3 次元の双有理幾何

川北真之
京都大学数理解析研究所

3 次元の極小モデルプログラムが完成して四半世紀が経ち，一般次元のフリップの存在をはじめとして，高次元の極小モデル理論は大きく発展した．それと並行して極小モデル理論を応用することにより，3 次元の双有理幾何が明示的に研究されてきた．このようにして解明された 3 次元の双有理幾何の様子を，極小モデルプログラムの手順に沿って解説する．

基礎体は複素数体 $\mathbf{C}$ とする．n 次元空間 $\mathbf{C}^n$ の原点における解析的近傍を $o \in \mathfrak{D}^n$ で表す．

1 極小モデルプログラム

曲面の極小モデル理論の復習から入る．S を滑らかな射影的曲面とする．S を一点を中心に爆発させて新しい曲面を得る操作は S の双有理幾何においては本質的ではない．爆発で得られる曲線は (-1)-曲線であり，逆に任意の (-1)-曲線は Castelnuovo の収縮定理によって収縮される．そこで (-1)-曲線の収縮 $S \to T$ によって S を T で取りかえる操作を繰り返すと，Picard 数の減少により有限回の操作ののちに (-1)-曲線を持たない曲面に到達する．その曲面 S は次のいずれかである．

- S は極小モデル．すなわち標準因子 K_S がすべての曲線 C と非負の交叉数 $(K_S \cdot C) \geq 0$ を持つ．
- S は曲線上の $\mathbf{P}^1$ 束であるか，射影平面 $\mathbf{P}^2$ と同型．前者では $\mathbf{P}^1$ 束の底曲線を B とおき，後者では $B = \operatorname{Spec} \mathbf{C}$ とおくことで，$-K_S$ が相対的に豊富なファイバー構造 $S \to B$ が入る．

到達先が極小モデルとファイバー構造のどちらになるかは，標準因子 K_S が擬有効かどうか，すなわち有効因子の極限と数値的同値かどうかという S の性質から決まる．

曲面の極小モデル理論の高次元化において問題となるのが特異点である．(-1)-曲線の収縮は反標準因子 $-K_X$ が相対的に豊富な写像 $X \to Y$ として一般化されるが，もとの X が滑らかであっても Y もそうであるとは限らない．例えば 3 次元空間の芽 $o \in \mathbf{C}^3$ を位数 2 の巡回群 $\mathbf{Z}_2$ の作用 $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, -x_3)$ で割って得られる商特異点 $o \in Y = \mathbf{C}^3/\mathbf{Z}_2$ の原点を中心とする爆発 $\pi\colon X \to Y$ を考えると，X は滑らかで $-K_X$ は相対的に豊富である．Y の標準因子 K_Y は 2 倍すると Cartier になる Weil 因子であり，例外因子 E に対して $K_X = \pi^*K_Y + (1/2)E$ となる．一般に ζ を 1 の原始 r 乗根として $o \in \mathfrak{D}^n$ の巡回群 $\mathbf{Z}_r$ の作用 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\zeta^{a_1}x_1, \dots, \zeta^{a_n}x_n)$ $(a_i \in \mathbf{Z})$ による商を $o \in \mathfrak{D}^n/\mathbf{Z}_r(a_1, \dots, a_n)$ と書き $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ 型の商特異点と呼ぶ．上の特異点 $o \in Y$ は $\frac{1}{2}(1,1,1)$ 型である．

$\frac{1}{2}(1,1,1)$ 型の特異点 $o \in Y$ においては爆発 $\pi\colon X \to Y$ がその特異点解消であり，標準因子の比較 $K_X = \pi^*K_Y + (1/2)E$ における E の係数 $1/2$ が正であることが $-K_X$ の相対豊富性を担保している．この観察をもとに高次元の極小モデル理論が許す特異点として端末特異点が定義される．そのような特異点 $x \in X$ は標準因子 K_X が $\mathbf{Q}$-Cartier であること，すなわちある正の整数倍 rK_X

が Cartier になることが曲線との交叉数を考える上で不可欠である．これを X が **Q**-Gorenstein であるといい，最小の正整数 r を $x \in X$ の**指数**と呼ぶ．このとき引き戻し $\mu^* K_X$ が有理係数の因子として定義される．正規特異点 $x \in X$ が**端末的**であるとは，**Q**-Gorenstein であって，特異点解消 $\mu\colon X' \to X$ において例外因子 E_i たちを用いて $K_{X'} = \mu^* K_X + \sum_i d_i E_i$ と表したとき，すべての係数 $d_i \in \mathbf{Q}$ が正であることをいう．

特異点のさらなる障害は，3 次元以上では収縮写像 $\pi\colon X \to Y$ が余次元 1 で同型となる場合があることである．このとき仮に K_Y が **Q**-Cartier ならば $K_X = \pi^* K_Y$ となり $-K_X$ の相対豊富性に矛盾する．よって Y は **Q**-Gorenstein にはなりえず K_Y との交叉数は定義できない．その状況を立て直す操作が π の**フリップ** $\pi^+\colon X^+ \to Y$ であり，π^+ は K_{X^+} が相対的に豊富である余次元 1 で同型な写像として定義される．

極小モデルプログラムでは端末特異点のみを持つ射影代数多様体のうちすべての因子が **Q**-Cartier であるものを考える．そのような代数多様体のなす圏を $\mathscr{C}$ と書く．与えられた $X \in \mathscr{C}$ に対してプログラムは次のように走る．

1 K_X がネフならば X を極小モデルとして出力する．
2 K_X がネフでないならば $-K_X$ が相対的に豊富な収縮写像 $\pi\colon X \to Y$ が存在する．
3 Y の次元が X の次元より小さいとき，π は**森ファイバー空間**と呼ばれ，これを出力する．
4 π が双有理で例外因子を持つとき，π は**因子収縮写像**と呼ばれる．X を $Y \in \mathscr{C}$ で取りかえて 1 にもどる．Picard 数 $\rho(Y) = \rho(X) - 1$ は減少する．
5 π が余次元 1 で同型なとき，π はフリップ収縮写像と呼ばれる．π のフリップ $\pi^+\colon X^+ \to Y$ をとり，X を $X^+ \in \mathscr{C}$ で取りかえて 1 にもどる．Picard 数 $\rho(X^+) = \rho(X)$ は変わらない．

