Problems on singularities from the theory of minimal models

川北真之 (京都大学数理解析研究所)

双有理幾何学の一つの目標は，代数多様体の各双有理同値類から良い代表元を抽出して調べることである．極小モデル理論はその抽出を標準因子の比較によって実現させる理論であり，現在極小モデルプログラム (MMP) の形で定式化されている ([14])．この報告では，MMP の発展に伴って生じた特異点についての諸問題と，それに対する私の研究を概説する．基礎体は標数 0 の代数的閉体 k とする．

MMP とは，与えられた双有理同値類から標準因子に関して極小な多様体を出力するプログラムである．特異点解消定理より各同値類には滑らかな多様体が含まれるので，それを X とする．もちろん X を部分多様体に沿って爆発させた多様体もまた同じ同値類に属するが，その操作は代表元の抽出の観点からは本質的ではない．逆に X からそれと双有理な多様体 Y への良い収縮射があるときは，X よりも Y の方が代表元にふさわしいことになる．MMP の考えは，X の標準因子 K_X との交点数が負となる曲線群を収縮して Y が得られるとき，X を Y に置換することを続けて行き，この操作について極小な多様体を出力したい，ということである．よって最終的に得られる多様体 X' は，極小モデル，すなわち $K_{X'}$ が数値的に非負となる多様体となるか，或いは X' が $K_{X'}$ と負の交点数を持つ曲線群で覆われる場合は，森ファイバー空間と呼ばれる構造を持つ．

ここで問題となるのは，多様体の次元が 3 以上のとき，X からの収縮で得られた Y は滑らかとは限らないことである．そこで先ず，ある程度の特異点を許す必要が生じる．さらに致命的なのは，X から Y への射が余次元 1 で同型となる場合で，このとき Y の標準因子 K_Y は決して $\mathbb{Q}$-Cartier 因子とはならないので，曲線との交点数が定義されない． この障害を回復させる操作がフリップである．射 $X \to Y$ に対するフリップとは，やはり余次元 1 で同型な射 $X^+ \to Y$ で，$-K_X$ が Y 上豊富なのと対称的に，K_{X^+} が Y 上豊富となる射である．こうして X を X^+ に置換することで MMP の操作が続けられる．従って，フリップの存在，及びフリップの無限列が存在しないことが成立すれば，高次元 MMP が機能するのである．

高次元 MMP の研究とともに，多様体のみを考えるよりも代数多様体 X と因子 Δ の組 (X,Δ) へと対象を拡げるのが望ましいことが，判然となった．正確には，X は正規な代数多様体，Δ は X 上の有効な $\mathbb{R}$-因子すなわち Weil 因子の実線型結合であって，標準因子 K_X の代わりに対数的標準因子 $K_X+\Delta$ との交点数を考える．交点数の定義のため，$K_X+\Delta$ は $\mathbb{R}$-Cartier な $\mathbb{R}$-因子であると仮定しなければならない．このような Δ を X 上の境界因子と言う．一連の拡張操作は対数化と呼ばれ，拡張された MMP は対数的極小モデルプログラム (LMMP) と呼ばれる．

3 次元では，森の 3 次元フリップの存在定理 [16] により MMP が完成し，その後主に Shokurov の努力によって 3 次元 LMMP が完成した ([20])．以来 Shokurov はフリップの問題の次元に関する帰納的な証明の枠組を構築してきた．それに基づき Hacon と McKernan は，低次元 LMMP の仮

定下でフリップの存在を証明し ([9])，さらに Birkar，Cascini と併せて，境界因子が一般型のときの実用的な LMMP を完成した (BCHM, [4])．特に一般次元でフリップの存在が証明され，フリップの列の終止が目下の高次元極小モデル理論の最重要な課題となった．

