

K3 曲面: 21世紀の楕円曲線 - 4つのK3

2026

正則な非特異点の
随分特異点とそれらの
の特異点解消

#2026

12/6/19 (金)

§1 4次曲面 (E 中心)

中央大, EwM

90分講演

例として Fermat 型 $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0$

$\subset \mathbb{P}^3$
(x, y, z, t)

4次元

1) \mathbb{P}^3 曲面 $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0$

に類似した曲線と相加した

2) \mathbb{P}^3 曲面 E 3 枚貼り合わせたもの

ホッジ-2 数 (変形の自由度) $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} - 4^2 = 19$

"難力" と "論理的" の両立は難しい

100年以上先端的な研究が続いている

部分1次反復 $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - \lambda xyzt = 0, \lambda \in \mathbb{C}, \dots (*)$
ホッジ-2

ミラー位 上の位相 2 重巡回群 C_4 の (symplectic) 作用で
実り, 2 枚の

$X_2: (x + y + z + t)^4 - \lambda^4 x y z t = 0 \subset \mathbb{P}^3$
(x, y, z, t)

有限対称性 Fermat 型 $4^3 \cdot G_4$ (部分 is symplectic)

(*) $\lambda = 12, M_{10} = 2^4 \cdot U_5$

Klein の 4 重巡回群 $x^2 y + y^2 z + z^2 x + t^4 = 0$
etc.

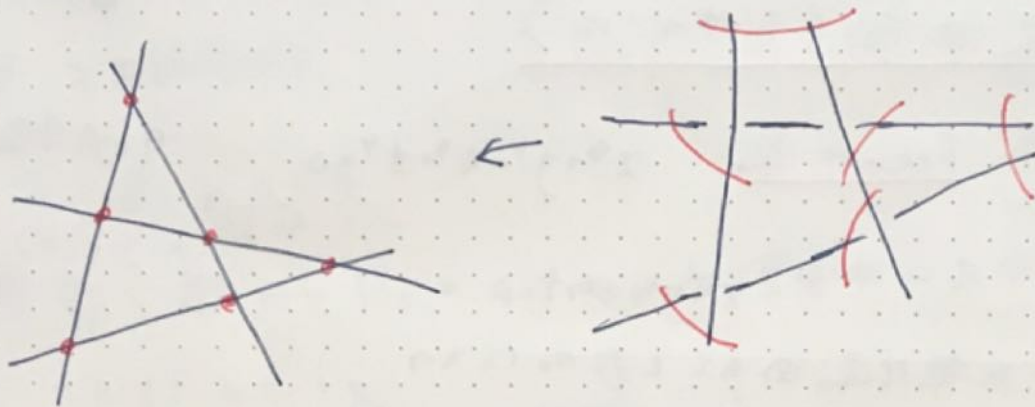
Riemann 球 (\mathbb{P}^1) の配置

Fermat 型 48 本 $\begin{cases} x = \varepsilon^i y \\ z = \varepsilon^j t \end{cases} \quad \begin{cases} i, j = 1, 3, 5, 7 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \\ \varepsilon = \sqrt[4]{1} \end{cases}$
等 2

