

## 高次元極小モデル理論の発展

川北真之 (京都大学数理解析研究所)

双有理幾何学とは、双有理な多様体は性質を共有するという見地から代数多様体を研究する学問である。そこでは各双有理同値類から代表的な多様体を抽出する操作が基礎的であるが、その抽出を標準因子の比較によって実現させる理論が極小モデル理論である。講演では高次元極小モデル理論の特に最近の発展を追いながら、その過程で私の研究成果と位置付けを紹介させて頂く。基礎体は複素数体とする。

イタリア学派による曲面の極小モデル理論の高次元化を目指して出発した高次元極小モデル理論は現在、極小モデルプログラム (MMP) の形で定式化されている。MMP とは、標準因子に関し極小な多様体を与えられた双有理同値類から抽出するプログラムである。MMP はある程度良い特異点のみを持つ代数多様体から出発し、因子収縮写像及びフリップと呼ばれる、標準因子と負の交点数を持つ曲線を減少させる双有理変換を施してゆく。最終的に標準因子が数値的に非負となる時、得られた多様体は極小モデルと呼ばれる。一方、多様体が負の交点数を持つ曲線で覆われていると、森ファイバー空間と呼ばれるファイバー構造が得られる。極小モデル理論の高次元化の障害は特異点が自然に現れることで、MMP の完成に際してはフリップに凝縮される。もし標準因子と負の交点数を持つ曲線群を収縮させる写像が余次元 1 で同型であるならば、収縮後の多様体は標準因子が  $\mathbb{Q}$ -Cartier とならないため、標準因子による比較ができない。そこで標準因子が  $\mathbb{Q}$ -Cartier となる別の多様体を構築する必要が生じ、この操作がフリップである。MMP はフリップの存在及びフリップの列の終止が示されて初めて完成するが、一般次元ではこれらは大きな予想として残されている。

MMP は森による端射線理論に発し、Reid、川又、Kollár、Shokurov 等の貢献で境界付多様体へ拡張定式化された。境界付多様体とは多様体  $X$  に有効  $\mathbb{R}$ -因子  $D$  を附した対  $(X, D)$  で  $K_X + D$  が  $\mathbb{R}$ -Cartier となる対のことで、しばしば対数的対と参照される。対象を境界付多様体の圏へ広げることで MMP はより効力を発揮する。境界付多様体へ拡張された MMP は対数的極小モデルプログラム (LMMP) と呼ばれる。

3次元では森のフリップの存在定理によって本来の MMP が完成され、その後主に Shokurov の努力により 3次元 LMMP は完全なものとなった。また極小モデルから多重対数標準因子に伴う射で作られる標準モデルの存在を主張するアバンダンス予想も、3次元ではやはり解決された。こうして 3次元 LMMP が完成すると、3次元双有理幾何の詳細な理解が追求されるようになり、特に森ファイバー空間同士の双有理変換を基本分解する Sarkisov プログラムが挙げられる。その際因子収縮写像及びフリップの明示的理解が基礎となるが、3次元フリップは森の存在証明の過程及び Kollár との共同研究で明示的記述が幾分得られた反面、因子収縮写像はその明示的側面が MMP の完成に不要であったため満足な結果は無かった。その要請に応じて、私は 3次元因子収縮写像の系統的研究を行った ([1-4])。

因子収縮写像とは、端末特異点を持つ代数多様体間のファイバー連結な固有射  $f: Y \rightarrow X$  で、例外集合が素因子で半標準因子  $-K_Y$  が  $f$ -豊富である写像を言う。3次元因子収縮写像では収縮先が点のときが本質的で、今後  $f: (Y \supset E) \rightarrow (X \ni P)$  は3次元因子収縮写像で例外因子  $E$  を点  $P$  に収縮させる写像としよう。私は写像  $f$  を食い違い係数が小さい場合を除いて完全に分類した。残された場合は case-by-case の性格が濃く統一的な扱いは望めないが、分類方法は確立された。

