EXPLICIT STUDY OF THREE-FOLDS

川北 真之

極小モデルプログラム (MMP) は，曲面の極小モデル理論の高次元化として定式化された ([13], [16] 参照)．３次元で森氏がフリップの存在を示してMMPを完成させて以来 ([18])，３次元代数多様体の明示的研究が期待されるようになってきた．本稿では，明示的研究の方向を概説したのち，その流れに沿ってなされた私の３次元因子収縮写像の明示的研究の成果を解説する．原論文は [8], [9], [10], [11] である．なお，基礎体は複素数体とする．

MMPは，マイルドな特異点しか持たない代数多様体に対して，それと双有理で調べやすい代数多様体を与える．因子収縮写像およびフリップから構成される有限列を経て，最終的に極小モデルまたは森ファイバー空間を出力するのである．出力がどちらになるかは，入力された代数多様体の双有理同値類で決定されるが，MMPの過程は自由度があるため，得られる多様体は一意ではない．従って，双有理な極小モデル同士，或いは森ファイバー空間同士の関係の研究は基本的である．

３次元では，双有理な二つの極小モデルはフロップの有限列で結ばれる ([12])．さらに，３次元フロップは解析的な意味で特異点を保つ ([14])．よって双有理な３次元極小モデル同士は本質的に類似関係にある．ところが森ファイバー空間については話が単純ではない．最も簡単な例として３次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ を挙げる．これは写像 $\mathbb{P}^3 \to \{\mathrm{pt}\}$ と見て森ファイバー空間となる．ここで $\mathbb{P}^3$ 上の一点 P を中心とするブローアップ $\mathrm{Bl}_P\,\mathbb{P}^3$ を取ると，P からの射影に対応して写像 $\mathrm{Bl}_P\,\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$ が定まる．これは森ファイバー空間となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^3 \arrow[d] & \mathrm{Bl}_P\,\mathbb{P}^3 \arrow[l] \arrow[d] \\
\{\mathrm{pt}\} & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

こうした二つの３次元森ファイバー空間の間の双有理写像は，Sarkisov プログラムによってリンクの有限列に分解される ([2])．例えば $\mathbb{Q}$-Fano 多様体 X から出発するリンクは以下の通りである．まず因子収縮写像 $Y \to X$ で Y へ引き上げる．次いでログフリップの有限列が続く．最終的に森ファイバー空間 $X' \to S'$ が高々因子収縮写像 $Y' \to X'$ を経て得られる．

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d] \arrow[r, dashed] & X' \arrow[d] & & Y' \arrow[d] \\
X \arrow[d] & S' & \text{or} & X' \arrow[d] \\
\{\mathrm{pt}\} & & & S' = \{\mathrm{pt}\}
\end{tikzcd}$$

Corti 氏は，森ファイバー空間 X/S に対して自己双有理同型の数を測る集合 pliability $\mathrm{Pl}(X/S)$ を定義した．すなわち，

$$\mathrm{Pl}(X/S) := \{X'/S' \text{ 森ファイバー空間，} X' \overset{\text{双有理}}{\sim} X\}/\text{square 同値}.$$

ここで全空間が双有理な二つの森ファイバー空間 X/S，X'/S' が square 同値であるとは，次の可換図式を引き起こす底空間の双有理写像があって，

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ S \arrow[r, dotted] & S' \end{tikzcd}$$

底空間の一般点上のファイバーの同型 $X_\eta \cong X'_{\eta'}$ を引き起こすときを言う．特に集合 $\mathrm{Pl}(X/S)$ が一点から成るとき X/S は rigid であると言い，森ファイバー空間の圏では有理多様体と対極に位置する興味深い対象である ([3], [4] 参照)．$\mathbb{P}^4$ 内の滑らかな４次超曲面は，rigid な多様体の例である ([4], [7])．

ここまでに概説した３次元代数多様体の明示的研究の立場では，因子収縮写像およびフリップの明示的理解が基礎となる．３次元フリップについては森氏の存在証明の過程で，また引き続いてなされた Kollár 氏との共同研究 [15] である程度明示的に研究された．一方因子収縮写像については，その明示的研究がMM Pの完成に不要であったため，満足いく結果が得られていなかった．ところが近年，例えば Sarkisov プログラムにおいて $\mathbb{Q}$-Fano 多様体からのリンクが因子収縮写像から出発することから認識される通り，因子収縮写像の明示的理解が不可欠となった．こうして３次元因子収縮写像の明示的研究は基礎的となった．