LMMP をフリップの終止性の観点から振り返ろう．LMMP の過程は対数的標準因子を小さくする手続きであるが，これは次に定義する対数的食違い係数を減少させることに他ならない．組 (X,Δ) と，その特異点解消 $f\colon \bar{X}\to X$ を考える．このとき $\bar{X}$ 上の $\mathbb{R}$-因子 $\bar{\Delta}$ で，$K_{\bar{X}}+\bar{\Delta}=f^*(K_X+\Delta)$ 及び $f_*\bar{\Delta}=\Delta$ を満たす $\bar{\Delta}$ が一意に定まる．$\bar{X}$ 上の素因子 E，一般には E の定める附値に対し，“対数的食違い係数” $a_E(X,\Delta)$ を，E の $-\bar{\Delta}$ における係数に 1 を足したものとして定義する．組 (X,Δ) からフリップ (X^+,Δ^+) が作られるとき，不等式 $a_E(X,\Delta)\le a_E(X^+,\Delta^+)$ がすべての E について成立し，しかも非同型な場所上では真に不等号が成立する．従ってフリップの列に付随して対数的食違い係数の上昇列が定まるので，逆に対数的食違い係数の性質を調べることにフリップの終止問題への手掛りが求められる．実際，フリップの終止の最初の結果である，3 次元端末フリップの終止性 [18] は，対数的食違い係数が 2 未満の附値の個数がフリップにより減少することから得られる．

対数的食違い係数からの視点はその極小値を導入することで明瞭になる．X の閉点 x に対し，組 (X,Δ) の x 上の “極小対数的食違い係数” $\mathrm{mld}_x(X,\Delta)$ とは，X において点 x に収縮する因子 E の対数的食違い係数 $a_E(X,\Delta)$ すべての極小値である．この値は点 x における形式的スキームから定まる局所不変量で，非負数または $-\infty$ となる．Shokurov は，フリップの終止という大域的な問題を，極小対数的食違い係数についての次の二予想に還元した ([22])．

(LSC, 下半連続性 [2]) X 上の閉点 x に対して極小対数的食違い係数 $\mathrm{mld}_x(X,\Delta)$ を対応させる関数は，下半連続である．

(ACC, 昇鎖律 [19], [21]) 自然数 n と正実数から成る有限集合 $\{d_i\}$ を固定する．このとき，n 次元多様体 $x\in X$ と素因子分解 $\Delta=\sum_i d_i\Delta_i$ を有する境界因子 Δ のなす組 (X,Δ) から定まる極小対数的食違い係数 $\mathrm{mld}_x(X,\Delta)$ をすべて考えて得られる集合は，昇鎖律を満たす．

これらも残念ながら非常に難しい予想ではあるが，両者とももう少し取掛り易い次の予想を導くことが簡単に分かる．

(BDD, 有界性) 自然数 n を固定するとき，n 次元多様体 X 上の極小対数的食違い係数 $\mathrm{mld}_x(X,\Delta)$ は，上に有界である．

より詳細に，係数 $\mathrm{mld}_x(X,\Delta)$ は次元 n で抑えられ，かつ n に達するのは X が x で滑らかなときに限ることが，Shokurov 予想 [19] として知られている．フリップの終止性も一種の有界性であるから，極小対数的食違い係数の有界性問題は一つの指針であると期待される．なお，極小対数的食違い係数について，これらの予想と深く関連するもう一つの予想があるので，ここに挙げる．

(PIA, 精密逆同伴 [13]) 組 $(X,S+B)$ を考える．ここで S は B には現れない正規な素因子である．すると S 上の境界因子 B_S が，K_S+B_S が K_X+S+B の S への制限となるように自然に定まる．このとき S の点 x に対して $\mathrm{mld}_x(X,S+B)=\mathrm{mld}_x(S,B_S)$ が成立する．

上述の四予想について，既知のことをまとめておく．(LSC)，(ACC) は 2 次元までしか知られていない．2 次元の (LSC) は特異点の分類から直ちに従い，(ACC) は Alexeev による特異点の数値的性質の深い結果 [1] である．一方 (BDD) は 3 次元まで知られているが ([15])，これは 3 次元特異点の明示的分類の結果であった．後で解説するが，最近 3 次元 (BDD) の非常に簡潔な証明が得られた．(PIA) は X,S とも局所完全交叉のときが知られている ([6], [8])．これは (LSC) の X が局所完全交叉の場合と併せて，Ein，Mustaţă，安田のモチーフ積分による極小対数的食違い係数の記述から得られる．また (PIA) の極小対数的食違い係数 1 以下の大部分の場合は BCHM から従う．