$Y$  上の自然な因子  $K_Y$  と  $E$  の結合から定まる  $X$  上の層  $f_*\mathcal{O}_Y(iK_Y + jE)$  は  $f$  の情報を内包し、差の次元  $\dim f_*\mathcal{O}_Y(iK_Y + jE)/f_*\mathcal{O}_Y(iK_Y + (j-1)E)$  は数値的研究上の基本量となる。小平型消滅定理からこの次元は適当な条件下で Euler-Poincaré 指標の差に一致し、特異点版 Riemann-Roch 公式によって明示的に計算できる。ここに  $Y$  上の特異点の寄与する項が現れるため、特異点の数値的情報が引き出される。更に進めて  $f$  の幾何的解析を行うに当たっては、Reid による general elephant 予想が鍵となる。general elephant とは単に反標準因子の線型系の一般元のこと、予想は反標準因子が豊富となる3次元の適当な状況下では general elephant は高々 Du Val 特異点を持つと主張する。着眼の根拠は3次元フリップの存在がこの予想の証明を通して得られる事実で、例外因子  $E$  と  $X$  の一般超平面切断の  $Y$  上の厳密変換との交叉  $C$  は、フリップ収縮射の例外曲線に類似するのである。更に  $f$  の明示的記述の試行過程で、 $f$  の記述が  $Y$  上の特異点の数値的分類に general elephant 予想を併せれば得られるとわかった。そこで交叉  $C$  の様子を緻密に解析することで3次元因子収縮写像の general elephant 予想を最終的に解決した。

定理  $f: Y \rightarrow X \ni P$  を3次元因子収縮写像の解析的な芽とする。このとき  $|-K_Y|$  の一般元は高々 Du Val 特異点を持つ。

写像  $f$  は  $Y$  上の特異点の数値的分類から通常型と例外型に大別される。 $P \in X$  の指数  $n$  を  $nK_X$  が Cartier となる最小の正整数とし、食い違い係数  $a/n$  を関係式  $K_Y = f^*K_X + (a/n)E$  で定義する。例外型では  $a$  と  $n$  との互素性の考察から食い違い係数が小さいことがわかる。通常型では general elephant 予想が強い形で示される。 $Y$  の general elephant を  $S$  とすると、 $f$  は Du Val 特異点のクレパント部分解消  $f_S: S \rightarrow S_X$  を導くが、その  $f_S$  が記述でき、これによって通常型の  $f$  は殆どが重み付きブローアップで記述されることがわかる。結論として我々の3次元因子収縮写像  $f$  は以下の通り分類される。

定理 (1)  $f$  を例外型とする。 $a$  と  $n$  が互いに素ならば、食い違い係数  $a/n$  は  $n \geq 2$  で  $1/n$ 、 $n = 1$  で  $1, 2, 3, 4$  となる。互いに素でない場合、 $P$  は  $cD/2$  型で  $a/n = 2/2, 4/2$ 、或いは  $cE/2$  型で  $a/n = 2/2$  である。

(2)  $f$  を通常型とする。食い違い係数  $a/n$  が  $1/n$  でないならば、 $P$  は  $cA/n$  型、或いは  $cD/n$  型かつ  $n = 1, 2$  である。また  $P \in X$  を高々5次元商特異点に適当に埋め込むことで、 $f$  は重み付きブローアップで記述される。

さて、Shokurov は高次元 LMMP の完成を目標としてフリップの存在予想及び終止予想の次元に関する帰納的証明の青写真を展開させてきた。目下高次元 LMMP の研究は殆どが彼のアイデアに由来する。彼は special termination と呼ばれる特殊な設定上のフリップの列の終止を仮