因子収縮写像を正確に定義する．$f\colon Y \to X$ を高々端末特異点しか持たない代数多様体間の固有射とする．このとき f が因子収縮写像であるとは，Y 上の f の例外集合が素因子であって，$-K_Y$ が f-豊富であることを言う．３次元では例外因子の収縮先は曲線または点であるが，収縮先が曲線の場合は [15] の結果が適用でき，また例外因子が付値として収縮先の曲線から一意に定まる．収縮先が点の場合が本質的である．今後

$$f\colon (Y \supset E) \to (X \ni P)$$

は３次元因子収縮写像で例外因子 E を点 P に収縮させる写像とし，f は芽 $P \in X$ の上で考えることとする．また f から定まる基本的な二つの値を導入しておく．一つは $P \in X$ の指数 n で，nK_X が Cartier となる最小の正整数である．もう一つは食い違い係数 a/n で，関係式 $K_Y = f^*K_X + (a/n)E$ で定義される．

以下，３次元因子収縮写像 f の私の明示的研究の成果を解説する．研究は三段階から構成される．初めに Y の特異点を数値的な意味で分類する．次いで Reid 氏の general elephant 予想を f に対して証明する．最後にそれらを用いて f の明示的記述を与える．

$-E$ は f-豊富であるから，$Y = \mathrm{Proj}_X \bigoplus_{i \geq 0} f_*\mathcal{O}_Y(-iE)$ と表示される．従って X 上のイデアル層 $f_*\mathcal{O}_Y(iE)$ は基本的な対象である．X が Gorenstein のとき，すなわち $n = 1$ のときは $f_*\mathcal{O}_Y(iE)$ を調べれば十分であるが，一般の場合は E と K_Y の結合 $D_{i,j} := iK_Y + jE$ を考え，因子層 $\mathcal{O}_X(iK_X)$ の部分層 $f_*\mathcal{O}_Y(D_{i,j})$ を調べる必要がある．これは次のように説明される．Y 上の任意の点 Q は３次元端末特異点であるから，芽 $Q \in Y$ 上の因子類群の捩れ部分は標準因子 K_Y を生成元に持つ巡回群となる ([12])．ところが X が Gorenstein のときは，K_Y の情報は関係式 $K_Y \sim aE$ によって E の情報に含まれ，E もまた上巡回群の生成元となるのである．

部分層 $f_*\mathcal{O}_Y(D_{i,j})$ の差の次元 $d(i,j) := \dim f_*\mathcal{O}_Y(D_{i,j})/f_*\mathcal{O}_Y(D_{i,j} - E)$ は，数値的研究上の基本量である．川又–Viehweg 消滅定理 ([13]) を用いれば，$d(i,j)$ は条件 $ia/n + j \leq a/n$ の下で Euler–Poincaré 指標 χ の差 $\chi(\mathcal{O}_Y(D_{i,j})) - \chi(\mathcal{O}_Y(D_{i,j} - E))$ として記述できる．もちろん χ を考えるには X および Y を

コンパクト化する必要がある．さらに $d(i,j)$ は特異点版 Riemann–Roch 公式 ([22]) を用いて明示的に計算され，ここに Y 上の特異点の貢献による項が現れる．こうして次元 $d(i,j)$ の解析が Y 上の特異点の数値的情報を引き出す．

分類結果 ([17], [20]) によれば，3 次元端末特異点は小変形によっていくつかの端末商特異点に分解するため，Y 上の特異点からこの手続きを経て得られた端末商特異点の集合 $\{Q,\ \frac{1}{r_Q}(1,-1,b_Q)$ 型 $\}$ が考えられる．ここで $\frac{1}{r_Q}(1,-1,b_Q)$ 型とは，各座標の重みを $(1,-1,b_Q)$ として $\mathbb{C}^3$ を $\mathbb{Z}/(r_Q)$ の作用で割って得られる商特異点を意味する．ともすると集合 $\{(r_Q,b_Q)\}$ の情報が $d(i,j)$ の解析から引き出されると考えられるが，実際はもう少し粗い情報しか得られない．各点 Q の近傍で $E \sim e_Q K_Y$ と書き $e_Q b_Q$ を r_Q で割った剰余を v_Q としたときの，集合 $\{(r_Q,v_Q)\}$ の情報が得られるのみである．これは問題の局所性に起因する．芽 $P \in X$ 上の問題のため，Euler–Poincaré 指標 χ の値は例外因子 E に沿った差を取って初めて意味を持つ．従って例えばその点で E が Cartier となる特異点 Q については，特異点版 Riemann–Roch 公式に寄与する特異点 Q の貢献項が差を取ることで打ち消し合い，ここからは Q の情報は全く得られないのである．