3 次元森ファイバー空間は一般ファイバーの次元が 1, 2, 3 のときそれぞれ **2 次曲線束**，**del Pezzo 曲面束**，**Fano 多様体**である．フリップの存在およびフリップ列の終止性がいえればプログラムが機能することが Picard 数の推移からわかる．3 次元フリップの終止は Shokurov [86]，存在は森 [67] による．Birkar，Cascini，Hacon，Mckernan [9, 31] は一般次元でフリップの存在を証明し，さらに例えば相対次元が 0 の設定では，フリップ列の方向を上手に選べば終止することを示してプログラムを機能させた．

2 端末特異点

指数 1 の端末特異点 $x \in X$ は Gorenstein 特異点である．Reid [77] は 3 次元 Gorentein 特異点を孤立 **cDV 特異点** (compound Du Val) として特徴付けた．ここで $x \in X$ が cDV 特異点であるとは，その一般超平面切断 $x \in S$ が Du Val であることをいう．指数 r が一般の端末特異点 $x \in X$ は指数 1 被覆 $\bar{x} \in \bar{X}$ の商 $x \in X = \bar{X}/\mathbf{Z}_r$ として表される．ここで $\bar{x} \in \bar{X}$ も端末的なので，Reid の結果より半不変関数 $\xi \in \mathscr{O}_{\bar{X}}$ を用いて

$$x \in X = (\xi = 0) \subset \mathfrak{D}^4/\mathbf{Z}_r(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

と記述される．森 [66] はこれが端末特異点となる条件を調べていくつかの型 $cA/r, \ldots, cE/2$ に分

類した．最も典型的である cA/r 型の特異点は

$$x \in X = (x_1x_2 + f(x_3, x_4^r) = 0) \subset \mathfrak{D}^4/\mathbf{Z}_r(1, -1, 0, b) \quad (b, r \text{ は互いに素})$$

と表される．分類の十分性は Kollár，Shepherd-Barron [58] により確認されている．

Reid [78] はこの分類結果を受けて，3 次元の双有理幾何の研究を牽引する役目を担うことになる重要な洞察を行った．指数 1 の 3 次元端末特異点 $x \in X$ の一般超平面切断は Du Val であるが，指数が一般のときも超平面切断の代わりに $-K_X$ と線型同値な一般の曲面 $x \in S \subset X$ を考えればやはり $x \in S$ は Du Val であるという洞察である．例えば上の cA/r 型特異点では $S = (x_4 = 0) \sim -K_X$ を考えると $x \in S = (x_1x_2 + f(x_3, 0) = 0) \subset \mathfrak{D}^3/\mathbf{Z}_r(1, -1, 0)$ は A 型の Du Val 特異点になっている．彼は反標準因子系 $|-K_X|$ の一般元 S を **general elephant** と呼び，次の予想を立てた．

General elephant 予想 端末的な 3 次元代数多様体 X について，反標準因子 $-K_X$ が豊富となる適切な状況下では X の general elephant S は高々 Du Val 特異点しか持たない．

3 次元双有理幾何が general elephant 予想を解決しながら発展した様子を以下で見ることになる．

3 フリップ

はじめに 3 次元フリップの最初の例を挙げる．通常 2 重点 $o \in Y = (x_1x_2 + x_3x_4 = 0) \subset \mathfrak{D}^4$ のイデアル (x_2, x_4) に沿う爆発 $X \to Y$ およびイデアル (x_1, x_4) に沿う爆発 $X^+ \to Y$ はともに余次元 1 で同型であり，図式 $X \to Y \leftarrow X^+$ は標準因子に関して中立な**フロップ**となる．これを Atiyah のフロップと呼ぶ [4]．これを巡回群 $\mathbf{Z}_2$ の作用 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_1, x_2, x_3, -x_4)$ で割って得られる図式 $X/\mathbf{Z}_2 \to Y/\mathbf{Z}_2 \leftarrow X^+/\mathbf{Z}_2$ は Francia のフリップとして知られている [25]．

3 次元フリップ収縮写像は解析的には既約な曲線の収縮たちに分解される．そこで例外集合 $\pi^{-1}(y)$ が既約なフリップ収縮写像 $\pi\colon C \simeq \mathbf{P}^1 \subset X \to y \in Y$ を考える．川又 [48] はフリップよりも扱いやすいフロップの存在を 3 次元で証明した上で，次のようにフリップの存在をフロップの存在に帰着させる枠組を与えた．仮に組 $(X, T/2)$ が標準特異点を持つ曲面 $T \sim -2K_X$ が見つかれば，T に沿って分岐する X の 2 重被覆 $\mu\colon \bar{X} \to X$ をとると分岐公式 $K_{\bar{X}} = \mu^*(K_X + T/2)$ より $\bar{X}$ は標準的である．$\pi\colon X \to Y$ の持ち上げ $\bar{\pi}\colon \bar{X} \to \bar{Y}$ は $K_{\bar{X}}$ に関して中立なので，そのフロップ $\bar{\pi}^+\colon \bar{X}^+ \to \bar{Y}$ の商として π のフリップ $\pi^+\colon X^+ \to Y$ が得られる．

この設定で general elephant 予想は一般の曲面 $S \sim -K_X$ が Du Val であることを主張するが，そのとき逆同伴より組 $(X, S = 2S/S)$ は標準的になる．特に $|2S|$ の一般元 T に対しても組 $(X, T/2)$ は標準的なので，川又の枠組により π のフリップが存在する．森 [67] は π の分類とともに general elephant 予想もしくはよい T の存在を示してフリップを明示的に構成したのである．なお例外集合が既約な場合の general elephant 予想はのちの Kollár との共同研究 [57] で完全に示されている．