定した上で、フリップの存在を pl flip と呼ばれる特殊フリップの存在に帰着させた。更に special termination が低次元 LMMP から導かれることを示し、結果としてフリップの存在問題を pl flip の存在問題に還元させた。21 世紀の除幕に前後して Shokurov が発表した 4 次元 pl flip の存在証明は、彼以外真偽を判定しかねる程に複雑難解であったが、昨年 Hacon と McKernan によって低次元 LMMP の仮定下で pl flip の存在が証明され、終止予想のみが残されることとなった。彼らの証明の骨子は Shokurov のそれに基づくが、重要なのは、Siu、川又、中山による多重標準因子の延長定理を境界付に拡張し応用させたことである。延長定理は終止予想の観点からも更に研究されるべきであろう。

残されたフリップの終止予想は多様体集合の有限性問題であるから、存在予想より難しいと推測される。終止予想自体は大域的問題であるが、やはり Shokurov の観察に従えば、極小食い違い係数と言う局所的な値についての二つの予想に還元される。一つは閉点上の極小食い違い係数の下半連続性であり、もう一つはある種の降鎖律を満たす境界付多様体の族が与える極小食い違い係数から成る集合の昇鎖律である。

極小食い違い係数の標準的な定義を簡潔に述べておこう。これは対数的対  $(X, D)$  上定義される。 $X$  の関数体上の代数的附値とは、 $X$  と双有理な多様体上の素因子が定める附値である。それが双有理射  $f: \bar{X} \rightarrow X$  を伴う多様体  $\bar{X}$  上の素因子  $E$  の定める代数的附値  $v_E$  であるとき、 $f(E)$  を附値  $v_E$  の  $X$  上の中心と言う。更に  $D$  の厳密変換  $\bar{D}$  と例外  $\mathbb{R}$ -因子  $A$  を用いて  $K_{\bar{X}} + \bar{D} = f^*(K_X + D) + A$  と記述するとき、附値  $v_E$  の食い違い係数が  $\mathbb{R}$ -因子  $A - \bar{D}$  に現れる  $E$  の係数として定義される。 $X$  のスキームとしての点  $x$  における対  $(X, D)$  に関する極小食い違い係数とは、中心が  $\{x\}$  の閉包に含まれる代数的附値の食い違い係数の極小値である。

Shokurov によるフリップの終止問題へのアプローチが示唆するように、極小食い違い係数は今後の極小モデル理論の研究の鍵であると思われる。そもそも極小モデル理論に現れる特異点、すなわち末端特異点、標準特異点、対数的末端特異点、対数的標準特異点等は、極小食い違い係数の言葉で定義される。また、特異点の程度が極小食い違い係数の大小に反映して非特異点に対し係数が最大となるであろうことが、経験から知られている。それなのに正面から極小食い違い係数を対象とする研究は進捗しないままで、次元を固定したとき係数が上に有界となるかどうかすら未解決である。私はその視点から、対数的標準特異点に関する逆同伴を証明した ([5])。結果は対数的標準モデルのモジュライ問題にも役に立つ。

正規代数多様体  $X$  とその上の被約因子  $S$  に対し、 $X$  上の対数的対  $(X, S+B)$  が与えられると、 $S$  の正規化  $S^v$  上に自然な対数的対  $(S^v, B^v)$  が導入されるが、両者の特異点を比較する主張が同伴或いは逆同伴である。私が証明したことは、 $(X, S+B)$  が対数的標準特異点を持つことと  $(S^v, B^v)$  が対数的標準特異点を持つことの同値性である。対数的標準特異点とは極小食い違い係数が  $-1$  以上となる特異点のことで、極小モデル理論が展開できる最も広範な多様体類を与える。

定理  $(X, S+B)$  は対数的対で、 $S$  は  $B$  と共通因子を持たない被約因子とする。 $S$  の正規化  $S^v$  上自然に導入される対数的対を  $(S^v, B^v)$  とする。こ