極小対数的食違い係数の起源は極小モデル理論にあるが，この係数は特異点の程度を反映するという意味で，純粋に特異点論の立場からも興味深い対象である．すなわち，特異性の程度が悪いほど極小対数的食違い係数が小さくなることが，経験的に知られている．特に曲面の場合はその対応が明白である．$x \in S$ を正規な曲面とする．曲面上では Weil 因子との交点数が定義されるので，S の極小対数的食違い係数 $\mathrm{mld}_x S = \mathrm{mld}_x(S,0)$ が定義される．このとき，S が x で滑らかなのは係数 $\mathrm{mld}_x S$ が 2 以上のとき，高々 Du Val 特異点を持つのは係数が 1 以上のとき，高々商特異点を持つのは係数が正のときである．

極小対数的食違い係数の研究が難しいのは，$\mathrm{mld}_x(X,\Delta)$ を計算する因子，すなわち係数 $a_E(X,\Delta)$ が極小値 $\mathrm{mld}_x(X,\Delta)$ に達する因子 E の情報を得る有効な手段がないからである．目下，極小対数的食違い係数を直接扱える手法は，以下に説明するモチーフ積分の手法 [7], [8], [11] しかない．簡単のため $x \in X$ を d 次元 Gorenstein 有理特異点とするが，後述の通り応用上十分な設定である．

モチーフ積分による $\mathrm{mld}_x X$ の記述には，自然準同型 $\Omega_X^d \otimes \mathscr{O}_X(-K_X) \to \mathscr{O}_X$ の像 $\mathscr{J}_X$ が現れる．説明は避けるが，

$$\mathrm{mld}_x X = -\dim \int_{/x} \mathbb{L}^{\mathrm{ord}\,\mathscr{J}_X}\, d\mu_X$$

である．X が局所完全交叉のときは，イデアル層 $\mathscr{J}_X$ は明示的計算の容易な Jacobian イデアル層 $\mathscr{J}'_X$ に一致し，この事実を用いて局所完全交叉多様体の (LSC) 及び (PIA) が示される．一般には両者は次の形で関係付けられる．X の d 次元局所完全交叉スキーム Y への一般の埋込みを考える．Bertini の定理から，Y は X 及び別の代数多様体の和スキームである．$\mathscr{C}_{X/Y} := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_Y)$ を導手イデアル層として，Grothendieck 双対より

$$\mathscr{J}'_Y|_X = \mathscr{J}_Y|_X = \mathscr{C}_{X/Y} \cdot \mathscr{J}_X$$

となる．この等式を一般の Y すべてに亘って足合わせ，等式

$$\mathscr{J}'_X = \sum_Y \mathscr{J}'_Y|_X = \sum_Y \mathscr{C}_{X/Y} \cdot \mathscr{J}_X$$

を得る．$\mathscr{J}_X$ と $\mathscr{J}'_X$ との差 $\mathscr{D}_X := \sum_Y \mathscr{C}_{X/Y}$ は，X の局所完全交叉でない閉集合を定める．

極小対数的食違い係数を与えるモチーフ積分の意味は，$\mathscr{D}_X$ を用いて説明できる．一般にスキーム X のジェットスキーム $J_n X$ とは, $\mathrm{Spec}\, k[t]/(t^{n+1})$ から X への射全体の成す空間である．$J_n X$ から X への自然な射を π_n^X で表す．このとき，十分大きい n と x 上のファイバー $(\pi_n^X)^{-1}(x) \subset (\pi_n^Y)^{-1}(x)$

の一般の点 γ_n に対し，不等式

$$\mathrm{mld}_x X \le d - [\dim_{\gamma_n}(\pi_n^Y)^{-1}(x) - (nd + \mathrm{ord}_{\gamma_n} \mathscr{D}_X)]$$

が成立する．特に角括弧内の値 $\dim_{\gamma_n}(\pi_n^Y)^{-1}(x) - (nd + \mathrm{ord}_{\gamma_n} \mathscr{D}_X)$ の非負性が導ければ，(BDD) が最良の形で得られる．この非負性は，ファイバー次元の上半連続性 $\dim_{\gamma_n}(\pi_n^X)^{-1}(x) \ge nd$，及び $J_nX \subset J_nY$ の差が $\mathscr{C}_{X/Y} \subset \mathscr{D}_X$ に由来するところに，根拠を持つ．