分類の手法は埋め込み $C \subset X$ の緻密な解析に尽きるが，ここでは着想の本質的な一端を垣間見るために，X 上の Gorenstein でない特異点は高々 2 個であることを証明する．自然な準同型 $\mathscr{O}_X(K_X) \otimes \mathscr{O}_X(-K_X) \to \mathscr{O}_X$ の C への制限

$$(\mathscr{O}_X(K_X) \otimes \mathscr{O}_C/\mathrm{tors}) \otimes (\mathscr{O}_X(-K_X) \otimes \mathscr{O}_C/\mathrm{tors}) \to \mathscr{O}_C$$

を考える．$\mathscr{O}_X(K_X) \otimes \mathscr{O}_C/\mathrm{tors}$ は $\mathscr{O}_X(K_X) \otimes \mathscr{O}_C$ をねじれ部分で割った商であり，$C \simeq \mathbf{P}^1$ 上のある可逆層 $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(s)$ と同型である．全射 $R^1\pi_*\mathscr{O}_X(K_X) \twoheadrightarrow H^1(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(s))$ と川又–Viehweg 消滅 $R^1\pi_*\mathscr{O}_X(K_X) = 0$ により $-1 \le s$ である．同様に $\mathscr{O}_X(-K_X) \otimes \mathscr{O}_C/\mathrm{tors} \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(s')$ においても $-1 \le s'$．一方で上の制限写像は Gorenstein でない特異点 $p_1, \ldots, p_l$ において全射ではないから，単射 $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(s) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1}(s') \hookrightarrow \mathscr{O}_C(-\sum_i p_i)$ が誘導される．次数比較より $-2 \le s + s' \le -l$，すなわち $l \le 2$.

4 点への因子収縮写像

3 次元因子収縮写像の例外因子は曲面なので，それは点か曲線に収縮される．まず点に収縮する写像 $\pi\colon E \subset X \to y \in Y$ を考える．$E = \pi^{-1}(y)$ が例外因子である．関係式 $K_X = \pi^*K_Y + dE$ に現れる E の係数 d は**食違い係数**と呼ばれ，端末特異点 $y \in Y$ の指数 n とあわせて π の基本的な数値的不変量である．食違い係数 d は $nd \in \mathbf{Z}$ となる正の有理数である．

収縮先が商特異点，通常 2 重点のときの川又 [50]，Corti [21] の結果，および食違い係数が 1 以下のときの早川 [33, 34] の研究ののち，私は因子収縮写像 π の系統的研究を行った [42, 43, 44, 45]. 相対的に豊富な因子 $-E$ が定める次数付き $\mathscr{O}_Y$ 代数 $\mathscr{R} = \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \pi_*\mathscr{O}_X(-iE)$ によって $X = \mathrm{Proj}_Y \mathscr{R}$ と表される．私の手法は $\mathscr{R}$ を数値的情報 $d_i = \dim \pi_*\mathscr{O}_X(-iE)/\pi_*\mathscr{O}_X(-(i+1)E)$ から回復させるものである．消滅定理 $R^1\pi_*\mathscr{O}_X(-iE) = 0$ より適当なコンパクト化ののちに

$$d_i = \chi(\mathscr{O}_X(-iE)) - \chi(\mathscr{O}_X(-(i+1)E))$$

であり，Euler 標数の差である右辺が Reid による次の特異点版 Riemann–Roch 公式 [78] により計算される．

一般に 3 次元端末特異点は商特異点たちの集合に変形されるので，X 上の特異点たちを変形して商特異点の集合 $\{\frac{1}{r_i}(1,-1,b_i)\}_{i\in B}$ が得られる．これを X のかご (basket) と呼ぶ．X 上の $\mathbf{Q}$-Cartier 因子 D は各点で $D \sim e_iK_X$ と表される．このとき Euler 標数 $\chi(\mathscr{O}_X(D))$ は通常の Riemann–Roch 公式による値 $D(D-K_X)(2D-K_X)/12 + Dc_2(X)/12 + \chi(\mathscr{O}_X)$ と X のかごの貢献 $\sum_{i\in B} c_i(D)$ の和となる．各貢献項 $c_i(D)$ は r_i, b_i, e_i を用いて明示的に表示される．

結果として π は数値的に通常型 o1, o2, o3 と 15 個の例外型 e1, . . . , e16 (e4 は存在しない) に分類され，すべて例を持つ．この数値的分類から $\mathscr{R}$ を復元して π の幾何的分類を導く際に X 上の general elephant 予想が必要となり，それを証明した．幾何的な分類は以下にまとめられる．

定理 例外因子が点に収縮する 3 次元因子収縮写像 $\pi\colon E \subset X \to y \in Y$ は，食違い係数が非常に小さい場合を除き，適当な表現

$$y \in Y = (f(x_1,\ldots,x_5) = x_5 + g(x_1,\ldots,x_4) = 0) \subset \mathfrak{D}^5/\mathbf{Z}_r$$

のもとで**重み付き爆発**である．

ここで $y \in Y$ はつねに $\mathfrak{D}^4/\mathbf{Z}_r$ に埋め込めるが，π を記述する際には $\mathfrak{D}^5/\mathbf{Z}_r$ への埋め込みが必要になる場合が生じる．食違い係数が非常に小さい場合は例外因子の候補が計算可能な程度に絞られるので，上の結果は実用上満足いくものである．

