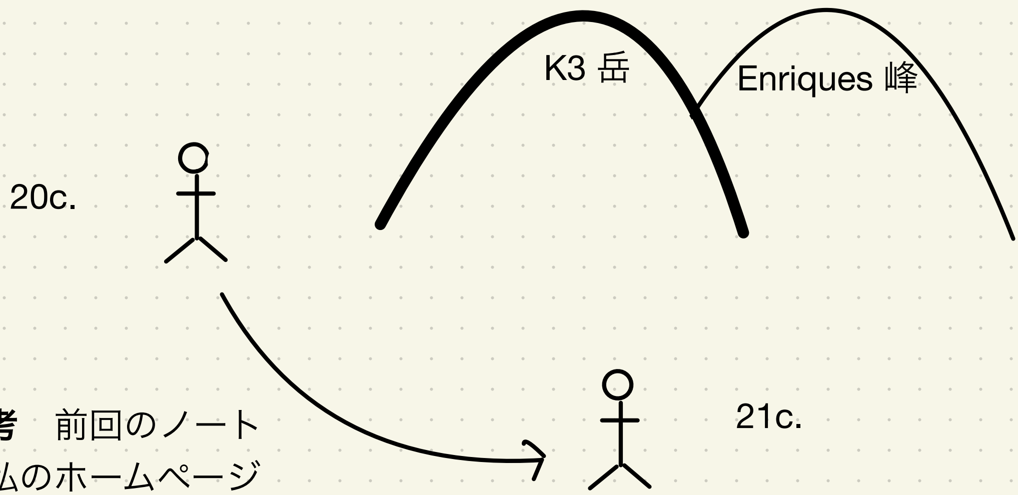
21世紀の楕円曲線、或は、K3 と Enriques曲面

　前回はミラーや猪瀬等、特別な4次曲面族とK3曲面全体との関係について説明した。今回は Enriques 曲面も含めて周期から出発する。周期に関するTorelli型定理のおかげで、これらの曲面族に完璧な番地を与えることができ、楕円曲線やアーベル曲面との関連が見えてくる。例として、超幾何の特別な場合としての完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

を多重積分化する1パラメータ族(金銅 II 型)を考察しよう（§2）。

　時間が許せば、Conway-Sloane の球面充填の本の「Leech ルートと Vinberg 群」の章(1982年の論文)を幾何化する話を、標数正で超特異なものの出現する辺りに焦点を当てて紹介したい（§4）。



参考　前回のノートは私のホームページ

https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mukai/paper/21c_elliptic.pdf
https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mukai/paper/most_algebraic.pdf

からお取り下さい。(Prerequisite ではありません。)

21世紀の楕円曲線，或は，K3とEnriques曲面

6/9/23（金）

EwM@中央大

①

§1. 2次元版

楕円曲線と第1種微分

$$\begin{cases} C: \; y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \;/\; \mathbb{P}^1 & \text{2重被覆} \\ \omega = \dfrac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} \in H^0(C, \Omega) \end{cases}$$

或は，

$$\begin{cases} C: \; f_3(x, y) = 0 \subset \mathbb{P}^2_{(x:y:1)} & \text{平面3次曲線} \\ \omega = \mathrm{Res}_C \underbrace{\dfrac{dx \wedge dy}{f_3(x, y)}}_{C\text{に沿って1位の極}} \end{cases}$$

etc.

素直な2次元版

$$\begin{cases} S: \; y^2 = f_6(x, y) \;/\; \mathbb{P}^2 & \text{K3曲面} \\ \omega = \dfrac{dx \wedge dy}{\sqrt{f_6(x, y)}} \in H^0(S, \Omega_S^2) \end{cases}$$

とnowhere vanishing 2型式．

或は

$$\begin{cases} S: \; f_4(x, y, z) = 0 \subset \mathbb{P}^3_{(x:y:z:1)} \\ \omega = \mathrm{Res}_S \underbrace{\dfrac{dx \wedge dy \wedge dz}{f_4(x, y, z)}}_{S\text{に沿って1位の極}} \end{cases}$$

記号 Ω_C, Ω_S 余接束．$\Omega_S^2 := \bigwedge^2 \Omega_S$．

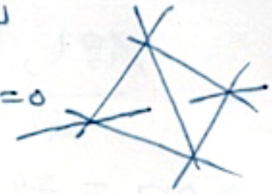
曲線 = compact Riemann 面
- $g=0$
- $g=1$ 楕円曲線
- $g\geq 2$

小平次元			実類似
(代数)曲面 — $\kappa=-\infty$			
0	2次元トーラス	自明	$S^1\times S^1$
	K3曲面	素直	S^2
	Enriques曲面	高級	$\mathbb{RP}^2$

1			
2			

F. Enriques (1896)「4面体の6辺を2重に通る6次曲面($\mathbb{P}^3$内)の正規化」*) として発見

S
$\downarrow$
$\overline{S}$

4面体を $xyzt=0$  とします.

$$\overline{S}:\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}\right)x^2y^2z^2t^2+Q(x,y,z,t)\,xyzt=0 \quad \subset \mathbb{P}^3_{(x:y:z:t)}$$

但し, Q は4変数斉次2次式.