極小対数的食違い係数の代わりに，ある意味それを重複度で割ったものに相当する，対数的標準閾と呼ばれる不変量を考えると，扱いが易しくなる．組 (X,Δ) が対数的標準特異点であるとは，すべての対数的食違い係数 $a_E(X,\Delta)$ が非負であることで，そのような特異点は LMMP が機能する最大の特異点の類を形成すると考えられている．対数的標準特異点 (X,Δ) と X 上の $\mathbb{R}$-Cartier 有効 $\mathbb{R}$-因子 D に対し，D の "対数的標準閾" $\mathrm{lct}(X,\Delta;D)$ とは，$(X,\Delta+tD)$ が対数的標準となる実数 t の最大値である．対数的標準閾が扱い易いのは，$\mathrm{lct}(X,\Delta;D)$ が乗数イデアル層 $\mathscr{J}(X,\Delta+tD)$ が自明となる t の上限として記述されるため，消滅定理と相性が良いからである．特に，$\mathrm{lct}(X,\Delta;D)$ を計算する因子，すなわち係数 $a_E(X,\Delta+\mathrm{lct}(X,\Delta;D)D)$ が 0 となる因子 E の幾何的情報が入る．例えば Birkar は，低次元 LMMP の仮定下で対数的標準因子が擬有効な場合のフリップの終止性を対数的標準閾の昇鎖律に還元した ([3])．さらに局所完全交叉多様体上の対数的標準閾の昇鎖律は，イデアル列の生成極限の概念を用いて de Fernex，Ein，Mustaţă により示された ([5])．また正標数の世界でも対数的標準閾に対応する F-純閾 [23] が考えられ，その有効性を支持している．

(PIA) の原型である逆同伴も，乗数イデアル層 (及びその亜種である随伴イデアル層) を用いて示される．逆同伴とは (PIA) の設定で与えられる組 $(X,S+B)$ と (S,B_S) の特異点を比較する主張であり，Shokurov がフリップの存在の帰納的枠組の中で提起した問題である．私は彼の手法を発展させ，両組の対数的標準性の同値性，従って S の点 x 上の極小対数的食違い係数の非負性の同値性を示した ([10])．証明では X 上の随伴イデアル層の列 $\{\mathscr{J}_i^X\}$ 及び S 上の乗数イデアル層の列 $\{\mathscr{J}_i^S\}$ を帰納的に構成する．このとき $(X,S+B),(S,B_S)$ の対数的標準性は $\mathscr{J}_i^X, \mathscr{J}_i^S$ が i によらないことで特徴付けられ，両者の同値性は消滅定理の与える全射 $\mathscr{J}_i^X \to \mathscr{J}_i^S$ から従う．

それでは，対数的標準閾の研究をどのようにして極小対数的食違い係数の研究に応用させればよいのか．私は，様々な D の対数的標準閾 $\mathrm{lct}(X,\Delta;D)$ の性質から $\mathrm{mld}_x(X,\Delta)$ 自身の性質が抽出されると考える．もっとも $\mathrm{mld}_x(X,\Delta)$ を計算する因子が $\mathrm{lct}(X,\Delta;D)$ を計算するとは限らないところが障害である．さらに，$\mathrm{lct}(X,\Delta;D)=0$ でありながら $\mathrm{mld}_x(X,\Delta)>0$ となる場合がしばしば困難かつ本質的となる．例えば，極小対数的食違い係数が 1 以下の場合の (PIA) のうち BCHM から導かれていないのも，そのような状況のときである．これから説明するのは，D として一般の超平面切断を考えたときの私の研究 [12] である．

フリップの終止性の指針となり得る有界性問題 (BDD) に話を戻すと，先ず BCHM と指数 1 被覆の手法から，境界因子 $\Delta=0$ かつ $x \in X$ が Gorenstein 端末特異点の場合に簡単に帰着される．ここで端末特異点とは，すべての例外因子 E の対数的食違い係数 $a_E(X)=a_E(X,0)$ が 1 より大きい

特異点のことで，高次元 MMP が機能する最小の特異点の類を形成する．従って以下では d 次元 Gorenstein 端末特異点 $x \in X$ を考える．特に X は Cohen–Macaulay である．