5 曲線への因子収縮写像

次いで例外因子が曲線に収縮する 3 次元因子収縮写像 $\pi\colon E \subset X \to C \subset Y$ を考える．この場合 π は曲線 C 上の一般の点の近くでは C を中心とする爆発である．特に $C \subset Y$ が与えられたとき π は存在すれば一意であり，$K_X = \pi^* K_Y + E$ である．次数付き代数 $\mathscr{R} = \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} \pi_* \mathscr{O}_X(-iE)$ による表現 $X = \mathrm{Proj}_Y \mathscr{R}$ において i 次部分 $\pi_* \mathscr{O}_X(-iE)$ は C を定めるイデアル $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_Y$ の i 次記号べき $\mathscr{I}^{(i)} = \mathscr{I}^i \mathscr{O}_{Y,\eta} \cap \mathscr{O}_Y$ に等しい．ただし η は C の生成点．よって π が存在すれば $\mathscr{I}$ の記号べき代数 $\mathscr{S} = \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} \mathscr{I}^{(i)}$ は有限生成であり，X は $W = \mathrm{Proj}_Y \mathscr{S}$ と Y 上同型になる．

X 上の general elephant 予想は C を含む Y 上の一般の曲面 $S \sim -K_Y$ が Du Val であることを意味する．この性質を $C \subset Y$ について仮定するとき，記号べき代数 $\mathscr{S} = \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} \mathscr{I}^{(i)}$ は有限生成で $W = \mathrm{Proj}_Y \mathscr{S}$ は標準特異点を持つことがわかる．この下では $W \to Y$ が因子収縮写像の唯一の候補であるから，解析的な芽 $y \in C \subset S \subset Y$ から出発して定まる W がさらに端末的かどうかを決定することが問題となる．

この問題について Tziolas [90, 91, 92] と Ducat [23] による研究が挙げられる．Tziolas は Y が Gorenstein で C が滑らかな曲線の場合を考えた．出発点である Jaffe [41] による芽 $y \in C \subset S$ の分類は McKay 対応と関連する．いくつかの場合，W は適当な表示における重み付き爆発として記述される．例えば Du Val 特異点 $y \in S$ が最も基本的な A_1 型のとき，表示

$$y \in C = (x_1\text{軸}) \subset Y = (x_1x_2 + x_3^2 + x_4^n = 0) \subset \mathfrak{D}^4$$

によって $W \to Y$ は重み $(0, 2, 1, 1)$ 付きの爆発であり，W はつねに端末的である．

一方で Ducat は Y が滑らかな場合を一般的に考えた．C が局所交叉のときの構造は直ちに分かるのでそうでないとする．このとき $\mathscr{O}_Y$ 加群としての $\mathscr{O}_C$ の射影的分解が Eisenbud [24] による**行列分解**を用いて記述できて Jaffe の分類に呼応する分類を持つ．Ducat は C を中心とする Y の通常の爆発からはじめて Papadakis，Reid [74] の **unprojection** によりモデルを取りかえてゆき最終的に W に到達した．例えば $y \in S$ が A_1 型のとき W は重み付き射影空間 $\mathbf{P}(1, 1, 1, 2)$ との直積への埋め込み $W \subset Y \times \mathbf{P}(1, 1, 1, 2)$ を持つ．さらに W が端末的であるための必要十分条件は $y \in C$ の重複度が 3 であることである．

6 Sarkisov プログラム

例えば射影空間 $\mathbf{P}^n$ は自明な束 $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^{n-m} \to \mathbf{P}^m$ の全空間と双有理であるように，一般に森ファイバー空間は双有理的には多くの構造を持ちうる．**Sarkisov プログラム**は二つの森ファイバー空間 X/S，Y/T の全空間に双有理射 $X \dashrightarrow Y$ が与えられたとき，それを基本的なリンクたちに分解する．このプログラムは**有理性**問題における次の重要な結果の証明をもとに定式化された [19, 32, 82].

定理 (Iskovskikh–Manin [40]) 滑らかな 3 次元 4 次超曲面 $X_4 \subset \mathbf{P}^4$ は有理的ではない．

Iskovskikh と Manin は実質的に X を森ファイバー空間 $X \to \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}$ とみて，それが他の森ファイバー空間 $Y \to T$ と双有理的につながらないことを証明して非有理性を示した．つまり $X/\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}$ は森ファイバー空間の圏において有理性と対極の性質である双有理超剛性を有することを証明したのである．

定義 $\pi\colon X \to S$ を森ファイバー空間とする．もう一つの森ファイバー空間 $\varphi\colon Y \to T$ (π と同じでもよい) と全空間の双有理射 $f\colon X \dashrightarrow Y$ が任意に与えられたときに，ある X の自己双有理射 $\sigma\colon X \dashrightarrow X$ と底空間の双有理射 $g\colon S \dashrightarrow T$ が存在して，生成ファイバーの同型 $X \times_S \eta_S \simeq Y \times_T \eta_T$ を導く可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f\circ\sigma}{\dashrightarrow} & Y \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ S & \overset{g}{\dashrightarrow} & T \end{array}$$

をつくるとき，π は**双有理剛的**であるという．さらに σ としてつねに X の恒等写像を選べるとき，π は**双有理超剛的**であるという．

代数多様体が有理的かどうかを調べることは基本的な問題である．有理性から順に**安定有理性**，**単有理性**，**有理連結性**，**単線織性**へと概念が拡がり，最後の単線織性は数値的な判定が可能である [10, 65]．曲面に対しては有理性から有理連結性まで同値であるが，3 次元以上では最初の 3 つはすべて異なり [3, 5, 18]，単有理性と有理連結性も異なるであろうと予想されている．

7 2 次曲線束

3 次元多様体からの 2 次曲線束 $\pi\colon X \to S$ に対してはフリップ収縮写像の議論の多くが解析的な芽 $s \in S$ の上で通用する．大きな違いは相対次元が正のために $R^1\pi_*\mathscr{O}_X(K_X)$ が消滅するとは限らないことである．それでも森，Prokhorov [68, 69, 70] は $\pi^{-1}(s)$ が既約すなわち $\pi^{-1}(s) \simeq \mathbf{P}^1$ の場合に X 上の general elephant 予想を証明して近傍 $\pi^{-1}(s) \simeq \mathbf{P}^1 \subset X \to s \in S$ を分類した．帰結として底曲面 S は A 型の Du Val 特異点しか持たないという Iskovskikh の予想を得た．