- $H^0(S,\Omega_S^2)=0$ だが $H^0(S,(\Omega_S^2)^{\otimes 2})\neq 0$.
(よく使われる記号で書くと, $p_g=0$ だが $P_2\neq 1$)

実際 $$\Phi := xyz\left(\mathrm{Res}_{\overline{S}}\frac{dx\wedge dy\wedge dz}{f_6(x,y,z,1)}\right)^{\otimes 2}\in H^0(S,(\Omega_S^2)^{\otimes 2})$$

但し, $f_6(x,y,z,t)$ は $\overline{S}$ の定義6次式. しかも nowhere vanishing.

Remark.1 Castelnuovo 判定条件 (1895)

$$q=P_2=0 \Rightarrow \text{有理曲面}$$

において, P_2 を p_g に置き換えられないことを示している.
(小平次元の兆し.)

- Φ の定める2重被覆 $\tilde{S}\to S$ は K3曲面 $\left(\begin{matrix}K_{\tilde{S}}\sim 0\\ q=0\end{matrix}\right)$

*) Griffiths-Harris の教科書第4章§6 や M.-Ohashi (2013) の Remark 6.

より具体的には、(2,2,2)次因子であるK3曲面 ③

$$\tilde{S}: y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+1+Q(x,y,z,xyz)=0 \subset \mathbb{P}^1_x\times\mathbb{P}^1_y\times\mathbb{P}^1_z$$

と固定点のない対合 $(x_1,x_2,x_3) \overset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} (-x_1,-x_2,-x_3)$

で割って得られる商曲面 $\tilde{S}/\varepsilon$ である。*)

・(モジュライ数)=10　$Q(x,y,z,t)$ の10個の係数

但し、要注意(次節へ②で詳述).

例(金銅II型、大橋表示) $Q(x,y,z;t)$ が

特別な対角型　$x^2+y^2+z^2+(1-\lambda)t^2$ の場合. 但し、$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

はパラメータ.

$$\tilde{S}_\lambda: (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)-\lambda x^2y^2z^2=0 \subset \mathbb{P}^1_x\times\mathbb{P}^1_y\times\mathbb{P}^1_z$$

と対合 ε で割って得られるEnriques曲面の族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\neq0,1}$

は、有限自己同型 $|\mathrm{Aut}\, S|<+\infty$ となるEnriques曲面

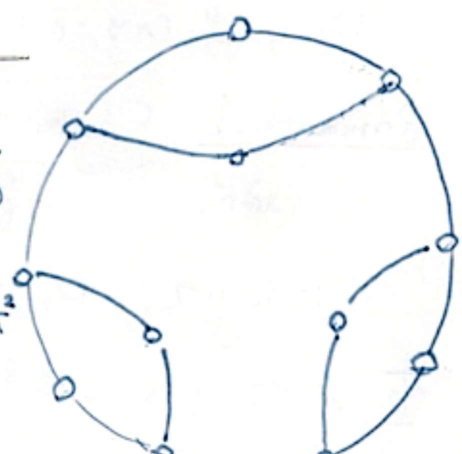
(金銅(1986)により7種に分類)の一種.**)

**) S_λ は6個のnode(通常2重点)と6本の $\mathbb{P}^1$ をもつ. 特異点解消上の $\mathbb{P}^1$ 配置は右図のとおり(これ以外にはない.)

*) 商曲面は

$(x^2+y^2+z^2+t^2)xyzt+Q(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z},\frac{1}{t})x^2y^2z^2t^2=0 \subset \mathbb{P}^3_{(x:y:z:t)}$ とも表される.

これは、もとの6次曲面のCremona像 $(x:y:z:t)\leftrightarrow(\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}:\frac{1}{t})$ である。



$\mathbb{P}^1$ 配置の双対グラフ(12本で全部.)