極小対数的食違い係数の有界性は，馴染みのある埋込次元，重複度の有界性から導かれる．

定理 (1) 各 e に対して或る $m(e)$ が存在し，埋込次元 e 以下の任意の Gorenstein 有理特異点 $x \in X$ の重複度 $\mathrm{mult}_x X$ は $m(e)$ 以下となる．
(2) d 次元 Gorenstein 特異点 $x \in X$ に対して $\mathrm{mld}_x X \le d \cdot \mathrm{mult}_x X$ が成立する．

ここで強く注意したいのは，Gorenstein 有理特異点或いは端末特異点のような広範な特異点の類では，埋込次元，重複度の有界性自体は決して見込めないことである．例えば 3 次元 Gorenstein 商特異点 $\frac{1}{r}(1,1,-2)$ の埋込次元は r 以上である．そうではなくて，極小対数的食違い係数がとてつもなく大きい場合，係数が特異点の程度を反映する原則から，そのような特異点は限られるはずで，特に埋込次元，重複度の有界性が帰結できるはずである．ところがそのときは定理から極小対数的食違い係数の有界性が得られるので，結果として (BDD) が期待されるでのある．実際，モチーフ積分による係数の記述を思い出すと，$\mathrm{mld}_x X$ が大きいときはジェットスキーム $J_n X$ が小さいはずで，特に全接空間 $J_1 X$ よって埋込次元も小さいはずである．

証明は消滅定理の応用である．手法は同様なので (1) を示そう．d 次元 Gorenstein 有理特異点 $x \in X$ の特異点解消 $f\colon \bar{X} \to X$ を，x の極大イデアル層 $\mathfrak{m}_x$ の引戻し $\mathfrak{m}_x \mathscr{O}_{\bar{X}}$ が主イデアル層 $\mathscr{O}_{\bar{X}}(-E)$ となるように選ぶ．すなわち，x を通る X の一般の超平面切断 H の厳密変換 $\bar{H}$ は相対的に自由で，$f^*H = \bar{H} + E$ である．X は Cohen–Macaulay なので，重複度 $\mathrm{mult}_x X$ は交点数 $(E \cdot \bar{H}^{d-1})$ に等しい．相対的標準因子を $K := K_{\bar{X}/X} = K_{\bar{X}} - f^*K_X$ で表す．完全列

$$0 \to \mathscr{O}_{\bar{X}}(K-(l+1)E) \to \mathscr{O}_{\bar{X}}(K-lE) \to \mathscr{O}_E(K-lE|_E) \to 0$$

及び l の $d-1$ 次多項式 $P(l) := \chi(\mathscr{O}_E(K-lE|_E))$ を考えると，消滅定理から $l \ge 0$ のとき

$$P(l) = \dim f_*\mathscr{O}_{\bar{X}}(K-lE)/f_*\mathscr{O}_{\bar{X}}(K-(l+1)E)$$

となる．X は有理的，すなわち K は有効なので，順像 $f_*\mathscr{O}_{\bar{X}}(K-lE)$ は $f_*\mathscr{O}_{\bar{X}}(-lE)$ を，従って $\mathfrak{m}_x^l$ を含む．よって $f_*\mathscr{O}_{\bar{X}}(K-lE)/f_*\mathscr{O}_{\bar{X}}(K-(l+1)E)$ は $\mathscr{O}_X/\mathfrak{m}_x^{l+1}$ の部分商層であり，その次元は X の埋込次元を $e = \dim \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ として $\binom{e+l}{e}$ で抑えられる．ゆえに多項式 $P(l)$ の可能性，特にその最高次係数 $\mathrm{mult}_x X/(d-1)!$ の可能性は，有限である．

上の議論では Riemann–Roch の公式の最高次項に重複度すなわち $\bar{H}^{d-1}$ との交点数が現れることを用いたが，その次の項に $K \cdot \bar{H}^{d-2}$ との交点数が現れることに着目すれば，K の情報がさらに引出せる．特に 3 次元では，既知の結果が非常に簡潔な議論から完全に復元される．

定理 $x \in X$ を 3 次元 Gorenstein 端末特異点とする．
(1) (Reid [17]) X の一般の超平面切断は x で高々 Du Val 特異点を持つ．
(2) (Markushevich [15]) $\mathrm{mld}_x X \le 3$ が成立する．

歴史的には，Laufer，Reid の楕円型 Gorenstein 曲面特異点の詳細な研究を用いて (1) が得られ，(1) による 3 次元 Gorenstein 端末特異点の明示的記述から (2) が得られた．我々はそのような分類に頼らずに逆に (2) から証明する．なお 4 次元でも部分的な結論が得られるが，満足な主張からは程遠い．

