \boldsymbol{\xi} \in L^2(0,T;H \times Z_\Gamma^*)$$

に存在して

$$\big\langle \boldsymbol{u}'(t), \boldsymbol{z} \big\rangle_{\boldsymbol{V}^*,\boldsymbol{V}} + a_1\big(\boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{z}\big) = 0 \quad \textit{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V},$$

$$\big(\boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}} = \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla z dx + \big(\xi(t), z\big)_H + \big\langle \xi_\Gamma(t), z_\Gamma \big\rangle_{Z_\Gamma^*, Z_\Gamma} + \big(\boldsymbol{\pi}\big(\boldsymbol{u}(t)\big) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{z}\big)_{\boldsymbol{H}}$$
$$\textit{for all } \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}, \tag{23}$$

for a.a. $t \in (0,T)$ で, さらに

$$\xi \in \beta(u) \quad \textit{a.e. in } Q, \tag{24}$$

$$\langle \xi_\Gamma, z_\Gamma - u_\Gamma \rangle_{Z_\Gamma^*, Z_\Gamma} \le \int_\Gamma \widehat{\beta}_\Gamma(z_\Gamma) d\Gamma - \int_\Gamma \widehat{\beta}_\Gamma(u_\Gamma) d\Gamma \quad \textit{for all } z_\Gamma \in Z_\Gamma, \ \textit{a.e. on } (0,T), \tag{25}$$

そして, $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ を満たす. また, $(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{\mu}_\delta, \boldsymbol{\xi}_\delta)$ を定理 4.1 で得られた組とすると, $\boldsymbol{u}_\delta := \boldsymbol{v}_\delta + m_0 \mathbf{1}$ とおけば, ある部分列 $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して, 次の意味で収束する:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_{\delta_k} &\to \boldsymbol{u} && \textit{in } C\big([0,T]; \boldsymbol{H}\big), \\
\boldsymbol{u}_{\delta_k} &\to \boldsymbol{u} && \textit{weakly star in } H^1(0,T;\boldsymbol{V}^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{Z}), \\
\Delta u_{\delta_k} &\to \Delta u && \textit{weakly in } L^2(0,T;H), \\
\boldsymbol{\mu}_{\delta_k} &\to \boldsymbol{\mu} && \textit{weakly in } L^2(0,T;\boldsymbol{V}), \\
\boldsymbol{\xi}_{\delta_k} &\to \boldsymbol{\xi} && \textit{weakly in } L^2(0,T;H \times V_\Gamma^*), \\
-\delta_k \Delta_\Gamma u_{\Gamma,\delta_k} + \xi_{\Gamma,\delta_k} &\to \xi_\Gamma && \textit{weakly in } L^2(0,T;Z_\Gamma^*), \\
\delta_k \boldsymbol{u}_{\delta_k} &\to \mathbf{0} && \textit{in } L^\infty\big(0,T;\boldsymbol{V}\big) \quad \textit{as } k \to +\infty.
\end{aligned}$$

条件 (A5) は緩和できる. また, 解の正則性とともに上式 (23) は次の意味で解釈される [14, Remark 2.5]:

$$\mu = -\Delta u + \xi + \pi(u) - f \quad \text{a.e. in } Q,$$
$$\mu_\Gamma = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u + \xi_\Gamma + \pi_\Gamma(u_\Gamma) - f_\Gamma \quad \text{in } Z_\Gamma^* \quad \text{a.e. in } (0,T).$$

さらに, 正則性の欠落から ξ と異なり, ξ_Γ は (24) のような形ではなく (25) の形で得られる点にも注意したい. この弱い意味を改良する結果も得られている [14, Theorem 2.10]. また, u, u_Γ に対する連続依存性 [14, Theorem 2.8] や, $\delta \to 0$ に対する誤差評価も得られる [14, Theorem 2.12]:

5. (LW) から前方後方拡散方程式への接近

LW モデルからの粘性消滅を考察すると, $\delta = 0$ に対応する問題は, GW モデルと比べて (7) の $\partial_{\boldsymbol{\nu}} \mu$ が (13) のように消えるため, やや煩雑さがなくなる. 実際, (10)–(14) の $\delta \to 0$ に対応する問題で w_Γ を介さずに表現すれば

$$\partial_t u - \Delta \mu = 0 \quad \text{a.e. in } Q, \tag{26}$$

$$\mu = -\Delta u + \xi + \pi(u) - f, \quad \xi \in \beta(u) \quad \text{a.e. in } Q, \tag{27}$$

$$u_{|\Gamma} = u_\Gamma, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mu = 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma, \tag{28}$$

$$\partial_t u_\Gamma - \Delta_\Gamma\big(\partial_{\boldsymbol{\nu}} u + \xi_\Gamma + \pi_\Gamma(u_\Gamma) - f_\Gamma\big) = 0, \quad \xi_\Gamma \in \beta_\Gamma(u_\Gamma) \quad \text{a.e. on } \Sigma \tag{29}$$

と形式的にはなるであろう. よって, 例えば $\beta_\Gamma(r) \equiv 0$, $\pi_\Gamma(r) = -r$, $f_\Gamma \equiv 0$ を選ぶことができれば, 境界では

$$\partial_t u_\Gamma + \Delta_\Gamma u_\Gamma = \Delta_\Gamma \partial_{\boldsymbol{\nu}} u \quad \text{a.e. on } \Sigma$$

のような不良設定に見える方程式を考察していることになる.

(LW) の適切性やその粘性消滅を考察するにあたり, 以下の設定を追加する: まず双線形形式 $a_\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$, $a_\Gamma : V_\Gamma \times V_\Gamma \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$a_\Omega(z, \tilde{z}) := \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla \tilde{z} dx \quad \text{for } z, \tilde{z} \in V,$$
$$a_\Gamma(z_\Gamma, \tilde{z}_\Gamma) := \int_\Gamma \nabla_\Gamma z_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma \tilde{z}_\Gamma d\Gamma \quad \text{for } z_\Gamma, \tilde{z}_\Gamma \in V_\Gamma$$

で定義する. また, $m_\Omega : V^* \to \mathbb{R}$, $m_\Gamma : V_\Gamma^* \to \mathbb{R}$ を

$$m_\Omega(z^*) := \frac{1}{|\Omega|} \langle z^*, 1 \rangle_{V^*,V} \quad \text{for } z^* \in V^*,$$
$$m_\Gamma(z_\Gamma^*) := \frac{1}{|\Gamma|} \langle z_\Gamma^*, 1 \rangle_{V_\Gamma^*,V_\Gamma} \quad \text{for } z_\Gamma^* \in V_\Gamma^*$$

と定義する. これらを用いて, $H_0 := \{z \in H : m_\Omega(z) = 0\}$, $V_0 := V \cap H_0$, $H_{\Gamma,0} := \{z_\Gamma \in H_\Gamma : m_\Gamma(z_\Gamma) = 0\}$, $V_{\Gamma,0} := V_\Gamma \cap H_{\Gamma,0}$ と定義すると, a_Ω や a_Γ はそれぞれ V_0 や $V_{\Gamma,0}$ の内積となり, 次の Poincaré–Wiltinger の不等式が成立する: ある定数 $C_\mathrm{P} > 0$ が存在して

$$|z|_V^2 \le C_\mathrm{P}\Big(\big|z - m_\Omega(z)\big|_{V_0}^2 + \big|m_\Omega(z)\big|^2 \Big) \quad \text{for all } z \in V,$$
$$|z|_V^2 \le C_\mathrm{P} |z|_{V_0}^2 \quad \text{for all } z \in V_0,$$
$$|z_\Gamma|_V^2 \le C_\mathrm{P}\Big(\big|z_\Gamma - m_\Gamma(z_\Gamma)\big|_{V_{\Gamma,0}}^2 + \big|m_\Gamma(z_\Gamma)\big|^2 \Big) \quad \text{for all } z_\Gamma \in V_\Gamma,$$
$$|z_\Gamma|_{V_\Gamma}^2 \le C_\mathrm{P} |z_\Gamma|_{V_{\Gamma,0}}^2 \quad \text{for all } z_\Gamma \in V_{\Gamma,0}.$$