こうして集合 $\{(r_Q,v_Q)\}$ の分類結果が得られる．これに基づき f は，Y 上本質的な商特異点を一つまたは二つ持つ一般型とおよそ十五種類から成る例外型に大別される．十五種類を多く感じるかもしれないが，初等的な数値的議論から例外型の著しい性質が得られる．すなわち，f が例外型のときは a と n が互いに素ならば，$a=1$ $(n \geq 2)$，$a=1,2,3,4$ $(n=1)$ となる．つまり食い違い係数 a/n が非常に小さくなる．特に X が non-Gorenstein の場合，f の食い違い係数は最小値 $1/n$ となる．食い違い係数が 1 以下の例外因子は付値として有限個しかなく，特にそれが最小値となる付値は早川氏によって詳細に調べられている ([5], [6])．よって例外型の因子収縮写像 f の研究の焦点は，a と n が互いに素であるかを判定することとなる．

互いに素かどうかの解析方法は至って簡明である．a と n が共通因子 g を持つとして，$a=ga'$，$n=gn'$ と書く．鍵となるのが因子 $D_{n',-a'}=n'K_Y-a'E=n'f^*K_X$ である．これは数値的に自明だが線型的に非自明な因子である．この因子の存在は a と n が共通因子を持つことの本質であって，問題を難しくする反面，逆手に取れば共通因子を持つ場合の解析の突破口ともなる．芽 $P \in X$ の指数 g 被覆 $P' \in X' = \mathrm{Spec}_X \bigoplus_{i=0}^{g-1} \mathcal{O}_X(in'K_X)$ を取る．重要なのは，得られた写像 $\alpha_X\colon X' \to X$ が Y 上の被覆に持ち上がることである．因子 $D_{n',-a'}=n'f^*K_X$ に伴う g 重被覆 $\alpha_Y\colon Y' \to Y$ によって次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccc}
(Y \supset E) & \xleftarrow{\alpha_Y} & (Y' \supset E' := \alpha_Y^* E) \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\
(X \ni P) & \xleftarrow{\alpha_X} & (X' \ni P')
\end{array}$$

ここで写像 f' は，E' が可約かもしれない点を除けば因子収縮写像の定義を全て満たす．そこで f から集合 $\{(r_Q,v_Q)\}$ を構成したように f' から $\{(r_{Q'},v_{Q'})\}$ を構成すれば，分類結果が $\{(r_{Q'},v_{Q'})\}$ に対しても適用できる．あとは二つの集合 $\{(r_Q,v_Q)\},\{(r_{Q'},v_{Q'})\}$ の対応を考え，a と n が共通因子を持つ可能性が完全に決定される．結論として次を得る．

定理. f は例外型とする．このとき次を除いて a と n は互いに素で，従って $a=1$ $(n \geq 2)$，$a=1,2,3,4$ $(n=1)$ となる．

(i) P は $cD/2$ 型で $a/n=2/2,4/2$.

(ii) P は $cE/2$ 型で $a/n=2/2$.

記号の説明であるが，例えば $cD/2$ 型とは一般超平面切断が D 型の Du Val 特異点となる３次元超曲面特異点を $\mathbb{Z}/(2)$ の作用で割って得られる端末特異点を意味する．なお除外した全ての場合とも f の例は存在し，さらに f の明示的記述を与える方法も存在する．しかしこれらを含む例外は種類が煩雑で食い違い係数も非常に小さく，最初に述べた３次元代数多様体の大域的側面の明示的研究への応用の中で，その都度我々の方法で記述すればよい．

さて一般型の f の解析で本質となるのが general elephant 予想である．general elephant とは単に反標準因子の線型系 $|-K|$ の一般元のことで，定義は Reid 氏による ([22])．彼は，反標準因子が豊富となる３次元の適当な状況下では general elephant は高々Du Val 特異点しか持たないと予想し，これは general elephant 予想として知られている．分類結果に基づく，３次元端末特異点の芽についての主張の観察から，上予想は立てられた．

私の着眼の根拠は，森氏による３次元フリップの存在定理がこの予想の証明を通してフロップの存在に帰着させて得られることである．そもそも X の一般超平面切断の Y 上の双有理変換と例外因子 E のスキーム論的共通部分 C は，消滅定理から $H^1(\mathcal{O}_C)=0$ が従う点で，３次元フリッピング収縮射と状況が等しい．例えば P が滑らかな点の場合の f の記述は Y 上の特異点の数値的分類結果から得られたが，一般の f を統一的に解析，記述するには数値的分類結果のみでは不十分で，general elephant 予想と組み合わせて初めて成功することが分かった．こうして general elephant 予想を目指し，証明したのである．３次元フリッピング収縮射，および例外因子を曲線に収縮させる３次元因子収縮写像の結果 [15], [18], [19] と併せて，最終的に次の結果を得る．

定理. $f\colon Y\to X\ni P$ を３次元双有理基本収縮写像 (フリッピング収縮射または因子収縮写像) の解析的な芽とする．このとき $|-K_Y|$ の一般元は高々Du Val 特異点しか持たない．

ちなみに general elephant 予想の大域的な例では，３次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体について肯定的な結果 [21], [23], [24] がある一方，$h^0(-K)$ が非常に小さいときには反例がある ([1])．

我々の f については general elephant 予想はさらに強い形で示される．Y の general elephant を S，その X 上の双有理変換を S_X として写像 $S\to S_X$ を構成すれば，general elephant 予想からこれは Du Val 特異点 $P\in S_X$ のクレパント部分解消となる．この写像は例外因子の相対グラフの言葉で記述され，次の結果を得る．

定理. f は一般型で，食い違い係数 a/n は最小値 $1/n$ でないとする．このとき次の一方が成立する．

(i) P は cA/n 型.
(ii) P は cD/n 型で $n=1,2$.