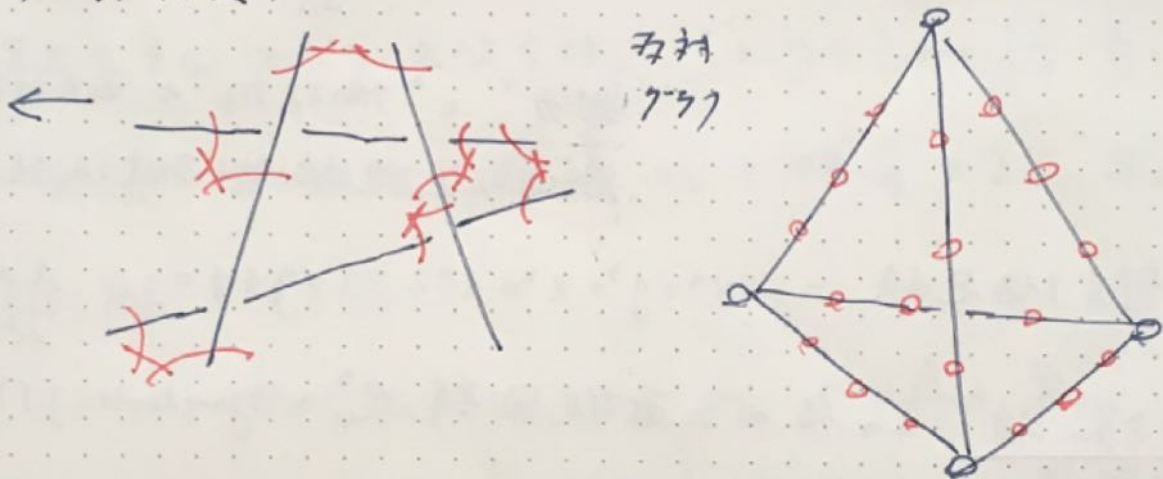
ミラ - 4次曲面 (λ : 一般) 四面 $X+Y+Z+T=0$

この交わりとして 4直線を含む。 (交点は 4次曲面の特異点, 6点に一致)

#2027



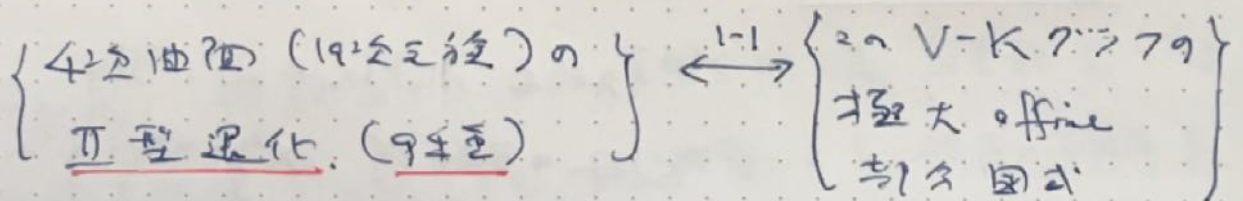
例外曲線 $(-2)H'$ 上の 12交点は 3点特異点, 1点に一致, H' と非特異.



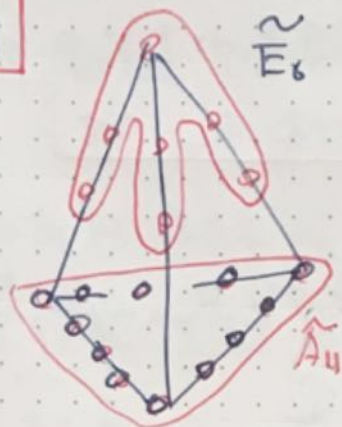
右村
7-37

$4 + 6 + 12 = 22$ 本の $(-2)H'$ を含む。この右村 7-37 は Vinberg-Kaplanshajn の定理に一致する。(有 unimodular 格子 $I_{1,18}$ の基本領域と一致。)

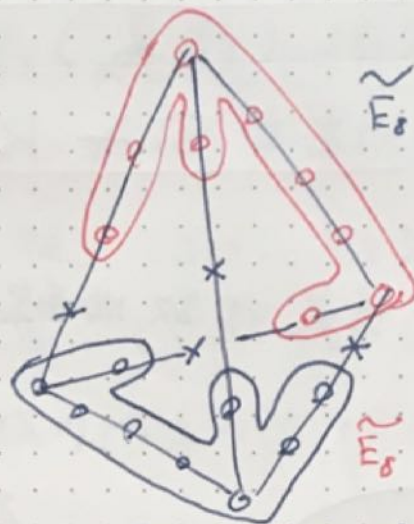
"ミラ" と呼ぶべき理由



例



(3次元曲面) + (4面)
への退化



2つの \tilde{E}_6 型楕円特異点を持つ
4次元曲面への退化

#2028

2重射影平面

$X \longrightarrow \mathbb{P}^2_{(x,y,z)} \quad z^2 = f_6(x,y,z)$

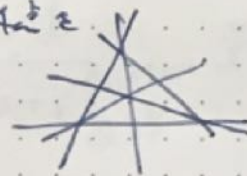
ハラセ-7数

$\frac{7 \cdot 8}{2} - 3^2 = 19$

\cup
 B 分岐は平面6次曲線

(注意)

明朝の講論には4次元
通過6次曲線が
か出現



$(2)_0 (3) \subset \mathbb{P}^4, \quad (2)_0 (2)_0 (2) \subset \mathbb{P}^5, \quad (2)_0 V_5 \subset \mathbb{P}^6, \dots$
 $d=6 \qquad d=8 \qquad d=10$

次数 $d \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ が離散不変量 (偏極数)