また, $F : V_0 \to V_0^*$ や $F_\Gamma : V_{\Gamma,0} \to V_{\Gamma,0}^*$ を

$$\langle F z, \tilde{z} \rangle_{V_0^*,V_0} := a_\Omega(z, \tilde{z}) \quad \text{for } z, \tilde{z} \in V_0,$$
$$\langle F_\Gamma z_\Gamma, \tilde{z}_\Gamma \rangle_{V_{\Gamma,0}^*,V_{\Gamma,0}} := a_\Gamma(z_\Gamma, \tilde{z}_\Gamma) \quad \text{for } z_\Gamma, \tilde{z}_\Gamma \in V_{0,\Gamma}$$

で用意すれば, これらは双対写像になる.

(LW) の適切性を議論するにあたり, 初期値に対する仮定 (A6) を用意しておく:

(A6) $m_\Omega(u_0) \in \mathrm{int} D(\beta)$, $m_\Gamma(u_{0,\Gamma}) \in \mathrm{int} D(\beta_\Gamma)$, $\widehat{\beta}(u_0) \in L^1(\Omega)$, $\widehat{\beta}_\Gamma(u_{0,\Gamma}) \in L^1(\Gamma)$.

定理 5.1 [16, Theorem 2.3]. $\delta \in (0, 1]$ とする. (A1)–(A3),(A5),(A6) の下, ある組 $(u_\delta, \mu_\delta, \xi_\delta, u_{\Gamma,\delta}, w_{\Gamma,\delta}, \xi_{\Gamma,\delta})$ が次のクラス

$$u_\delta \in H^1(0,T;V^*) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;W),$$
$$\mu_\delta \in L^2(0,T;V), \quad \xi_\delta \in L^2(0,T;H),$$
$$u_{\Gamma,\delta} \in H^1(0,T;V_\Gamma^*) \cap L^\infty(0,T;V_\Gamma) \cap L^2(0,T;W_\Gamma),$$
$$w_{\Gamma,\delta} \in L^2(0,T;V_\Gamma), \quad \xi_{\Gamma,\delta} \in L^2(0,T;H_\Gamma)$$

に存在して

$$\left\langle u_\delta'(t), z\right\rangle_{V^*,V} + a_\Omega\bigl(\mu_\delta(t), z\bigr) = 0 \quad \textit{for all } z \in V, \ \textit{for a.a. } t \in (0,T), \tag{30}$$

$$\mu_\delta = -\Delta u_\delta + \xi_\delta + \pi(u_\delta) - f, \quad \xi_\delta \in \beta(u_\delta) \ \textit{a.e. in } Q, \tag{31}$$

$$(u_\delta)_{|\Gamma} = u_{\Gamma,\delta} \quad \textit{a.e. on } \Sigma, \tag{32}$$

$$\left\langle u_{\Gamma,\delta}'(t), z_\Gamma\right\rangle_{V_\Gamma^*,V_\Gamma} + a_\Gamma\bigl(w_{\Gamma,\delta}(t), z_\Gamma\bigr) = 0 \quad \textit{for all } z_\Gamma \in V_\Gamma, \ \textit{for a.a. } t \in (0,T), \tag{33}$$

$$w_{\Gamma,\delta} = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u_\delta - \delta\Delta_\Gamma u_{\Gamma,\delta} + \xi_{\Gamma,\delta} + \pi_\Gamma(u_{\Gamma,\delta}) - f_\Gamma, \quad \xi_{\Gamma,\delta} \in \beta_\Gamma(u_{\Gamma,\delta}) \ \textit{a.e. on } \Sigma \tag{34}$$

で, さらに $u_\delta(0) = u_0$, $u_{\Gamma,\delta}(0) = u_{0,\Gamma}$ を満たす.

(GMS) と同様に (LW) に対しても強解の存在 [16, Theorem 4.1], 連続依存性 [16, Theorem 2.4] が得られている.