2 次曲線束 $\pi\colon X \to S$ は伝統的には生成ファイバーを変えずに**標準 2 次曲線束**に取りかえて研究される [81]．すなわち π は滑らかな射影代数多様体間の相対次元 1 の平坦射で，$-K_X$ は相対的に豊富，相対 Picard 数 $\rho(X/S) = 1$ である．π は S 上階数 3 の局所自由層 $\pi_*\mathscr{O}_X(-K_X)$ のつくる $\mathbf{P}^2$ 束に埋め込まれ，退化域が**判別因子** $\Delta \subset S$ として定まる．X が有理的ならば S もそうなので，有理性問題では S は有理的であると仮定する．この下で Shokurov [85] と Iskovskikh [38] は X の有理性を (S, Δ) で判定する予想を立て，X が有理的ならば線型系 $|2K_S + \Delta|$ は空であると予想した．これは S が射影平面または Hirzebruch 曲面のとき，つまり森ファーバー構造を持つときに証明されている [85]．

判別因子は一般の 2 次曲線束 $\pi\colon X \to S$ に対しても定義できる．$2K_S + \Delta$ に擬有効でない K_S を加えて $4K_S + \Delta$ をつくる．Sarkisov [80, 81] は $4K_S + \Delta$ がなお擬有効ならば π は双有理超剛的であることを証明した．

8 Del Pezzo 曲面束

Del Pezzo 曲面束 $\pi\colon X \to B$ の生成ファイバー $X_\eta = X \times_B \eta$ は B の関数体上の del Pezzo 曲面であり，その**次数** $d = K_{X_\eta}^2$ $(1 \le d \le 9)$ が基本的な不変量となる．標準 2 次曲線束のように，生成ファイバー X_η を変えずに π をよい del Pezzo 曲面束で取りかえる問題を考える．X が 3 次元のときは曲線の代数的な芽 $b \in B$ の上で考えればよい．Corti [20] は $d \ge 3$ のとき，全空間 X が

Gorenstein でファイバー $F = X \times_B b$ が整である del Pezzo 曲面束を X_η の**標準モデル**と呼び，その存在を証明した．F の非常に豊富な因子 $-K_F$ による $\mathbf{P}^d$ への埋め込みは延長されて，埋め込み $X \subset \mathbf{P}^d \times B$ を持つ．なお $d = 2, 1$ のときは F が整ならば F はそれぞれ $\mathbf{P}(1,1,1,2), \mathbf{P}(1,1,2,3)$ へ埋め込まれるが，Abban，Fedorchuk，Krylov [1] は変数を一つ増やしてそれぞれ $\mathbf{P}(1,1,1,2,2) \times B$, $\mathbf{P}(1,1,2,3,3) \times B$ へ埋め込まれる X_η のモデル X/B の存在を証明した．

よいモデルの存在は X 上の general elephant 予想と関連しており，general elephant 予想については Hacking，Prokorov [29, 75] により $F = X \times_B b$ が対数的端末特異点を持つ場合に示されている．一般にはファイバー F は重複度 m を持ち，素因子 P を用いて $F = mP$ と表される．森，Prokhorov [71] は特異点版 Riemann–Roch 公式を用いて重複度 m が 6 以下であることを示した．

Del Pezzo 曲面束 $\pi\colon X \to \mathbf{P}^1$ の次数 d が 5 以上ならば X が有理的であることはよく知られている．$d = 4$ のとき Alexeev [2] は π から標準 2 次曲線束へのリンクを構成して X の有理性を位相的 Euler 標数 $\chi(X)$ が 0, −4, −8 のいずれかであることで特徴付けた．最終的な完成は Shramov [87] による．d が 3 以下のときは双有理剛性が調べられ，Pukhlikov は K^2 条件を，Grinenko は K 条件を提唱した．

$\mathbf{K^2}$ 条件 K_X^2 は X の曲線が生成する錐 $\mathrm{NE}(X) \subset N_1(X)$ の内部に属さない．
K 条件 $-K_X$ は X の可動因子が生成する錐 $\mathrm{Mov}(X) \subset N^1(X)$ の内部に属さない．

K^2 条件から K 条件が従うことは簡単にわかる．以下では X は滑らかとする．Pukhlikov [76] は $d = 2$ のとき π が K^2 条件をみたせば双有理剛的，$d = 1$ のとき K^2 条件をみたせば双有理超剛的であることを証明した．Grinenko [27, 28] は $d = 1$ のとき，π が K 条件をみたすことと双有理超剛的であることは同値であることを証明した．

9 Fano 多様体

Fano 多様体 X は一般の 2 点が有理曲線で結ばれる有理連結多様体である．X が滑らかなとき，Campana [11] と Kollár，宮岡，森 [54, 55, 56] は 2 点をいくつかの有理曲線の鎖で結び，それに有理曲線を付加して変形することで 1 本の有理曲線 C で結んだ．この曲線の $-K_X$ に関する次数 $(-K_X \cdot C)$ を抑えることによって，滑らかな Fano 多様体たちの族の有界性が得られる．

有界性を特異点付きの Fano 多様体に対して示したのが Birkar [7, 8] である．正の実数 ε を固定するとき，Fano 多様体のうちすべての上空の因子が対数的食違い係数 ε 以上を持つものは有界な族をなすという **BAB 予想** (Borisov–Alexeev–Borisov) を証明した．ちなみに ε の仮定を外して単に対数的標準な Fano 多様体を集めると双有理な意味でも有界にはならない．Lin [61] が構成したとおり，次数 $2n+3$ の判別因子 Δ_n を持つ標準 2 次曲線束 $X_n \to \mathbf{P}^2$ からの収縮写像 $X_n \to Y_n$ で得られる Fano 多様体 Y_n について，それらが双有理的に有界であれば $n \geq 5$ における $X_n/\mathbf{P}^2$ の双有理超剛性により Δ_n の算術種数 $p_a(\Delta_n) = (n+1)(2n+1)$ も上から抑えられるはずだからである．

滑らかな 3 次元 Fano 多様体 X は del Pezzo 曲面の 3 次元版として豊かな研究対象であり，特に Picard 数 1 のものは Iskovskikh [36, 37, 39] によって明示的に分類されている．向井 [72] によるベクトル束を用いた記述は双正則的である．Iskovskikh の分類の前提は Shokurov による general elephant 予想の解決 [83] と適切な下での直線の存在 [84] である．Fano 多様体に対する general elephant 予想は最も大域的な主張であり，Gorenstein 性を外すと反例が出てくる．反標準因子系 $|-K_X|$ が空になる例や，それが唯一の元 $S \in |-K_X|$ を持ち，S が楕円特異点を持ったり正規でなかったりする例が知られている [35, 79].