なお私の論文 [10] では，X が Gorenstein のときの定理の (ii) の場合が脱落している．訂正は論文 [11] に附記されている．

この定理を用いて f の明示的記述が得られる．

定理. f を上定理の因子収縮写像とする．

(i) P が cA/n 型のとき，芽 $P\in X$ を４次元商特異点 $\mathbb{C}^4/\frac{1}{n}(1,-1,b,0)$ に適当に埋め込んだのち，f は重み付きブローアップとなる．
(ii) P が cD/n 型のとき，芽 $P\in X$ を５次元商特異点 $\mathbb{C}^5/\frac{1}{n}(1,1,1,0,1)$ に適当に埋め込んだのち，f は重み付きブローアップとなる．

面白いのは (ii) の場合，$P \in X$ を5次元商特異点に埋め込んで初めて f が重み付きブローアップとして記述される点である．この現象は P が $cD/2$ 型で食い違い係数が最小値 $1/2$ のときにも早川氏によって確認されている ([6])．最後にこのときの例を挙げる．

例. 芽 $P \in X$ を

$$o \in \left(\begin{array}{c} x_1^2 + x_2x_5 + x_4^{r+2} = 0 \\ x_2x_4 + x_3^{(r+2)/a} + x_5 = 0 \end{array} \right) \subset \mathbb{C}^5/\frac{1}{2}(1,1,1,0,1),$$

で与える．但し $(r+2)/a$ は奇整数とする．$a \neq r+2$ ならば P は $cD/2$ 型の端末特異点である．重み $((r+2)/2, r/2, a/2, 1, (r+4)/2)$ による重み付きブローアップ f は因子収縮写像となる．

References

1. S. Altınok, G. Brown and M. Reid, Fano 3-folds, $K3$ surfaces and graded rings, *Topology and geometry: commemorating SISTAG*, Contemp. Math. **314** (2002), 25-53.
2. A. Corti, Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov, J. Algebraic Geom. **4** (1995), 223-254.
3. ———, Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **281** (2000), 259-312.
4. A. Corti, A. Pukhlikov and M. Reid, Fano 3-fold hypersurfaces, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **281** (2000), 175-258.
5. T. Hayakawa, Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **35** (1999), 515-570.
6. ———, Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities II, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** (2000), 423-456.
7. V. A. Iskovskih and Ju. I. Manin, Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem, Mat. Sb. (N.S.) **86(128)** (1971), 140-166.
8. M. Kawakita, Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points, Invent. Math. **145** (2001), 105-119.
9. ———, Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to compound A_1 points, Compositio Math. **133** (2002), 95-116.
10. ———, General elephants of three-fold divisorial contractions, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 331-362.
11. ———, Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices, preprint, math.AG/0306065.
12. Y. Kawamata, Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces, Ann. of Math. (2) **127** (1988), 93-163.
13. Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, Introduction to the minimal model problem, *Algebraic geometry*, Adv. Stud. Pure Math. **10** (1987), 283-360.
14. J. Kollár, Flops, Nagoya Math. J. **113** (1989), 15-36.
15. J. Kollár and S. Mori, Classification of three-dimensional flips, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 533-703.
16. ———, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics **134** (1998).
17. S. Mori, On 3-dimensional terminal singularities, Nagoya Math. J. **98** (1985), 43-66.
18. ———, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 117-253.
19. ———, Private communication (2003).
20. M. Reid, Minimal models of canonical 3-folds, *Algebraic varieties and analytic varieties*, Adv. Stud. Pure Math. **1** (1983), 131-180.
21. ———, Projective morphisms according to Kawamata, preprint (1983).
22. ———, Young person's guide to canonical singularities, *Algebraic geometry*, Proc. Sympos. Pure Math. **46** (1987), 345-414.
23. V. V. Shokurov, The existence of a line on Fano varieties, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), 922-964.

24. H. Takagi, On classification of $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds of Gorenstein index 2 II, Nagoya Math. J. **167** (2002), 157-216.

東京大学大学院数理科学研究科, 〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3 丁目 8 番 1 号
E-mail address: `kawakita@ms.u-tokyo.ac.jp`