連続 (複素正則) ハラセ-7数 のことも 19

これが一歩一歩の明らかな子でその理解: 可算無限個の19次元
代数族

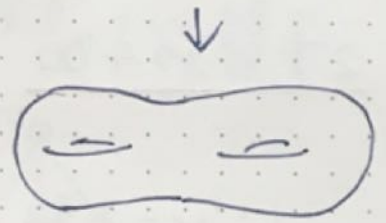
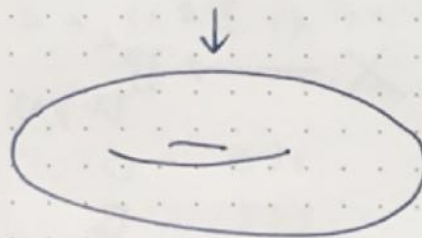
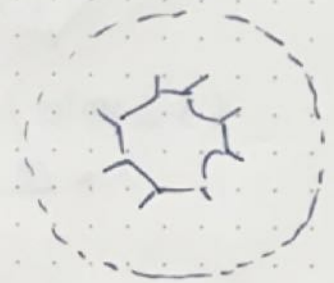
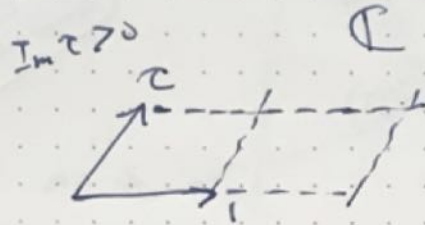
§2 代数 (楕圓) 多様体全体のうちの $K < 0$ の位置, 標準因子 K と小平次元 κ

#2029

定備非特異代数曲線 = コンパクト Riemann 面



P^1



計量 $\frac{dz d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$

$dz d\bar{z}$

$\frac{dz d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$

Genus 1 面

非 Euclid 面の Poincaré モデル

曲率

正

零

負

楕圓曲線

$y^2 = x^3 - g_2 x - g_3$

g_2, g_3 の見方が高次元 κ の δ 1 次元から決まる。

代数多様体は

$K < 0$
 $K = 0$
 $K > 0$

の 3 種類の混合物。

K は 曲率と符号が逆

K3 曲面 (1) 楯円曲线の 2 次元版 ($K=0$)
 (Riemann 球の 2 次元) 学連誌 5 月号 #2030

(2) 楯円曲线の 4 次元版. 3 つの独立な複素構造

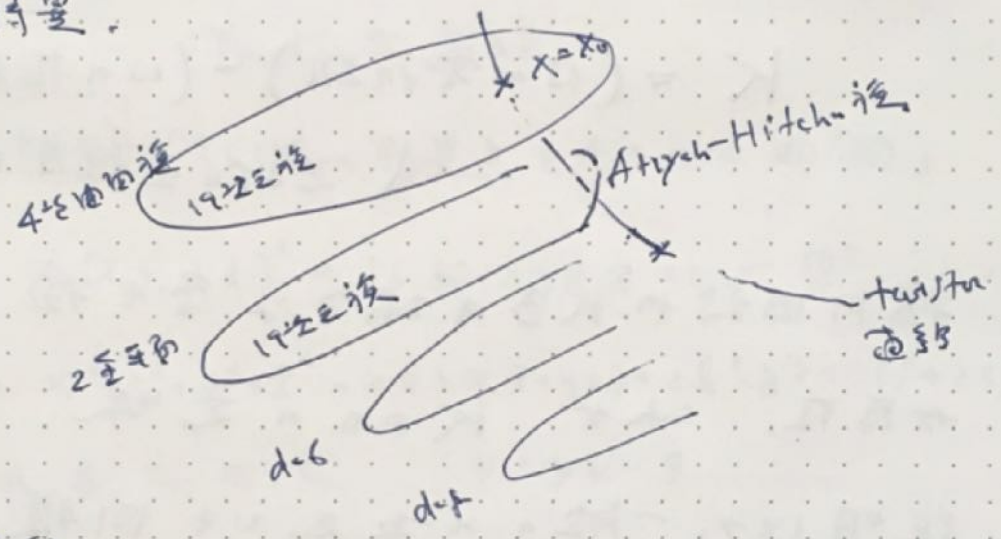
i, j, k (超 Kähler 構造 $i^2 = -j^2 = k^2 = -1, ij = -ji$)