Corti，Pukhlikov，Reid [22] は Iskovskikh，Manin の結果を大幅に拡張して，重み付き射影空間の一般の超平面 $X \subset \mathbf{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ として実現される 3 次元 Fano 多様体は双有理剛的であることを示した．Fano 多様体の双有理剛性と **K 安定性**との関係は目下さかんに研究されている対象である．Fano 多様体の K 多重安定性と **Kähler–Einstein 計量**を持つことは同値であるという Yau，Donaldson，Calabi の予想は近年 X. Chen，Donaldson，Sun [17] によって解決され，特異点を持つ場合へと拡張されている [6, 60, 62]．Stibitz，Zhuang [88] によれば，有理的な対数的標準閾に相当する α 不変量が 1/2 以上である双有理超剛的な Fano 多様体は K 安定であり Kähler–Einstein 計量を持つ．Cheltsov [12] と Kim，岡田，Won [52] により上の Fano 多様体 $X \subset \mathbf{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ の α 不変量は 1/2 以上であることが確かめられ，それが双有理超剛的ならば Kähler–Einstein 計量を持つ．

10 極小モデル

双有理同値な極小モデルたちは森ファイバー空間とは対照的に多くの性質を共有する．二つの極小モデル X，X' の双有理射 $X \dashrightarrow X'$ は余次元 1 で同型であり，川又 [51] はそれがフロップの有限列に分解されることを見た．Kollár [53] はさらに 3 次元フロップ $X \to Y \leftarrow X^+$ は解析的に**対合** (involution) を用いて記述されることを観察した．特に X と X^+ の解析的特異点集合は等しい．例として前述の Atiyah のフロップを考える．$Y = (x_1x_2 + x_3x_4 = 0)$ 上で $\pi\colon X \to Y$ と $\pi^+\colon X^+ \to Y$ はそれぞれイデアル (x_2, x_4) と (x_1, x_4) に沿う爆発であった．このとき π^+ は x_1 と x_2 の交換 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_1, x_3, x_4)$ で定まる Y の対合 $\iota\colon Y \to Y$ による合成 $\iota \circ \pi\colon X \to Y$ である．

極小モデル X における重要な問題はネフ標準因子 K_X が半豊富であることを主張する**アバンダンス予想**である．ここで**小平次元** $\kappa = \kappa(X)$ と**数値的小平次元** $\nu = \nu(X)$ を導入する．小平次元 κ は十分大きく割り切れる整数 l に対して線型系 $|lK_X|$ が定める有理写像 $\varphi_l\colon X \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(\mathscr{O}_X(lK_X))$ の像 $\varphi_l(X)$ の次元であり，数値的小平次元 ν は K_X^ν が数値的に非自明であるような最大の整数である．アバンダンス予想は川又 [46]，中山 [73]，Lai [59] らの仕事により次の二つの主張に帰着されている．

- $\kappa \geq 0$.
- $\nu \geq 1$ ならば $\kappa \geq 1$.

3 次元の場合は前者は宮岡 [64] により，後者は $\nu = 1$ のとき宮岡 [63]，$\nu = 2$ のとき川又 [49] により示されている．$\nu = 3$ から $\kappa = 3$ が従うことは一般論による．

アバンダンスは滑らかな極小モデル X に対して lK_X が自由になる正の整数 l の存在を主張するが，そのような l を上から抑えられるかどうかは興味深い問題である．κ が次元に等しいときは Hacon，McKernan [30] および高山 [89] により正しい．3 次元に限れば $\kappa = 0, 1, 2$ のときそれぞれ川又 [47]，藤野，森 [26]，Viehweg，Zhang [93] により示されて有界性は完成している．次の問

題は l を明示的に抑えることである．J. A. Chen，M. Chen [13, 14, 15, 16] は 3 次元極小モデル X において $\kappa = 3$ ならば $h^0(\mathscr{O}_X(12K_X)) \geq 1$，$h^0(\mathscr{O}_X(24K_X)) \geq 2$ であり，すべての $l \geq 57$ に対して lK_X の定める有理写像 φ_l が双有理的であることを特異点版 Riemann–Roch 公式を用いて証明した．現在知られている最も悪い例は 46 次超曲面 $X_{46} \subset \mathbf{P}(4,5,6,7,23)$ であり，$l = 23$ ではじめて φ_l が双有理的になる．

参考文献

[1] H. Abban, M. Fedorchuk and I. Krylov. Stability of fibrations over one-dimensional bases. Duke Math. J. **171** (2022), 2461–2518.

[2] V. A. Alekseev. Rationality conditions for three-dimensional varieties with sheaf of del pezzo surfaces of degree 4. Mat. Zametki **41** (1987), 724–730; translation in Math. Notes **41** (1987), 408–411.

[3] M. Artin and D. Mumford. Some elementary examples of unirational varieties which are not rational. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **25** (1972), 75–95.

[4] M. F. Atiyah. On analytic surfaces with double points. Proc. Roy. Soc. London Ser. A **247** (1958), 237–244.

[5] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and P. Swinnerton-Dyer. Variétés stablement rationnelles non rationnelles. Ann. of Math. (2) **121** (1985), 283–318.