§2 周期（§1と§2の間の橋わたし）

④

楕円曲線 $v^2=(1-x^2)(1-k^2x^2)$ Jacobi型

$$K(k)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\frac{1}{4}\int_\alpha \omega$$

微分p型式

pサイクル

$p=1$

超幾何関数

$$F(a,b;c;z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\quad(={}_2F_1(\cdots))$$

を用いて

$$K(k)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1:k^2\right)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^2k^{2n}$$

が成立。（Fは2階微分方程式の解。）

上の例が2次元版を与える。$\tilde{S}_\lambda$上の1つの周期が

$$\int_{\alpha_\lambda}\omega_\lambda=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3\lambda^n$$

2サイクル

2型式

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\,{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,1:\lambda\right)$$

一般化された超幾何

Clausenの公式

$$=\left\{\frac{1}{2\pi}F\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4};1;\lambda\right)\right\}^2$$

パラメータλについての（一般）超幾何関数となり，（Picard-Fuchs）微分方程式（3階）をみたす。（$\lambda=0,1,\infty$で(a.28)確定特異点）

---

*) 計算法は，Peters-Stienstra (1991) による，Fermi曲面の場合と同じである。

§3 トレリ(型)定理

① 曲線 C, 種数 g　　$\omega_1, \dots, \omega_g \in H^0(C, \Omega_C)$ 基底

$\alpha_1, \dots, \alpha_g,\ \beta_1, \dots, \beta_g \in H_1(C, \mathbb{Z})$

symplectic 基底, すなわち 交叉行列 $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$

C の周期行列　$\left(\int_{\alpha_i} \omega_j \quad \int_{\beta_i} \omega_j \right)$

正規化　$\left(I_g \quad Z \right)$

Riemann の双線形関係　${}^tZ = Z$, $\operatorname{Im} Z > 0$ 正定値

よって、$Z \in \mathfrak{h}_g$ Siegel 上半空間
(III型 有界対称領域)

$\boxed{\text{Torelli の定理}}$ 曲線 C と C' は同型
Z と Z' は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の作用で移り合う

言換えると　$\mathcal{M}_g \xhookrightarrow[\text{単射}]{} \mathfrak{h}_g / Sp(2g, \mathbb{Z})$
準射影的代数多様体

但し、次元は $3g-3$ と $\frac{g(g+1)}{2}$ で $g \geq 4$ では全く違う.

方針　①　　③ ← ②

	曲線	K3	Enriques
型式	$\omega_1, \dots, \omega_g$	$\omega \in H^0(\Omega_S^2)$	$\Phi \in H^0(S, \Omega_S^2 \otimes \mathbb{Z}_S^\omega)$
サイクル	$\alpha_1, \dots, \beta_g$ symplectic 基底	$\alpha_1, \dots, \alpha_{22} \in H_2(S, \mathbb{Z})$	$\alpha_1, \dots, \alpha_{12} \in H_2(S, \mathbb{Z}^\omega)$ 直交基底

(復習) 局所系 (local system) = 局所定数層 ⑥

古典 (Euclid) 位相

これを係数とする (コ)ホモロジー群 (とその上の Hodge 構造 etc.)

局所系の例　M^n: 位相多様体　各点に相対ホモロジー $H_n(M, M-x)$, $x \in X$, を対応させる orientation sheaf.

② Enriques 曲面 S. $\Phi \in H^0(S, (\Omega_S^2)^{\otimes 2})$, あるいは, $\tilde{S} \to S$ の定める非自明な局所系 ($\mathbb{Z}$層) を $\mathbb{Z}_S^\omega$ で表わす。

通常の Betti 数 B_n は $(1, 0, 10, 0, 1)$

$\mathbb{Z}_S^\omega$ 係数では $(0, 0, 12, 0, 0)$

$H^2(S, \mathbb{Z}_S^\omega) \cong \mathbb{Z}^{12}$ 以外は消える。これの上の交叉形式は

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_{12}^2$$

と同値. ねじれ 2 サイクル $\alpha_1, \cdots, \alpha_{12} \in H_2(S, \mathbb{Z}_S^\omega)$ の直交基底, すなわち, $(\alpha_i^2) = \begin{cases} 1 & i = 1, 2 \\ -1 & i = 3, \cdots, 12 \end{cases}$ がとれる.