のとき  $(X, S+B)$  が  $S$  の近傍で対数的標準特異点を持つことと  $(S^V, B^V)$  が対数的標準特異点を持つことは同値である。

証明では  $X$  上の随伴イデアル層の列  $\{\mathcal{I}_j\}$  と  $S$  上の乗数イデアル層の列  $\{\mathcal{I}_{j,S}\}$  を  $\mathcal{I}_0 := \mathcal{O}_X, \mathcal{I}_{0,S} := \mathcal{O}_S$  から帰納的に構成する。各  $j$  に付き  $(X, S+B, \mathcal{I}_j)$  の対数的特異点解消  $f_j: X_j \rightarrow X$  を取り、 $S_j$  を  $S$  の厳密変換、 $g_j: S_j \rightarrow S^V$  を導入された射、 $\mathcal{I}_j \mathcal{O}_{X_j} = \mathcal{O}_{X_j}(-A_j)$  とし、小さい正数  $\varepsilon_j$  に対し  $\mathcal{I}_{j+1} := f_{j*} \mathcal{O}_{X_j}(\lceil K_{X_j} + S_j - f_j^*(K_X + S + B) - (1 - \varepsilon_j)A_j \rceil)$ 、 $\mathcal{I}_{j+1,S} := f_{j*} \mathcal{O}_{S_j}(\lceil K_{S_j} - g_j^*(K_{S^V} + B^V) - (1 - \varepsilon_j)A_j|_{S_j} \rceil)$  と定義する。そうすると  $(X, S+B)$  が対数的標準特異点を持つことは  $\mathcal{I}_j$  が  $j \geq 1$  で一定であることで特徴付けられ、 $(S^V, B^V)$  が対数的標準特異点を持つことは  $\mathcal{I}_{j,S}$  が  $j \geq 1$  で一定であることで特徴付けられる。消滅定理から全射  $\mathcal{I}_j \rightarrow \mathcal{I}_{j,S}$  が得られるため、両者の同値性が出る。

逆同伴問題は3次元対数フリップの存在証明の過程で Shokurov によって提起された。次元に関する帰納的手法に着目する限り逆同伴は明らかに有効であるが、 $X$  への逆同伴を適用させる対象因子  $S$  の抽出が難しい。他方フリップの終止問題の見地からは更に踏み込んだ極小食い違い係数そのものに関する逆同伴が必要で、それは Kollár による拡張された逆同伴問題として定式化されている。

予想  $(X, S+B)$  及び  $(S^V, B^V)$  を上定理に同じ対数的対とする。このとき  $S$  のスキームとしての点  $s$  に対して、 $s$  上の  $(X, S+B)$  に関する極小食い違い係数と  $s$  上の  $(S^V, B^V)$  に関する極小食い違い係数は一致する。

一般の設定で現在知られている結果は、極小食い違い係数  $-1$  以上に対応する私の対数的標準特異点の同値性と、前述 Siu、川又、中山、Hacon 及び McKernan による多重対数標準因子の延長定理の系として出る、極小食い違い係数  $0$  以上に対応する標準特異点の同値性のみである。両者とも対数的標準特異点或いは標準特異点の特質に依存する証明によるから、予想の本質的証拠には至らない。しかし LMMP を仮定すれば技術的条件を要しながらも予想が成立する事実、及び Ein、Mustařa、安田によるジェット空間の言葉での極小食い違い係数の記述から得られる、 $X, S$  とともに完全交叉多様体の場合の予想の解決は、十分な根拠と言えよう。従って逆同伴問題の切り口からフリップの終止問題の還元たる極小食い違い係数の下半連続性問題及び昇鎖律問題の手懸りを追求することは、現在の高次元極小モデル理論の正統な課題である。

#### 参考文献

- [1] Kawakita, M.: Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points. *Invent. Math.* **145**, 105–119 (2001)
- [2] Kawakita, M.: Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to compound  $A_1$  points. *Compositio Math.* **133**, 95–116 (2002)
- [3] Kawakita, M.: General elephants of three-fold divisorial contractions. *J. Amer. Math. Soc.* **16**, 331–362 (2003)
- [4] Kawakita, M.: Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices. *Duke Math. J.* **130**, 57–126 (2005)
- [5] Kawakita, M.: Inversion of adjunction on log canonicity. to appear in *Invent. Math.*