ともとも正則 (regular) かつ $\int = 0$ (Calabi-Yau Ricci 平坦計量)

複素構造の変形理論より, 答空間は

$$h^1(T_X) = h^1(\Omega_X) = \underline{20 \text{ 次元}} \text{ (複素)}$$

で非特異.



twistor 束

$$\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \{a+ib+ck \mid a^2+b^2+c^2=1\}\}$$

X_0 複素構造 \mathbb{R}^3

X_∞ \dots

K とは何か? (複素幾何の Ricci 曲率の量子置換性)

代数的自方: 関数体 $\mathbb{C}(X)$ "曲面" X \mathbb{C} 上の超越方程式

微分の全体

$$\mathbb{C}(x)df_1 + \mathbb{C}(x)df_2$$

$\mathbb{C}(x)$ 上の 2 次元 \wedge 7 ト \wedge 空間. $f_1, f_2 \in \mathbb{C}(x)$
は代数的に独立 #2031

$(\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(x), \mathbb{C}(x)))$ の 7 次元空間

標準形式 $\omega = g dx \wedge dy$ の外積 $\mathbb{C}(x)df_1 \wedge df_2$

$$\omega = g df_1 \wedge df_2$$

標準因子 (は曲線の型と同じ)

$$K = (\omega \text{ の零点数}) - (\omega \text{ の極点数})$$

(忘れた重複度を掛ける)

楕円曲線や $K=0$ の場合は ω も極点も ω も存在. $K=0$ の意味. 2次元で証明して, 一般の n 次元でも同様.

別の見方 として 小平位元 が $h^0(mK)$

の mK 因子の増大度. (moduli の小平位元の高次元版)

$$K = K(X) \text{ とは } h^0(mK) \sim (\text{定数}) m^r \quad (m \rightarrow \infty)$$

r が整数 $K \in \{-\infty, 0, 1, \dots, n \dim X\}$ 楕円. 楕型 と書ける

$h^0(mK)$ は $g(df_1 \wedge \dots \wedge df_n)^{\otimes m}$ の極点も零点も
の個数 (1次元独立と n 次元版)

§3 $3 \rightarrow K$ ($\cong K$ Klein, 全同)

#2032

Kummer } K_3 Weil (1958) が命名
 Kähler }
 Kodaira } 最終報告書 AF18 (米空軍)

(大抵 n 次元) \rightarrow "New types of number-theoretical systems."
 (I) 代数曲線の n -次元
 (II) Kähler 多様体 \mathbb{P}^3 内の非特異 4-次元曲面と同相なもの

Pijetobutski - Shepura - Shafarevich (1971)

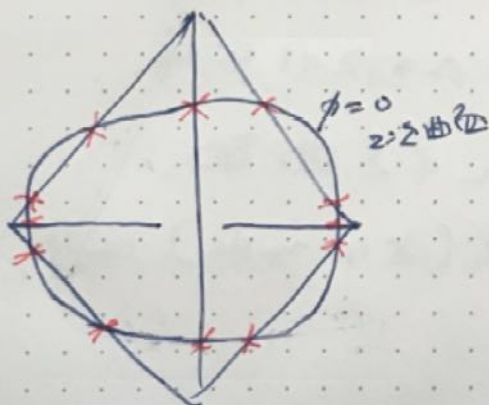
Tnelli 型定理

Kummer (1864) 「16点の特異点をもつ 4-次元曲面」

$$X: \phi(x, y, z, t)^2 + 16Kxyzt = 0 \subset \mathbb{P}^3$$

例1, $\phi = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2a(xt + yz) + 2b(yt + xz) + 2c(zt + xy)$

$K, a, b, c \in \mathbb{C}$ パラメータ



$xyzt=0$ 在る四面体 T

4次元 T の 1-skeleton $\times \phi=0$ の 12点 \rightarrow 在る。 \rightarrow 75% X の 特異点

条件
$$K = -\det \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & a \\ 6 & a & 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow \cong 4-次元の特異点 計 16点 (最大回数)

これら Kummer 4-次元曲面 と 呼ばれる。

(物理学者 Fresnel が 2次元 旋回前 \cong 同型な.)