2重2形式 Φ は $H^0(S, \Omega_S^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_S^\omega)$ の元ともみるので,

周期 $\int_\alpha \Phi \in \mathbb{C}$, $\alpha \in H_2(S, \mathbb{Z}_S^\omega)$, が well-defined.

$$\left(\int_{\alpha_1} \Phi, \cdots, \int_{\alpha_{12}} \Phi\right) \in \mathbb{C}^{12},\quad S \text{の周期ベクトル}$$

のは Φ は定数倍を除いて一意的なので,

$$z := \left(\int_{\alpha_1} \Phi : \cdots : \int_{\alpha_{12}} \Phi\right) \in \mathbb{P}^{11},\quad S \text{の周期点}$$

が定まる。双線型関係

$$\left(\int_{\alpha_1}\Phi\right)^2+\left(\int_{\alpha_2}\Phi\right)^2-\sum_{i=3}^{12}\left(\int_{\alpha_i}\Phi\right)^2=0 \qquad (7)$$

$$\left|\int_{\alpha_1}\Phi\right|^2+\left|\int_{\alpha_2}\Phi\right|^2-\sum_{i=3}^{12}\left|\int_{\alpha_i}\Phi\right|^2>0$$

より，周期点 τ は 10次元2次超曲面 $Q^{10}\subset\mathbb{P}^{11}$ の開集合 $\mathcal{D}^{10}$ に属する。IV型有界対称領域（の2つの和）$\mathcal{D}^{10}$ には直交群 $O_{\mathbb{Z}}(2,10)$ が作用.

$\boxed{\text{Torelli 型定理}}$ Enriques 曲面 S と S' が同型

$\Longleftrightarrow$ 周期ベクトル τ と τ' は $O_{\mathbb{Z}}(2,10)$ で移り合う.

言換えると

$$\mathcal{E}nr \xhookrightarrow[\text{単射}]{} \underbrace{\mathcal{D}^{10}/O_{\mathbb{Z}}(2,10)}_{\text{10次元準射影的代数多様体}}$$

さらに，全射でない（曲線の場合だと，$g=1,2,3$ が似た状況）

$\boxed{\text{全射性定理}}$ 上の（周期）写像の像は具体的な超曲面*) の補集合.

別の言方をすると，Coble 曲面（境界付，対数的な Enriques 曲面）も許すと全射.

Remark 2. Enriques 6次曲面は 6次曲面としては同型でなくても，（抽象的）曲面としては同型になりうる。より精密に，また，標準 Cremona 変換で移り合わないも

*) Borcherds (1996) の Φ という保型形式の零点軌跡.

$$\left\{\begin{matrix}\text{§1 の Enriques} \\ 6^{22}\ \text{曲面}\end{matrix}\right\} \Big/ \mathfrak{S}_4 \times C_2 \dashrightarrow \mathcal{E}_{nr}$$

$\mathfrak{S}_4$ ↑ 座標 x, y, z, t の置換

C_2 ↖ 標準 Cremona 変換 $(x:y:z:t) \longleftrightarrow \left(\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}:\frac{1}{t}\right)$

は ~~53,96,480~~ 2,698,240 次の被覆 (Barth–Peters (1983) の計算.)

Remark 3 Betti 数より精密に Hodge 数 $h^{p,q}$ を考える。

$\left(B_n = \sum_{p+q=n} h_{p,q}\right)$ 係数を自明 $\mathbb{Z}$ より非自明 $\mathbb{Z}_S^w$ に移行することにより, Enriques 曲面の

$$\begin{array}{l} B_4 \\ B_3 \\ B_2 \\ B_1 \\ B_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 10 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 10 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Picard 数 $h^{1,1}$

モジュライ数 $h^1(T_S)$

Hodge ダイアモンドは 90 度回転. K3 の Hodge ダイアモンドは両者の重ね合せである。

③ K3 曲面の Torelli 型定理 (例えば 金銅 (2015))

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

(自己ミラー)

Enriques と同様. 係数は通常の $\mathbb{Z}$.

- (モジュライ数) = 20. Enriques 曲面の 2 倍.

 ただし, Enriques と違って, 非代数的なものが出現.

 代数的なものは, 19 次元族の可算無限和. モジュライは通常は偏極をこめて考える。

- 交点形式は diag $[\underbrace{1, 1}_{2個}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{\text{o.k. } 10個}]$ よりややこしくなる。

$$\Lambda_{K3} = U + U + U + \underbrace{E_8 + E_8}_{負定値ルート格子} \qquad 符号数\ (3, 19)$$

有界対称を定めない!

