

GENERAL ELEPHANTS OF THREE-FOLD DIVISORIAL CONTRACTIONS

川北 真之

高次元代数多様体の研究において、一つの中心的役割を担うのが極小モデル理論である [9], [11]. この理論は、マイルドな特異点しか持たない代数多様体に対してそれと双有理で調べやすい代数多様体を与える。両者は因子収縮写像およびフリップの合成で結ばれる。森氏が 3 次元でこの理論を完成させて以来 [14], 3 次元代数多様体の明示的研究が期待されるようになってきた。本稿では、その流れに沿ってなされた私の 3 次元因子収縮写像の明示的研究の成果を解説する。原論文は [4], [5], [6] である。なお、基礎体は複素数体とし、古典的位相を考えることとする。

はじめに研究対象を正確にさせよう。まず我々の考える特異点のクラス、端末特異点を定義する。 X が高々端末特異点しか持たないとは、 X が正規かつ \mathbb{Q} -Gorenstein であって、ひとつ特異点解消 $f: Y \rightarrow X$ を考えて $K_Y = f^*K_X + \sum a_i E_i$, E_i は例外因子、と表現したとき、すべての例外因子の係数 a_i が正となることを言う。2 次元では端末特異点であることと滑らかな点であることは同値である。3 次元端末特異点も分類されている。Gorenstein のときは、Reid 氏の結果 [15] によって端末特異点であることと孤立複合 Du Val 特異点であることは同値である。ここで複合 Du Val 特異点とは一般超平面切断が Du Val 特異点となる点を言い、Du Val 特異点の型 A_n, D_n, E_n に応じて複合 A_n 点、複合 D_n 点、複合 E_n 点と呼ばれる。一方、non-Gorenstein 端末特異点は森氏によって記述されている [13]。

いよいよ因子収縮写像を定義する。 $f: Y \rightarrow X$ を高々端末特異点しか持たない代数多様体間の固有射とする。このとき f が因子収縮写像であるとは、 Y 上の f の例外集合が素因子であって、 $-K_Y$ が f -豊富であることを言う。3 次元では例外因子の収縮先は曲線または点であるが、ここでの研究対象は収縮先が Gorenstein 点となる因子収縮写像である。極小モデル理論の立場に立てば、代数多様体の明示的研究における最も基本的な対象は双有理な代数多様体どうしを結ぶ因子収縮写像およびフリップである。3 次元に話を限定すれば、フリップについては森氏の 3 次元極小モデル理論の完成への過程で、あるいは引き続いてなされた Kollár 氏との共同研究 [10] でかなり明示的に調べられているが、しかしながら因子収縮写像については、その明示的研究が極小モデル理論の完成に不要であったため、満足いく結果が得られていなかった。そこで我々は 3 次元因子収縮写像に的を絞る。例外因子の収縮先が曲線の場合は [10] の結果が適用できることと、例外因子が付値として収縮先の曲線から一意に定まることから、ある意味結果があると言える。それに対して収縮先が点の場合はまだまだ研究の余地はあり、まずは点が Gorenstein の場合を研究することは妥当である。以下では

$$f: (Y \supset E) \rightarrow (X \ni P)$$

は 3 次元因子収縮写像で例外因子 E を Gorenstein 点 P に収縮させる射とし、 f は芽 $P \in X$ の上で考えることとする。

収縮先が点である 3 次元因子収縮写像 $f: Y \rightarrow X$ の研究の歴史に触れておく。 f を調べる方法は Y から出発する立場と X から出発する立場に大別できる。前者の立場からは、 Y が滑らかな場合に森氏が f を完全に記述し [12], Cutkosky 氏がその結果を Y が Gorenstein の場合に拡張している [3]。他方後者の立場からは、川又氏が X が端末商特異点のとき f がある重み付きブローアップとして一意に定まることを [8], Corti 氏が X が標準 2 重点のとき f が通常のブローアップとして一意に定まることを [2], それぞれ示している。

我々の研究対象 $f: (Y \supset E) \rightarrow (X \ni P)$ に戻ろう. Y の general elephants に注目する. ここで general elephants とは単に反標準因子の線形系 $| -K|$ の一般元のことである. この定義は Reid 氏によるもので [17], elephants は elements of the anti-canonical system に由来するとも言われているが, 定かではない. general elephants に関して Reid 氏は次の予想を提唱している.

general elephants 予想. 反標準因子が豊富となる 3 次元の適当な状況下では, general elephants は高々 Du Val 特異点しか持たない.