(LW) の粘性消滅を議論するにあたり, 付加条件 (A7) を用意しておく:

(A7) $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{V} \cap (L^\infty(\Omega) \times (L^\infty(\Gamma))$ でさらに

$$\left[\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} u_0(x), \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} u_0(x)\right] \subset \mathrm{int}D(\beta),$$
$$\left[\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Gamma} u_{0,\Gamma}(x), \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Gamma} u_{0,\Gamma}(x)\right] \subset \mathrm{int}D(\beta_\Gamma),$$

粘性消滅の議論では付加条件 (A7) によって, β や β_Γ に対する評価 [42, Appendix, Proposition A.1], [29, p.908] が応用できる ([15, 4th estimate, p.19]). (LW) モデルに対する粘性消滅の結果は以下の通りである.

定理 5.2 [15, Theorem 2.2]. (A1)–(A3), (A7) の下, ある組 $(u, \mu, \xi, u_\Gamma, w_\Gamma, \xi_\Gamma)$ が次のクラス

$$u \in H^1(0,T;V^*) \cap L^\infty(0,T;V), \quad \Delta u \in L^2(0,T;H),$$
$$\mu \in L^2(0,T;V), \quad \xi \in L^2(0,T;H),$$
$$u_\Gamma \in H^1(0,T;V_\Gamma^*) \cap L^\infty(0,T;Z_\Gamma),$$
$$w_\Gamma \in L^2(0,T;V_\Gamma), \quad \xi_\Gamma \in L^2(0,T;Z_\Gamma^*)$$

に存在して

$$\left\langle u'(t), z\right\rangle_{V^*,V} + a_\Omega\bigl(\mu(t), z\bigr) = 0 \quad \textit{for all } z \in V, \ \textit{for a.a. } t \in (0,T),$$
$$\mu = -\Delta u + \xi + \pi(u) - f, \quad \xi \in \beta(u) \quad \textit{a.e. in } Q,$$
$$u_{|\Gamma} = u_\Gamma \quad \textit{a.e. on } \Sigma,$$
$$\left\langle u_\Gamma'(t), z_\Gamma\right\rangle_{V_\Gamma^*,V_\Gamma} + a_\Gamma\bigl(w_\Gamma(t), z_\Gamma\bigr) = 0 \quad \textit{for all } z_\Gamma \in V_\Gamma, \ \textit{for a.a. } t \in (0,T),$$
$$\bigl(w_\Gamma(t), z_\Gamma\bigr)_{H_\Gamma} = \left\langle \partial_{\boldsymbol{\nu}} u(t) + \xi_\Gamma(t), z_\Gamma\right\rangle_{Z_\Gamma^*,Z_\Gamma} + \bigl(\pi_\Gamma\bigl(u_\Gamma(t)\bigr) - f_\Gamma(t), z_\Gamma\bigr)_{H_\Gamma},$$
$$\left\langle \xi_\Gamma(t), z_\Gamma - u_\Gamma(t)\right\rangle_{Z_\Gamma^*,Z_\Gamma} \le \int_\Gamma \widehat{\beta}_\Gamma(z_\Gamma)d\Gamma - \int_\Gamma \widehat{\beta}_\Gamma\bigl(u_\Gamma(t)\bigr)d\Gamma$$
$$\textit{for all } z_\Gamma \in Z_\Gamma, \ \textit{for a.a. } t \in (0,T)$$