主偏極 T-1/2 曲面 (A, \mathcal{O}) との関係

復習 E 楕円曲線 \mathbb{C}/Γ , $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ 格子.

$$E \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1 \quad z \mapsto (1: \varphi(z)) \quad \#2033$$

原点 0 と高 2 位の 2 位の極 ε の有理関数

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Gamma} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

φ は 2:1 の分岐の 4 点 $\{0, a, b, c\}$

2:1 と同じように \mathcal{O} の高 2 位の 2 位の極 (外 2 位の 2 位の)

3 有理関数 ε を与える. 4 個独立なものを与える, ε_i

を 8 次元像

$$\varphi: A \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$x \mapsto (\varepsilon_0(x) : \varepsilon_1(x) : \varepsilon_2(x) : \varepsilon_3(x))$$

2) の場合

$$(1) (A, \mathcal{O}) = (E_1, \mathcal{O}) \times (E_2, \mathcal{O}) \quad \mathcal{O} = E_1 \times \mathcal{O} + \mathcal{O} \times E_2$$

(2) 既約な場合, 4 点曲面 \sim a 2:1 字像.

(2) の場合の 4 点曲面 \rightarrow Kummer 4 点曲面.

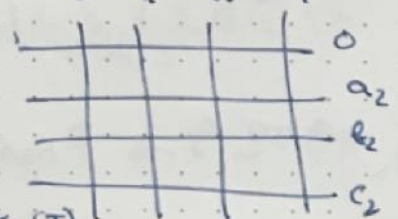
$A/(-1)_A$ と同型. 16 個の特異点 (重なる node) は

A の 2 分点の像.

(参) (1) の場合も φ は $A/(-1)_A$ を経由する分, 像は

2 点曲面. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と同型. $A/(-1)_A$ は

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重複線分の分岐の石の通)



現代用語. 2 次元複素 $T \rightarrow \mathbb{C}T$ の高 \sim $Ku(T)$.

Kähler (1906-2000) 複素多様体 X の Hermitic

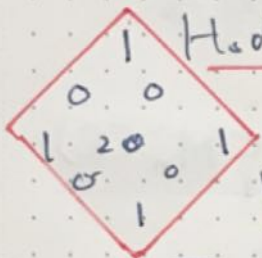
計量 $g = \sum g_{i\bar{j}} dz_i d\bar{z}_j$ ((z_1, \dots, z_n) の局所座標)

g が Kähler \iff $(1,1)$ 型定形式 $\sum g_{i\bar{j}} dz_i d\bar{z}_j$
 が closed #2034

n の階数, de Rham の定理より, この $n/2$ 階数 $h \in H^n(X, \mathbb{R})$
 が定まる. \exists $\omega \in H^{1,1}(X)$ が h を生成する. ω を Kähler 形式 とする.

調和形式の複素構造と両立する条件. $\Delta = 0$

Hodge 分解 $H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$



K3 の Hodge structure

$$H^{p,q}(X) \cong H^p(\mathcal{O}_X(p))$$

Todorov (1980) - Siu (1983) 全ての K3 曲面は Kähler (計量 ω を持つ).

Kodaira (1915 - 1997) 複素構造の変形

(非 Kähler を含む) 解析曲面の分類

K3 曲面は互いに変形で移り合う (下部構造による微分多様体は同一), 楕円曲面論 (型追加)

Shafarevich 127P 学派による代数曲面の分類

\Rightarrow ω は K3 の "Kummer" と呼ばれる

1971年 Pjateckiĭ - Shapira と Torelli 型定理を証明

Klein (1849-1925) Bonn 大学, Flächen, quadratische lineare complex

$X = \left\{ \begin{array}{l} \sum x_i^2 = 0 \\ \sum \lambda_i x_i^2 = 0 \\ \sum \lambda_i^2 x_i^2 = 0 \end{array} \right.$ in \mathbb{P}^5 Kummer 曲面の Beut Model
 1886年 Aut X を求めた.
 1998年 金剛 が解決.

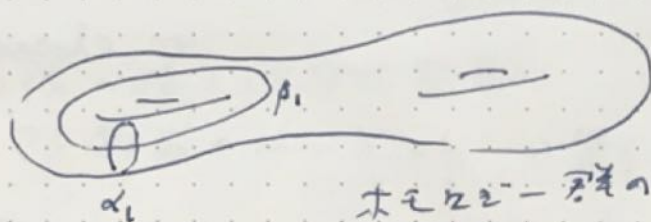
§4 周期と Torelli 型定理 (時内写(指+55, 2))