この予想について少し解説したい. もともと Reid 氏は, 前述の 3 次元 Gorenstein 末端特異点の特徴付けを得た際に, それが Du Val 特異点の 1 パラメータスムージングの全空間とみなせることに着目し, この予想を提唱している. 3 次元末端特異点の芽については予想は成立する. しかしながら最も端緒な例証であり, 私のこの予想への着目の根拠でもある結果は, 森氏による 3 次元フリップの存在定理は, この予想を証明することを通してフロップの存在に帰着させて [7] 得られることである. すなわち, $f: (Y \supset C) \rightarrow (X \ni P)$ を 3 次元フリッピング収縮射としたとき, C のまわりで $| -K_Y|$ の一般元は高々 Du Val 特異点しか持たない [10], [14]. また, 大域的な例では 3 次元 \mathbb{Q} -Fano 多様体についての結果がある [16], [18], [19]. 私の主定理は, 我々の 3 次元因子収縮写像に対して general elephants 予想が成立することである.

主定理. $f: (Y \supset E) \rightarrow (X \ni P)$ を 3 次元因子収縮写像で例外因子 E を Gorenstein 点 P に収縮させる射とする. このとき, E のまわりで $| -K_Y|$ の一般元は高々 Du Val 特異点しか持たない.

もちろんこの結果自体非常に意味があるが, 研究動機は f を明示的に調べることであった. この定理と明示的研究の関係を私の研究過程と合わせて概説する. もともと私は 3 次元代数多様体の明示的研究のひとつの方向である Sarkisov プログラム [1] の応用の立場から, P が滑らかな点の場合の f の分類を考えていた. この過程で, 後述の f の数値的分類定理を得て, ここから分類結果を得た. しかし P が一般の Gorenstein 点の場合の f の分類を統一的に記述するためには数値的分類定理のみでは不十分であり, general elephants 予想と組み合わせではじめて良い記述が得られることが分かった. よって general elephants 予想の解決は重みを増し, この予想を数値的分類定理と森氏の 3 次元フリップの存在定理の証明方針を組み合わせで証明したわけである.

f の数値的分類定理を解説する. $-E$ は f -豊富なので $Y = \text{Proj}_X \bigoplus_{i \geq 0} f_* \mathcal{O}_Y(-iE)$ と書けるため, X 上のイデアル層 $f_* \mathcal{O}_Y(iE)$ を調べることは基本的である. 川又-Viehweg 消滅定理 [9] を用いれば $d(i) := \dim f_* \mathcal{O}_Y(iE) / f_* \mathcal{O}_Y((i-1)E)$ は $i \leq a$ で χ の差 $\chi(\mathcal{O}_Y(iE)) - \chi(\mathcal{O}_Y((i-1)E))$ として表現されることが分かる. さらにこの値は特異点版 Riemann-Roch 公式 [17] を用いて明示的に計算できる. こうして得た $d(i)$ の情報は Y 上の特異点の可能性を制限する. 分類結果によれば, 3 次元末端特異点是小変形によっていくつかの末端商特異点に分解するため, Y 上の特異点からこの手続きを経て得られた末端商特異点の集合 $\{Q: \frac{1}{r_Q}(1, -1, av_Q)\}$ が考えられる. 記号の説明であるが, a は $K_Y = f^* K_X + aE$ で定義される食い違い係数, v_Q は $0 < v_Q \leq r_Q/2$ を満たす数, $\frac{1}{r_Q}(1, -1, av_Q)$ は各座標の重みを $(1, -1, av_Q) \in (\mathbb{Z}/(r_Q))^3$ として \mathbb{C}^3 を $\mathbb{Z}/(r_Q)$ の作用で割って得られる商特異点を意味している. $J := \{(r_Q, v_Q)\}$ とおく. 数値的分類定理は次の通りである.

数値的分類定理. f は次の中のただひとつの型に属する.

型	$1 + d(-1)$	J	a
O	≥ 2		1
I	1	$\{(7, 3)\}$ or $\{(3, 1), (5, 2)\}$	2
IIa	2	$\{(r, 2)\}$	$4/rE^3 = 2$ or 4
IIb	2	$\{(r_1, 1), (r_2, 1)\}$	$(r_1 + r_2)/r_1 r_2 E^3 \geq 2$
III	3	$\{(r, 1)\}$	$(1 + r)/rE^3 \geq 2$
IV	4	\emptyset	2

実際は O 型の場合も J の可能性を記述できて、その元の個数は 3 個以下になる。従って Y 上の non-Gorenstein 特異点の数は高々 3 個である。なお、3 個になる例は存在する。

例. $o \in (x_1^2 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^6 = 0) \subset \mathbb{C}^4$ で定義される複合 D_4 点の重み $(3, 2, 2, 1)$ による重み付きブローアップ f は O 型の因子収縮写像で、 Y は $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ 型商特異点を 3 個持つ。

また、I 型は次の意味で例外的である。I 型は $f_*\mathcal{O}_Y(-2E) = \mathfrak{m}_P$ 、すなわち $P \in X$ の任意の超平面切断が E に沿って重複度 2 以上となる唯一の型である。この場合は P は複合 E_7 点または E_8 点のどちらかとなり、 $J = \{(3, 1), (5, 2)\}$ の場合は例が存在する。