証明では前定理と同じく特異点解消 $f\colon \bar{X} \to X$ を $\mathfrak{m}_x\mathscr{O}_{\bar{X}} = \mathscr{O}_{\bar{X}}(-E)$ となるように選ぶ．X の一般の超平面切断 S は厳密変換 $\bar{S}$ として $f^*S = \bar{S} + E$ に引戻される．我々はさらに S の一般の超平面切断 C，C の一般の超平面切断 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_0$ を取り，0 次元 Gorenstein 局所環 $\mathscr{O}_0$ を解析する．$\mathscr{O}_0$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_x\mathscr{O}_0$ と書く．

E 及び $K := K_{\bar{X}/X}$ の素因子分解を各々 $E = \sum_i m_iE_i$, $K = \sum_i a'_iE_i$ と表す．ここで a'_i は食違い係数 $a_{E_i}(X) - 1$ で，X の端末性より正整数である．Riemann–Roch の公式から交点数 $(E\cdot\bar{S}^2), (K\cdot\bar{S}^2)$ が計算されるが，それを $\mathscr{O}_0$ の述語で記述しよう．C を与える X の二つの超平面切断の $\bar{X}$ 上の厳密変換の交わり $\bar{C}$ は，C の特異点解消を与える．$\bar{X}$ の例外因子 A から定まる $\mathscr{O}_0$ のイデアル $\mathscr{O}_0(A)$ を，

$$\mathscr{O}_0(A) := (f_*\mathscr{O}_{\bar{C}}(A|_{\bar{C}}) \cap \mathscr{O}_C)\cdot\mathscr{O}_0$$

として定義する．$\mathscr{O}_0(A)$ は，E_i と $\bar{C}$ の交点に沿って E_i の $-A$ における係数以上の重複度を持つような，C の正則関数全体で生成される $\mathscr{O}_0$ のイデアルである．例えば $\mathscr{O}_0(-E) = \mathfrak{m}_0$ である．このとき交点数 $(E\cdot\bar{S}^2), (K\cdot\bar{S}^2)$ は次のように表される．

補題 (1) $(E\cdot\bar{S}^2) = \dim\mathscr{O}_0/\mathscr{O}_0(K-3E)$.
(2) $(K\cdot\bar{S}^2) = 2\dim\mathscr{O}_0(K-2E) - 2\dim\mathscr{O}_0/\mathscr{O}_0(K-E)$.

X は Cohen–Macaulay ゆえ $\operatorname{mult}_xX = (E\cdot\bar{S}^2) = \dim\mathscr{O}_0$ なので，(1) は $\mathscr{O}_0(K-3E) = 0$ を意味する．特に $\mathscr{O}_0(K-2E)$ はソークル $(0:\mathfrak{m}_0)$ に含まれるが，0 次元 Gorenstein 局所環 $\mathscr{O}_0$ の特徴付け $(0:\mathfrak{m}_0) \simeq k$ から $\dim\mathscr{O}_0(K-2E) \le 1$ となる．一方 $(K\cdot\bar{S}^2)$ は正なので，(2) より $(K\cdot\bar{S}^2) = 2$, $\mathscr{O}_0(K-E) = \mathscr{O}_0$, $\mathscr{O}_0(K-2E) \simeq k$ でなければならない．よって $\operatorname{mld}_xX \le 1 + (\sum_i a'_iE_i\cdot\bar{H}^2) = 3$ すなわち Markushevich の結果を得る．