[6] R. J. Berman, S. Boucksom and M. Jonsson. A variational approach to the Yau–Tian–Donaldson conjecture. J. Amer. Math. Soc. **34** (2021), 605–652.

[7] C. Birkar. Anti-pluricanonical systems on Fano varieties. Ann. of Math. (2) **190** (2019), 345–463.

[8] C. Birkar. Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties. Ann. of Math. (2) **193** (2021), 347–405.

[9] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon and J. McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 405–468.

[10] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun and T. Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. J. Algebraic Geom. **22** (2013), 201–248.

[11] F. Campana. Connexité rationnelle des variétés de Fano. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **25** (1992), 539–545.

[12] I. A. Cheltsov. Extremal metrics on two Fano manifolds. Mat. Sb. **200** (2009), 97–136; translation in Sb. Math. **200** (2009), 95–132.

[13] J. A. Chen and M. Chen. Explicit birational geometry of threefolds of general type, I. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **43** (2010), 365–394.

[14] J. A. Chen and M. Chen. Explicit birational geometry of 3-folds of general type, II. J. Differential Geom. **86** (2010), 237–271.

[15] J. A. Chen and M. Chen. Explicit birational geometry of 3-folds and 4-folds of general type, III. Compos. Math. **151** (2015), 1041–1082.

[16] M. Chen. On minimal 3-folds of general type with maximal pluricanonical section index. Asian J. Math. **22** (2018), 257–268.

[17] X. Chen, S. Donaldson and S. Sun. Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), 235–278.

[18] C. H. Clemens and P. A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. Ann. of Math. (2) **95** (1972), 281–356.

[19] A. Corti. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov. J. Algebraic Geom. **4** (1995), 223–254.

[20] A. Corti. Del Pezzo surfaces over Dedekind schemes. Ann. of Math. (2) **144** (1996), 641–653.

[21] A. Corti. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry. *Explicit birational geometry of 3-folds*, 259–312. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **281**, Cambridge Univ. Press, 2000.

[22] A. Corti, A. Pukhlikov and M. Reid. Fano 3-fold hypersurfaces. *Explicit birational geometry of* 3*-folds*, 175–258. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **281**, Cambridge Univ. Press, 2000.

[23] T. Ducat. Divisorial extractions from singular curves in smooth 3-folds. Internat. J. Math. **27** (2016), 1650005, 23pp.

[24] D. Eisenbud. Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations. Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), 35–64.

[25] P. Francia. Some remarks on minimal models I. Compos. Math. **40** (1980), 301–313.

[26] O. Fujino and S. Mori. A canonical bundle formula. J. Differential Geom. **56** (2000), 167–188.

[27] M. M. Grinenko. Birational properties of pencils of del Pezzo surfaces of degrees 1 and 2. Mat. Sb. **191** (2000), 17–38; translation in Sb. Math. **191** (2000), 633–653.

[28] M. M. Grinenko. On fibrations into del Pezzo surfaces. Mat. Zametki **69** (2001), 550–565; translation in Math. Notes **69** (2001), 499–513.

[29] P. Hacking and Y. Prokhorov. Smoothable del Pezzo surfaces with quotient singularities. Compos. Math. **146** (2010), 169–192.

[30] C. D. Hacon and J. McKernan. Boundedness of pluricanonical maps of varieties of general type. Invent. Math. **166** (2006), 1–25.

[31] C. D. Hacon and J. McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type II. J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 469–490.

[32] C. D. Hacon and J. McKernan. The Sarkisov program. J. Algebraic Geom. **22** (2013), 389–405.

[33] T. Hayakawa. Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **35** (1999), 515–570.

[34] T. Hayakawa. Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities, II. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** (2000), 423–456.

[35] A. R. Iano-Fletcher. Working with weighted complete intersections. *Explicit birational geometry of* 3*-folds*, 101–173. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **281**, Cambridge Univ. Press, 2000.

[36] V. A. Iskovskih. Fano 3-folds. I. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 516–562; translation in Math. USSR-Izv. **11** (1977), 485–527.

[37] V. A. Iskovskih. Fano 3-folds. II. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), 506–549; translation in Math. USSR-Izv. **12** (1978), 469–506.

[38] V. A. Iskovskikh. On the rationality problem for conic bundles. Duke Math. J. **54** (1987), 271–294.

[39] V. A. Iskovskikh. Double projection from a line on Fano threefolds of the first kind. Mat. Sb. **180** (1989), 260–278; translation in Math. USSR-Sb. **66** (1990), 265–284.

[40] V. A. Iskovskih and J. I. Manin. Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. Mat. Sb. **86**(**128**) (1971), 140–166; translation in Math. USSR-Sb. **15** (1971), 141–166.

[41] D. B. Jaffe. Local geometry of smooth curves passing through rational double points. Math. Ann. **294** (1992), 645–660.

[42] M. Kawakita. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points. Invent. Math. **145** (2001), 105–119.

[43] M. Kawakita. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to compound A_1 points. Compos. Math. **133** (2002), 95–116.

[44] M. Kawakita. General elephants of three-fold divisorial contractions. J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 331–362.

[45] M. Kawakita. Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices. Duke Math. J. **130** (2005), 57–126.

[46] Y. Kawamata. Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties. Invent. Math. **79** (1985), 567–588.

[47] Y. Kawamata. On the plurigenera of minimal algebraic 3-folds with $K \equiv 0$. Math. Ann. **275** (1986), 539–546.

[48] Y. Kawamata. Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces. Ann. of Math. (2) **127** (1988), 93–163.

[49] Y. Kawamata. Abundance theorem for minimal threefolds. Invent. Math. **108** (1992), 229–246.

[50] Y. Kawamata. Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities. *Higher dimensional complex varieties*, 241–246. De Gruyter, 1996.

[51] Y. Kawamata. Flops connect minimal models. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), 419–423.