#2035

曲線の集合

$$\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \in H_1(C, \mathbb{Z})$$

$$(\alpha_i, \beta_j) = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$



本 \$\mathbb{Z}^2\$-群の symplectic 基底

周期

$$\pi = \begin{pmatrix} \int \omega_j \\ \alpha_i \\ \int \beta_i \omega_j \end{pmatrix} \in \text{Hyg} / \text{Sp}_g(\mathbb{Z})$$

\$\omega_1, \dots, \omega_g \in H^1(\Omega_C)\$
Abel 微分

Siegel 上半空間

$$\text{Hyg} = \left\{ \begin{matrix} \text{Re } Z = Z \\ \text{Im } Z > 0 \end{matrix} \right\} \subset M_n(\mathbb{C})$$

Torelli 定理

$$C \cong C' \Leftrightarrow \pi = \pi'$$

(同型写)

\$\text{Sp}_g(\mathbb{Z})\$-移り

Riemann の 双線拘束式

\$K3\$ 曲面の場合

$$H_2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$$

(話3.14 全編) の後から

$$E_8 \oplus E_8 \oplus U \oplus U \oplus U$$

\$\mathbb{Z}\$ 値内積, 偶, 符号 \$(3, 19)\$ unimodular

$$0 \neq \omega \in H^0(\Omega_X^2)$$

周期 \$\pi = \left(\int_{\alpha_1} \omega, \dots, \int_{\alpha_{22}} \omega \right) \in \mathbb{P}^{21}\$

$$(\pi, \pi) = 0, (\pi, \bar{\pi}) > 0$$

Torelli 型定理

$$X \cong X' \Leftrightarrow \pi \text{ と } \pi' \text{ が } O_{\mathbb{Z}}(2E_8 \oplus 3U) \text{ (移り) による}$$

より全 version

\$(\mathbb{Q}^2) = -2\$ の因子を全射映を用いて, 正則

同型射 \$X \to X'\$ に伴っての \$\downarrow\$ 情報 (\$X \cong X'\$ ならば自己同型)

系

$$\text{Aut } X \cong O_{\mathbb{Z}}(H^1(X, \mathbb{Z})) / W_{-2}$$

§5 モジュライ空間の小平次元 (明岡 弘毅) (野澤 隆)

M_g 種数 g の曲線のモジュライ空間 (内房 正也) (高木 正三)
 $\dim = 3g - 3$ (複素), Teichmüller空間 #2036 (宇保 龍平)

Harris-Mumford (1982), Harris, Harris-Morrison, ...
 $g > 20 \Rightarrow M_g$ は一般型, $\kappa(M_g) = 3g - 3$
 g 奇数, $g \geq 25 \Rightarrow$ 一般型

$\mathcal{F}_g = \{ (X, L) \mid \text{楕圓K3, } (L^2) = 2g - 2 \} / \text{同型}$
 $= \mathcal{D}^{19} / \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^+(L_d)$

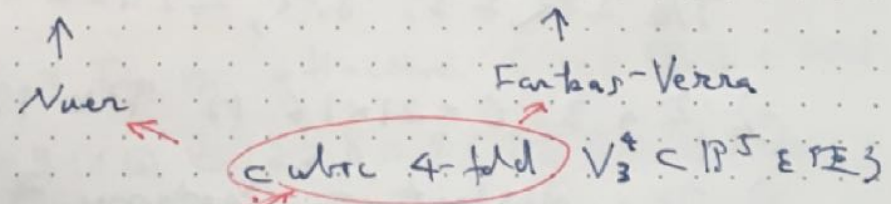
局所対称空間
 $g=2 \Leftrightarrow d=2$ 2重射影面
 $g=3 \Leftrightarrow d=4$ 4重曲面
 $L_d \simeq 2E_g + 3U + K$
 ± 4 子 / $L_d \cdot d \cdot \pm n$
 直交補格子
 $L_d \simeq 2E_g + 2U + \langle -d \rangle$
 $(d = 2g - 2 \pm 2 \pm 2)$

Gritsenko-Hulek-Sentzarski (2009)

$d > 100 \Rightarrow \mathcal{F}_g$ は一般型, $\kappa(\mathcal{F}_g) = 19$

反対方向の結果

$d/2 = 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21 \Rightarrow \kappa = -\infty$
 $(g = 13, 14, 16, 17, 18, 20, 22)$ (irrational)



K3曲面の仲間たち
 Abel曲面
 Enriques曲面
 高次元正則 symplectic 多様体
 K3 圏 (category)