さらに $\mathscr{O}_0(K-E) = \mathscr{O}_0$ すなわち $K|_{\bar{C}} \ge E|_{\bar{C}}$ より，$\operatorname{mult}_xX = (E\cdot\bar{S}^2) \le (K\cdot\bar{S}^2) = 2$ である．Reid の特徴付けは，x で特異点を持つ場合，重複度 2 のときを考えればよい．このとき $K|_{\bar{C}} = E|_{\bar{C}}$ すなわち $K_{\bar{S}/S}|_{\bar{C}} = 0$ である．$K_{\bar{S}/S}$ を有効因子 P, N の差 $P - N$ として表すとき，$N = 0$ を示せばよい．ここで $N \ne 0$ とすると，曲面の標準的な議論から，$\bar{C}$ と交わらない第一種例外曲線を順次収縮させて，次の性質を満たす滑らかな曲面 T が構成される．すなわち，或る $E_0|_{\bar{S}}$ の厳密変換 $E_{0,T}$ は，N に現れる或る $E_1|_{\bar{S}}$ 及び $\bar{C}$ の厳密変換 $E_{1,T}, C_T$ 各々と交わる．よって $a'_0 = m_0$, $a'_1 < m_1$ で，このとき $E_{0,T}$ は第一種例外曲線となる．$0 < (E_{0,T}\cdot C_T)_T = (E_{0,T}\cdot(-\sum_i m_iE_{i,T}))_T \le m_0 - m_1$ と併せて $1 \le a'_1 < m_1 < m_0 \le (\sum_i m_iE_i\cdot\bar{S}^2) = 2$ を得るが，これは矛盾である．

このような考察で十分なのは，考える特異点が一般の超平面切断を繰返して得られる曲面で特徴付けられるときに限られる．この手法を推進させるには，Riemann–Roch の公式の低次の項に着目することが先ず考えられる．しかし現実的なのは，正則関数の層の大域切断が消えないところから構成される特殊な超平面切断を追及することであると思われる．

参考文献

[1] V. Alexeev, Two two-dimensional terminations, Duke Math. J. **69** (1993), 527-545

[2] F. Ambro, On minimal log discrepancies, Math. Res. Lett. **6** (1999), 573-580

[3] C. Birkar, Ascending chain condition for log canonical thresholds and termination of log flips, Duke Math. J. **136** (2007), 173-180

[4] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon and J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, to appear in J. Am. Math. Soc.

[5] T. de Fernex, L. Ein and M. Mustaţă, Shokurov's ACC Conjecture for log canonical thresholds on smooth varieties, to appear in Duke Math. J.

[6] L. Ein and M. Mustaţă, Inversion of adjunction for local complete intersection varieties, Am. J. Math. **126** (2004), 1355-1365

[7] L. Ein and M. Mustaţă, Jet schemes and singularities, *Algebraic geometry*, Proc. Symp. Pure Math **80** (2009), 505-546

[8] L. Ein, M. Mustaţă and T. Yasuda, Jet schemes, log discrepancies and inversion of adjunction, Invent. Math. **153** (2003), 519-535

[9] C. Hacon and J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type II, to appear in J. Am. Math. Soc.

[10] M. Kawakita, Inversion of adjunction on log canonicity, Invent. Math. **167** (2007), 129-133

[11] M. Kawakita, On a comparison of minimal log discrepancies in terms of motivic integration, J. Reine Angew. Math. **620** (2008), 55-65

[12] M. Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies by Riemann–Roch theorem, arXiv:0903.0418

[13] J. Kollár et al, *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Astérisque **211** (1992)

[14] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics **134**, Cambridge University Press (1998)

[15] D. Markushevich, Minimal discrepancy for a terminal cDV singularity is 1, J. Math. Sci. Tokyo **3** (1996), 445-456

[16] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, J. Am. Math. Soc. **1** (1988), 117-253

[17] M. Reid, Minimal models of canonical 3-folds, *Algebraic varieties and analytic varieties*, Adv. Stud. Pure Math. **1** (1983), 131-180

[18] V. Shokurov, The non-vanishing theorem, Izv. Akad. Nauk SSSR **49** (1985), 635-651, translation in Math. USSR Izv. **26** (1986), 591-604

[19] V. Shokurov, Problems about Fano varieties, *Birational geometry of algebraic varieties, Open problems*, Katata 1988, 30-32

[20] V. Shokurov, Three-dimensional log perestroikas, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), 105-203, translation in Russian Acad. Sci. Izv. Math. **40** (1993), 95-202

[21] V. Shokurov, 3-fold log models, J. Math. Sci. **81** (1996), 2667-2699

[22] V. Shokurov, Letters of a bi-rationalist V. Minimal log discrepancies and termination of log flips, Tr. Mat. Inst. Steklova **246** (2004), 328-351, translation in Proc. Steklov Inst. Math. **246** (2004), 315-336

[23] S. Takagi and K. Watanabe, On F-pure thresholds, J. Algebra **282** (2004), 278-297