例. $o \in (x_1^2 + x_2^3 + x_2x_3^3 + x_4^7 = 0) \subset \mathbb{C}^4$ で定義される複合 E_7 点、および $o \in (x_1^2 + x_2^3 + x_3^5 + x_4^7 = 0) \subset \mathbb{C}^4$ で定義される複合 E_8 点の、重み $(7, 5, 3, 2)$ による重み付きブローアップ f は I 型の因子収縮写像で、 $J = \{(3, 1), (5, 2)\}$ である。

主定理と数値的分類定理から f を分類する。収縮先 P は Gorenstein 端末特異点、従って孤立複合 Du Val 特異点であるが、その可能性は滑らかな点から複合 E_8 点まで様々である。 P は滑らかに近いほど情報を持たなくなるため、一般には収縮先が P となる因子収縮写像 f の可能性は広がって問題は難しくなる。逆に P が悪い特異点であるほど特異点の記述が複雑となり、個々の場合の f の可能性の研究は易しくなっても包括的な扱いは望めなくなる。結局私は、滑らかな点あるいは複合 A_n 点のときと、複合 D_n 点あるいは E_n 点のときに二分して、前者については完全といえる f の記述を与え、後者については食い違い係数 a を制限することをもって記述とした。具体的には以下の定理を得た。

定理. (1) P を滑らかな点とする。このとき局所座標系 x_1, x_2, x_3 と互いに素な自然数 s, t が存在して、 f は重み $(1, s, t)$ の重み付きブローアップとなる。逆にこうして得られる写像はすべて因子収縮写像である。

(2) P を複合 A_1 点とする。このとき適当な同型

$$P \in X \cong o \in (x_1x_2 + x_3^2 + x_4^N = 0) \subset \mathbb{C}^4$$

が存在して、 f は以下のひとつの重み付きブローアップとなる。

- (i) 互いに素な自然数 $s, t \leq N/2$ が存在して、重み $(s, 2t - s, t, 1)$ 。
- (ii) $N = 3$ で、重み $(1, 5, 3, 2)$ 。

逆にこうして得られる写像はすべて因子収縮写像である。

(3) P を複合 A_n 点、 $n \geq 2$ とする。このとき次のひとつが成立する。

(i) 適当な同型

$$P \in X \cong o \in (x_1x_2 + g(x_3, x_4) = 0) \subset \mathbb{C}^4$$

が存在して、 f は重み $(r_1, r_2, a, 1)$ の重み付きブローアップとなる。ここで r_1, r_2 は互いに素な自然数、 a は $r_1 + r_2$ を割り切る自然数、 g は x_3, x_4 の重み $a, 1$ とする重み付き位数が $r_1 + r_2$ で、単項式 $x_3^{(r_1+r_2)/a}$ を含む。逆にこうして得られる写像はすべて因子収縮写像である。

(ii) P は複合 A_2 点で同型

$$o \in (x_1x_2 + x_3^3 + g_{\geq 4}(x_3, x_4) = 0) \subset \mathbb{C}^4$$

を持つ。ここで $g_{\geq 4}$ は全位数 4 以上、 Y はちょうど一つ non-Gorenstein 点を持ち $o \in (y_1^2 + y_2^2 + y_3^3 + y_4^3 = 0) \subset \mathbb{C}^4/\frac{1}{4}(1, 3, 3, 2)$ に同型で、食い違い係数 a は 3 である。

なお、(3)(ii) の場合の例は存在する。

例. $o \in (x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_1x_4^2 = 0) \subset \mathbb{C}^4$ で定義される複合 A_2 点の重み $(4, 3, 2, 1)$ による重み付きブローアップ f は IIb 型の因子収縮写像で、定理中の (3)(ii) の場合である。

定理. P を複合 D_n 点または E_n 点とする. このとき食い違い係数 a は 4 以下である.

食い違い係数 a が 1, 2, 3 の場合は例が存在するが, a が 4 となる例は知られていない. なお, a が 4 ならば P が複合 D_4, D_5, D_6 点のいずれかとなる.

主定理の証明の概略を述べる. $P \in X$ の一般超平面切断を H_X , その Y 上の双有理変換を H とする. f が 0 型あるいは I 型のときは, H 自身が Y の general elephant であってしかも高々 Du Val 特異点しか持たないことが簡単に分かる. f が II, III, IV 型の場合が本質的である. ここでは一般の場合の典型である III 型のときを解説したい. このとき Y はただ一つの non-Gorenstein 特異点 Q を持ち, Q は $\frac{1}{r}(1, -1, a)$ 型の商特異点である.