で, さらに $u(0)=u_0$, $u_\Gamma(0)=u_{0,\Gamma}$ を満たす. また, $(u_\delta,\mu_\delta,\xi_\delta,u_{\Gamma,\delta},w_{\Gamma,\delta},\xi_{\Gamma,\delta})$ を定理 5.1 で得られた組とすると, ある部分列 $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して, 次の意味で収束する:

$$
\begin{aligned}
u_{\delta_k} &\to u && \textit{in } C\bigl([0,T];H\bigr),\\
u_{\delta_k} &\to u && \textit{weakly star in } H^1(0,T;V^*)\cap L^\infty(0,T;V),\\
\Delta u_{\delta_k} &\to \Delta u && \textit{weakly in } L^2(0,T;H),\\
\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_{\delta_k} &\to \partial_{\boldsymbol{\nu}} u && \textit{weakly in } L^2(0,T;Z_\Gamma^*),\\
u_{\Gamma,\delta_k} &\to u_\Gamma && \textit{in } C\bigl([0,T];H_\Gamma\bigr),\\
u_{\Gamma,\delta_k} &\to u_\Gamma && \textit{weakly star in } H^1(0,T;V_\Gamma^*)\cap L^\infty(0,T;Z_\Gamma),\\
\mu_{\delta_k} &\to \mu && \textit{weakly in } L^2(0,T;V),\\
w_{\Gamma,\delta_k} &\to w_\Gamma && \textit{weakly in } L^2(0,T;V_\Gamma),\\
\xi_{\delta_k} &\to \xi && \textit{weakly in } L^2(0,T;H),\\
\xi_{\Gamma,\delta_k} &\to \xi_\Gamma && \textit{weakly in } L^2(0,T;V_\Gamma^*),\\
-\delta_k\Delta_\Gamma u_{\Gamma,\delta_k}+\xi_{\Gamma,\delta_k} &\to \xi_\Gamma && \textit{weakly in } L^2(0,T;Z_\Gamma^*) \quad \textit{as } k\to+\infty.
\end{aligned}
$$

GMS モデルの場合と同様に, ξ_Γ に関する弱い意味を改良する結果も得られている [15, Theorem 2.6]. u, u_Γ に対する連続依存性 [15, Theorem 2.5] や, $\delta\to 0$ に対する誤差評価 [15, Theorem 2.8] も同様である.

定理 5.1 の証明の鍵として一様評価に関する 2 つの着想があげられる. 1 つめは質量 0 の試験関数の選び方にある. Cahn–Hilliard 方程式でよく用いられる方法 [11, 36] では, (30)–(34) に対応する近似問題 (β と β_Γ の Yosida 近似) を考察し, (31) で $u_\delta - m_\Omega(u_0)$ を, (30) で $F^{-1}(u_\delta - m_\Omega(u_0))$ を試験関数に選ぶ形で, それらを混ぜて一様評価を得る. その際, (GMS) では総質量 0 の空間へ射影するため定数 m_0 を引けばよく, 形式的には

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\mu_\delta-\xi_\delta-\pi(u_\delta)+f,u_\delta-m_0\bigr)_H\\
&=(-\Delta u_\delta,u_\delta-m_0)_H\\
&=(\nabla u_\delta,\nabla u_\delta)_H-(\partial_{\boldsymbol{\nu}}u_\delta,u_{\Gamma,\delta}-m_0)_{H_\Gamma}\\
&=|\nabla u_\delta|_H^2-\bigl(w_{\Gamma,\delta}-\delta\Delta_\Gamma u_{\Gamma,\delta}+\xi_{\Gamma,\delta}+\pi_\Gamma(u_{\Gamma,\delta})-f_\Gamma,u_{\Gamma,\delta}-m_0\bigr)_{H_\Gamma}
\end{aligned}
$$

のように計算が進む. すなわち, $\partial_{\boldsymbol{\nu}}u_\delta$ の項は相殺される. 一方, (LW) では質量保存則が内部と境界のそれぞれで成立するので, 同じ着想は (31) で $u_\delta - m_\Omega(u_0)$ を, (30) で $F^{-1}(u_\delta - m_\Omega(u_0))$ を, (34) で $u_{\Gamma,\delta}-m_\Gamma(u_{0,\Gamma})$ を, (33) で $F_\Gamma^{-1}(u_{\Gamma,\delta}-m_\Gamma(u_{0,\Gamma}))$ を試験関数に選ぶことに対応し