[52] I.-K. Kim, T. Okada and J. Won. K-stability of birationally superrigid Fano 3-fold weighted hypersurfaces. arXiv:2011.07512.

[53] J. Kollár. Flops. Nagoya Math. J. **113** (1989), 15–36.

[54] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori. Rational curves on Fano varieties. *Classification of irregular varieties*, 100–105. Lecture Notes in Math. **1515**, Springer, 1992.

[55] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori. Rationally connected varieties. J. Algebraic Geom. **1** (1992), 429–448.

[56] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori. Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds. J. Differential Geom. **36** (1992), 765–779.

[57] J. Kollár and S. Mori. Classification of three-dimensional flips. J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 533–703; errata by S. Mori ibid. **20** (2007), 269–271.

[58] J. Kollár and N. I. Shepherd-Barron. Threefolds and deformations of surface singularities. Invent. Math. **91** (1988), 299–338.

[59] C.-J. Lai. Varieties fibered by good minimal models. Math. Ann. **350** (2011), 533–547.

[60] C. Li. G-uniform stability and Kähler–Einstein metrics on Fano varieties. Invent. Math. **227** (2022), 661–744.

[61] J. Lin. Birational unboundedness of **Q**-Fano threefolds. Int. Math. Res. Not. IMRN **2003** (2003), 301–312.

[62] Y. Liu, C. Xu and Z. Zhuang. Finite generation for valuations computing stability thresholds and applications to K-stability. Ann. of Math. (2) **196** (2022), 507–566.

[63] Y. Miyaoka. Abundance conjecture for 3-folds: case $\nu = 1$. Compos. Math. **68** (1988), 203–220.

[64] Y. Miyaoka. On the Kodaira dimension of minimal threefolds. Math. Ann. **281** (1988), 325–332.

[65] Y. Miyaoka and S. Mori. A numerical criterion for uniruledness. Ann. of Math. (2) **124** (1986), 65–69.

[66] S. Mori. On 3-dimensional terminal singularities. Nagoya Math. J. **98** (1985), 43–66.

[67] S. Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 117–253.

[68] S. Mori and Y. Prokhorov. On **Q**-conic bundles. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), 315–369.

[69] S. Mori and Y. Prokhorov. On **Q**-conic bundles, II. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), 955–971.

[70] S. Mori and Y. Prokhorov. On **Q**-conic bundles, III. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **45** (2009), 787–810.

[71] S. Mori and Y. G. Prokhorov. Multiple fibers of del Pezzo fibrations. Tr. Mat. Inst. Steklova **264** (2009), 137–151; reprinted in Proc. Steklov Inst. Math. **264** (2009), 131–145.

[72] S. Mukai. Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), 3000–3002.

[73] N. Nakayama. *Zariski-decomposition and abundance*. MSJ Memoirs **14**, Mathematical Society of Japan, 2004.

[74] S. A. Papadakis and M. Reid. Kustin–Miller unprojection without complexes. J. Algebraic Geom. **13** (2004), 563–577.

[75] Y. Prokhorov. A note on degenerations of del Pezzo surfaces. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **65** (2015), 369–388.

[76] A. V. Pukhlikov. Birational automorphisms of algebraic threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **62** (1998), 123–164; translation in Izv. Math. **62** (1998), 115–155.

[77] M. Reid. Minimal models of canonical 3-folds. *Algebraic varieties and analytic varieties*, 131–180. Adv.

Stud. Pure Math. **1**, North-Holland, 1983.
[78] M. Reid. Young person's guide to canonical singularities. *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985*, 345–414. Proc. Sympos. Pure Math. **46**, Part 1, Amer. Math. Soc., 1987.
[79] T. Sano. Deforming elephants of **Q**-Fano 3-folds. J. Lond. Math. Soc. (2) **95** (2017), 23–51.
[80] V. G. Sarkisov. Birational automorphisms of conic bundles. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **44** (1980), 918–945; translation in Math. USSR-Izv. **17** (1981), 177–202.
[81] V. G. Sarkisov. On conic bundle structures. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), 371–408; translation in Math. USSR-Izv. **20** (1983), 355–390.
[82] V. G. Sarkisov. Birational maps of standard **Q**-Fano fiberings. Kurchatov Institute of Atomic Energy preprint, 1989.
[83] V. V. Šokurov. Smoothness of the general anticanonical divisor on a Fano 3-fold. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), 430–441; translation in Math. USSR-Izv. **14** (1980), 395–405.
[84] V. V. Šokurov. The existence of a straight line on Fano 3-folds. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), 922–964; translation in Math. USSR-Izv. **15** (1980), 173–209.
[85] V. V. Shokurov. Prym varieties: theory and applications. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **47** (1983), 785–855; translation in Math. USSR-Izv. **23** (1984), 83–147.
[86] V. V. Shokurov. The nonvanishing theorem. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **49** (1985), 635–651; translation in Math. USSR-Izv. **26** (1986), 591–604.
[87] K. A. Shramov. On the rationality of non-singular threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces of degree 4. Mat. Sb. **197** (2006), 133–144; translation in Sb. Math. **197** (2006), 127–137.
[88] C. Stibitz and Z. Zhuang. K-stability of birationally superrigid Fano varieties. Compos. Math. **155** (2019), 1845–1852.
[89] S. Takayama. Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type. Invent. Math. **165** (2006), 551–587.
[90] N. Tziolas. Terminal 3-fold divisorial contractions of a surface to a curve I. Compos. Math. **139** (2003), 239–261.
[91] N. Tziolas. Families of D-minimal models and applications to 3-fold divisorial contractions. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **90** (2005), 345–370; corrigendum ibid. **93** (2006), 82–84.
[92] N. Tziolas. Three-fold divisorial extremal neighborhoods over cE_7 and cE_6 compound DuVal singularities. Internat. J. Math. **21** (2010), 1–23.
[93] E. Viehweg and D.-Q. Zhang. Effective Iitaka fibrations. J. Algebraic Geom. **18** (2009), 711–730.