1 次元スキーム $Q \in H \cap E$ に注目する. 消滅定理から $H^1(H \cap E) = 0$ が従い, $H \cap E$ は \mathbb{P}^1 の和となる. そこでひとつ $Q \in C = \mathbb{P}^1 \subseteq H \cap E$ を固定して $Q \in C \subset Y$ を局所的に解析する. この解析は非常に入り組んでいるおり, とても本稿では述べられないが, 基本的には数値的分類定理と森氏の 3 次元フリップの存在定理の証明方針を組み合わせて徐々に詰めていくと説明しておく. こうして同型

$$Q \in C = H \cap E \subset Y \cong o \in (x_3\text{-axis}) \subset \mathbb{C}^3 / \frac{1}{r}(1, -1, a),$$

を得る. ここから $|-K_Y|$ は Q の外で自由であることが分かる. そこで Y の general elephant を S とすると, 数値的結果から S と C の Q における交点数は $1/r$ と計算され, 上同型を考えれば S の局所定義式は単項式 x_3 を含み, S が A_{r-1} 型の Du Val 特異点であることが分かる. このように主定理は, $|-K_Y|$ が non-Gorenstein 特異点の外で自由であること, general elephant が non-Gorenstein 特異点で Du Val 特異点であることから導かれた. この方針が基本であるが, 例外的な場合では, $-K_Y$ が例外因子 E とある Cartier 因子 L の和で書けることを用いて, $|-K_Y|$ が non-Gorenstein 特異点の外で自由であること, $|L|$ が non-Gorenstein 特異点で自由であること, E が non-Gorenstein 特異点で Du Val 特異点であることを示して主定理を得る.

f が II, III, IV 型の場合は general elephant 予想よりも強い主張が成立することを補足しておく. すなわち, Y の general elephant S 上の任意の点 Q について, Du Val 特異点 $Q \in S$ の型は 3 次元端末特異点の芽としての $Q \in Y$ の一般 Du Val 切断の型に一致する. また, S の X 上の双有理変換を S_X とたとき, Du Val 特異点の部分解消 $S \rightarrow S_X$ の例外集合 $E|_S$ は高々 2 個の規約成分から成る. 実際は $E|_S$ はほとんどの場合は規約となるが, 可約になる例も存在する.

例. $o \in (x_1^2 + x_2^2 x_3 + x_3^{2r} + x_4^r = 0) \subset \mathbb{C}^4$, r は 3 以上の奇数, で定義される複合 D_{r+1} 点の重み $(r, r, 1, 2)$ による重み付きブローアップ f は IIb 型の因子収縮写像で, $E|_S$ は可約となる.

REFERENCES

1. A. Corti, Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov, *J. Alg. Geom.* **4** (1995), 223-254.
2. A. Corti, Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry, *Explicit birational geometry of 3-folds*, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **281** (2000), 259-312.
3. S. Cutkosky, Elementary contractions of Gorenstein threefolds, *Math. Ann.* **280** (1988), 521-525.
4. M. Kawakita, Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points, *Invent. Math.* **145** (2001), 105-119.
5. M. Kawakita, Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to compound A_1 points, *Compos. Math.* **133** (2002), 95-116.
6. M. Kawakita, General elephants of three-fold divisorial contractions, to appear in *J. Am. Math. Soc.*
7. Y. Kawamata, Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces, *Ann. Math.* **127** (1988), 93-163.
8. Y. Kawamata, Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities, *Higher-dimensional complex varieties*, de Gruyter (1996), 241-246.
9. Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, Introduction to the minimal model problem, *Adv. Stud. Pure Math.* **10** (1987), 283-360.

10. J. Kollár and S. Mori, Classification of three-dimensional flips, *J. Am. Math. Soc.* **5** (1992), 533-703.
11. J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Camb. Tracts Math. **134** (1998).
12. S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, *Ann. Math.* **116** (1982), 133-176.
13. S. Mori, On 3-dimensional terminal singularities, *Nagoya Math. J.* **98** (1985), 43-66.
14. S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, *J. Am. Math. Soc.* **1** (1988), 117-253.
15. M. Reid, Minimal models of canonical 3-folds, *Adv. Stud. Pure Math.* **1** (1983), 131-180.
16. M. Reid, Projective morphisms according to Kawamata, preprint (1983).
17. M. Reid, Young person's guide to canonical singularities, *Proc. Symp. Pure Math.* **46** (1987), 345-414.
18. V. Shokurov, Smoothness of a general anticanonical divisor on a Fano variety, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), 430-441.
19. H. Takagi, On classification of \mathbb{Q} -Fano 3-folds of Gorenstein index 2 II, *Nagoya Math. J.* **167** (2002), 157-216.

東京大学大学院数理科学研究科, 〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3 丁目 8 番 1 号
E-mail address: kawakita@ms.u-tokyo.ac.jp