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\mu_\delta-\xi_\delta-\pi(u_\delta)+f,u_\delta-m_\Omega(u_0)\bigr)_H\\
&=\bigl(-\Delta u_\delta,u_\delta-m_\Omega(u_0)\bigr)_H\\
&=(\nabla u_\delta,\nabla u_\delta)_H-\bigl(\partial_{\boldsymbol{\nu}}u_\delta,u_{\Gamma,\delta}-m_\Omega(u_0)\bigr)_{H_\Gamma}\\
&=|\nabla u_\delta|_H^2-\bigl(\partial_{\boldsymbol{\nu}}u_\delta,u_{\Gamma,\delta}-m_\Gamma(u_{0,\Gamma})\bigr)_{H_\Gamma}-\bigl(\partial_{\boldsymbol{\nu}}u_\delta,m_\Gamma(u_{0,\Gamma})-m_\Omega(u_0)\bigr)_{H_\Gamma}\\
&=|\nabla u_\delta|_H^2-\bigl(w_{\Gamma,\delta}-\delta\Delta_\Gamma u_{\Gamma,\delta}+\xi_{\Gamma,\delta}+\pi_\Gamma(u_{\Gamma,\delta})-f_\Gamma,u_{\Gamma,\delta}-m_\Gamma(u_{0,\Gamma})\bigr)_{H_\Gamma}\\
&\quad-\bigl(\partial_{\boldsymbol{\nu}}u_\delta,m_\Gamma(u_{0,\Gamma})-m_\Omega(u_0)\bigr)_{H_\Gamma}
\end{aligned}
$$

のように $\partial_{\boldsymbol{\nu}}u_\delta$ の項が残ってしまう. 直接これを取り扱ったのが Liu–Wu[38] であるが, 粘性消滅を議論するにはかなり特殊な「geometric assumption」

$$C_{\mathcal{R}}|\Gamma|^{1/2}|\Omega|^{-1}<1$$

を仮定して, さらには $\beta_\Gamma + \pi_\Gamma$ にも厳しい増大条件を仮定して議論が進められた (Liu–Wu[38, Theorem 3.2, Remarks 3.3, 3.4]). 実際, $C_\mathcal{R} > 0$ はトレース $\gamma_0 : V \to Z_\Gamma$ の回復 $\mathcal{R} : Z_\Gamma \to V$ に対する定数

$$|\mathcal{R}z|_V \le C_\mathcal{R}|z|_{Z_\Gamma}$$

であり, 一般に $\mathcal{R}$ は一意的ではないことからもやや厳しい仮定であった. これを解消する着想が [27] にあり [15] ではこれを踏襲した. そこでは (30) で $F^{-1}(u_\delta - u_0)$ を選ぶことができるので, (31) で $u_\delta - u_0$ を, 同じく (33) で $F_\Gamma^{-1}(u_{\Gamma,\delta} - u_{0,\Gamma})$ を選ぶことができる (初期条件 (A7) のトレース条件が利用できる) ので (34) で $u_{\Gamma,\delta} - u_{0,\Gamma}$ を選び $\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_\delta$ の項が相殺できる.

2 つめは μ_δ の H における一様評価である. (GMS) では Poincaré–Wirtinger の不等式を利用したが, (LW) では Ehrling の補題 (例えば [37]) を応用し, 次の事実を用いた: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある定数 $C_\varepsilon > 0$ が存在して $|\mu_\delta|_H^2 \le \varepsilon|\nabla\mu_\delta|_H^2 + C_\varepsilon|\mu_\delta|_{W_0^*}$. ここで, $V \hookrightarrow\hookrightarrow H \hookrightarrow W_0^*$ に注意する (ただし W_0^* は $W_0 := W \cap H_0^1(\Omega)$ の共役空間).

これらの着想をもとにして, 一様評価およびコンパクト性から得られる弱収束, 強収束と極限操作によって粘性消滅が議論できる.

References

[1] X. Bao and H. Zhang, Numerical approximations and error analysis of the Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions, Commun. Math. Sci., **19** (2021), 663–685.

[2] X. Bao and H. Zhang, Numerical approximations and error analysis of the Cahn–Hilliard equation with reaction rate dependent dynamic boundary conditions, J. Sci. Comput., **87** (2021), Paper No. 72, 32 pp.

[3] V. Barbu, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Springer, London 2010.

[4] E. Bonetti, P. Colli, and G. Tomassetti, A non-smooth regularization of a forward-backward parabolic equation, Math. Models Methods Appl. Sci., **27** (2017), 641–661.

[5] L. T. T. Bui, F. Smarrazzo, and A. Tesei, Passage to the limit over small parameters in the viscous Cahn–Hilliard equation, J. Math. Anal. Appl., **420** (2014), 1265–1300.

[6] J. W. Cahn, 新しいパラダイムを求めて, 稲森財団: 京都賞と助成金, 公益財団法人 稲森財団 (2011), 110–153.

[7] J. W. Cahn and J. E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy, J. Chem. Phys., **2** (1958), 258–267.

[8] L. Calatroni and P. Colli, Global solution to the Allen–Cahn equation with singular potentials and dynamic boundary conditions, Nonlinear Anal., **79** (2013), 12–27.

[9] L. Cherfils and M. Petcu, A numerical analysis of the Cahn–Hilliard equation with non-permeable walls, Numer. Math., **128** (2014), 518–549.

[10] L. Cherfils, M. Petcu, and M. Pierre, A numerical analysis on the Cahn–Hilliard equation dynamic boundary conditions, Discrete Contin. Dyn. Syst., **27** (2010), 1511–1533.

[11] P. Colli and T. Fukao, Equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type with singular potentials, Nonlinear Anal., **127** (2015), 413–433.

[12] P. Colli and T. Fukao, Nonlinear diffusion equations as asymptotic limits of Cahn–Hilliard systems, J. Differential Equations, **260** (2016), 6930–6959.

[13] P. Colli and T. Fukao, Cahn–Hilliard equation on the boundary with bulk condition of Allen–Cahn type, Adv. Nonlinear Anal., **9** (2020), 16–38.

[14] P. Colli, T. Fukao, and L. Scarpa, The Cahn–Hilliard equation with forward-backward dynamic boundary condition via vanishing viscosity, SIAM J. Math. Anal., **54** (2022), 3292–3315.

[15] P. Colli, T. Fukao, and L. Scarpa, A Cahn–Hilliard system with forward-backward dynamic boundary condition and non-smooth potentials, J. Evol. Equ., **22** (2022), Paper No. 89, 31 pp.

[16] P. Colli, T. Fukao, and H. Wu, On a transmission problem for equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type with nonsmooth potentials, Math. Nachr., **293** (2020), 2051–2081.

[17] T. Fukao, Convergence of Cahn–Hilliard systems to the Stefan problem with dynamic boundary conditions, Asymptot. Anal., **99** (2016), 1–21.

[18] T. Fukao, Nonlinear diffusion equation with dynamic boundary conditions and related topics, pp. 53–64 in "*Proceedings of 45th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations*", Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics 2020.

[19] T. Fukao, Convergence of Cahn–Hilliard systems to the Stefan problem with dynamic boundary conditions, Asymptot. Anal., **99** (2016), 1–21.

[20] T. Fukao and T. Motoda, Nonlinear diffusion equations with Robin boundary conditions as asymptotic limits of Cahn–Hilliard systems, J. Elliptic Parabol. Equ., **4** (2018), 271–291.

[21] T. Fukao and H. Wu, Separation property and convergence to equilibrium for the equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type with singular potential, Asymptot. Anal., **124** (2021), 303–341.

[22] T. Fukao and N. Yamazaki, A boundary control problem for the equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type, pp.255–280 in "*Solvability, Regularity, Optimal Control of Boundary Value Problems for PDEs*", Springer INdAM Series, Vol.22, Springer, Cham, 2017.

[23] T. Fukao, S. Yoshikawa, and S. Wada, Structure-preserving finite difference schemes for the Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions in the one-dimensional case, Commun. Pure Appl. Anal., **16** (2017), 1–20.

[24] D. Furihata and T. Matsuo, "*Discrete variational derivative method. A structure-preserving numerical method for partial differential equations*", Chapman & Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing, CRC Press, Boca Raton, 2011.

[25] C. Gal, A Cahn–Hilliard model in bounded domains with permeable walls, Math. Methods Appl. Sci., **29** (2006), 2009–2036.

[26] C. G. Gal and M. Meyries, Nonlinear elliptic problems with dynamical boundary conditions of reactive and reactive-diffusive type, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **108** (2014), 1351–1380.

[27] H. Garcke and P. Knopf, Weak solutions of the Cahn–Hilliard system with dynamic boundary conditions: a gradient flow approach, SIAM J. Math. Anal., **52** (2020), 340–369.

[28] H. Garcke, P. Knopf, and S. Yayla, Long-time dynamics of the Cahn–Hilliard equation with kinetic rate dependent dynamic boundary conditions, Nonlinear Anal., **215** (2022), Paper No. 112619, 44 pp.

[29] G. Gilardi, A. Miranville, and G. Schimperna, On the Cahn–Hilliard equation with irregular potentials and dynamic boundary conditions, Commun. Pure Appl. Anal., **8** (2009), 881–912.

[30] G. R. Goldstein, A. Miranville, and G. Schimperna, A Cahn–Hilliard model in a domain with non-permeable walls, Physica D, **240** (2011), 754–766.

[31] K. Kagawa and M. Ôtani, Asymptotic limits of viscous Cahn–Hilliard equation with homogeneous Dirichlet boundary condition, J. Math. Anal. Appl., **512** (2022), Paper No.126106, 23 pp.

[32] N. Kajiwara, Global well-posedness for a Cahn–Hilliard equation on bounded domains with permeable and non-permeable walls in maximal regularity spaces, Adv. Math. Sci. Appl., **27** (2018), 277–298.

[33] N. Kenmochi, M. Niezgódka, and I. Pawłow, Subdifferential operator approach to the Cahn–Hilliard equation with constraint, J. Differential Equations, **117** (1995), 320–354.

[34] P. Knopf, K. F. Lam, C. Liu, and S. Metzger, Phase-field dynamics with transfer of materials: The Cahn–Hillard equation with reaction rate dependent dynamic boundary conditions, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **55** (2021), 229–282.

[35] B. Kovács and C. Lubich, Numerical analysis of parabolic problems with dynamic boundary conditions, IMA J. Numer. Anal., **37** (2017), 1–39.

[36] M. Kubo, The Cahn–Hilliard equation with time-dependent constraint, Nonlinear Anal., **75** (2012), 5672–5685.

[37] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villas, Paris, 1968.

[38] C. Liu and H. Wu, An energetic variational approach for the Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary condition: model derivation and mathematical analysis, Arch. Rational Mech. Anal., **233**(1) (2019), 167–247.

[39] S. Metzger, An efficient and convergent finite element scheme for Cahn–Hilliard equations with dynamic boundary conditions, SIAM J. Numer. Anal., **59** (2021), 219–248.

[40] A. Miranville, The Cahn–Hilliard equation and some of its variants, AIMS Mathematics., **2** (2017), 479–544.

[41] A. Miranville, *The Cahn–Hilliard equation: Recent Advances and Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2019.

[42] A. Miranville and S. Zelik, Robust exponential attractors for Cahn–Hilliard type equations with singular potentials, Math. Methods Appl. Sci., **27** (2004), 545–582.

[43] T. Motoda, Time periodic solutions of Cahn–Hilliard systems with dynamic boundary conditions, AIMS Mathematics, **3** (2018), 263–287.

[44] M. Okumura, T. Fukao, D. Furihata, and S. Yoshikawa, A second-order accurate structure-preserving scheme for the Cahn–Hilliard equation with a dynamic boundary condition, Commun. Pure Appl. Anal., **21** (2022), 355–392.

[45] H. Wu, A review on the Cahn–Hilliard equation: classical results and recent advances in dynamic boundary conditions, Electron. Res. Arch., **30** (2022), 2788–2832.