§4 Vinberg–Conway 鎖と標数正

[時間がなくて話せなかった。] ⑨

(代数的) K3 曲面の考え方、捉え方 (Torelli 型定理のおかげ)

$$\operatorname{Pic} S = \{\alpha \in H_2(S, \mathbb{Z}) \mid \int_\alpha \omega = 0\} \subset H_2(S, \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{K3}$$

↑ Lefschetz (1,1) 定理

符号数 $(1, \rho-1)$ の部分格子　　ρ : Picard 数

$T_S := (\operatorname{Pic} S)^\perp$ 直交補格子　符号数 $(2, 20-\rho)$

$$T_S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = T_S^{2,0} \oplus T_S^{1,1} \oplus T_S^{0,2} \quad \text{Hodge 分解}$$

$\omega \in T_S^{2,0}$, $\bar{\omega} \in T_S^{0,2}$

データ {
- Λ_{K3} 内、直交する $(1, \rho-1)$ と $(2, 20-\rho)$ 部分格子
- 両部分格子の貼合せ
- T_S 部分の Hodge 分解

で K3 曲面が決まる。

例として、Vinberg–Conway 鎖を考えよう。

$$D_{1,n-1} \subset I_{1,n-1} = (\mathbb{Z}^n, x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)$$

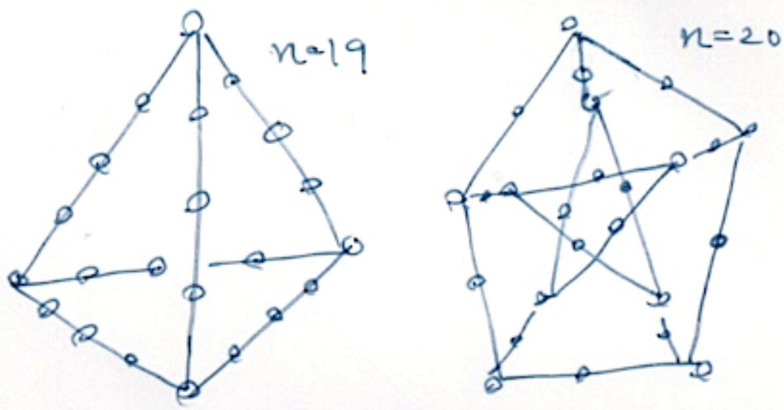
奇 unimodular 格子

$\sum(\text{係数}) \equiv 0 \pmod 2$ で定義される指数 2 の部分格子

$n \leq 20$ のとき、$D_{1,n-1}$ は K3 曲面の Picard 格子として実現される。この K3 曲面族 $\cup C_n$ は帰納的な構造をもつ (Conway–Sloane (1982))。Vinberg–Conway 鎖と呼ぶ。

$n=\rho$	1	2	≤ 17	18	19	20
Pic S etc.	$\langle 4\rangle$ (一般の) 4次曲面	$\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}$ $S\to\mathbb{P}^2$ 分岐は 1-nodal 6次曲線	---	Barth-Peters('83)型のEnriques曲面のK3被覆	ミラー4次曲面 *)	Vinberg曲面 disc=4
					前回に登場(2019年12月)	
T_S部分	$U+U+D_{18-n}$			$U+U(2)$	$U+\langle 4\rangle$ *)	$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

Vinberg や Vinberg-Kaplinskaja の結果を用いて自己同型群を決定できる。



以上は複素数体 $\mathbb{C}$ 上の話であるが、標数正の体上では $n=21, 22$ も実現される。格子としては $n=21, \text{—}, 25$ が Borcherds(1987)によって調べられた。

$n=22$ $K3^{\Delta\Delta 1}$ $(p=2)$, すなわち, 標数2の超特異, Artin不変量1のK3曲面. 具体的には

$$S : \sum_1^3 x_i^2 y_i = \sum_1^3 x_i y_i^2 = 0 \subset \mathbb{P}^2_{(x)} \times \mathbb{P}^2_{(y)}$$

Dolgachev-Kondo(2003)によって研究された。

$n=21$ Reid 6次曲面 $\sum_1^6 x_i = \sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = 0$

$\subset \mathbb{P}^5_{(x)}$ を2元体 $\mathbb{F}_2$ 上で考えたもの. $\mathbb{F}_4$ 上では上の $n=22$ のK3曲面になるが, $\mathbb{F}_2$ 上のPicard数は21であることに注意。

さらに, 高次元 symplectic を考えると $n=23$, 予想的には $n=24$ も実現される(と思われる)。

*) 全銅I型 Enriques曲面のK3として. II型(§1)に対しては $U+\langle 8\rangle$.

参考文献

§1 2次元版

Griffiths, P. and Harris, J.: *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, 1978.

Mukai, S. and Ohashi, H.: Enriques surfaces of Hutchinson-Gopel type and Mathieu automorphisms, in "Arithmeric and geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds", pp. 429-454, Springer. 2013.

Kondo, S.: Enriques surfaces with finite automorphism group, Jap. J. Math. **12**(1986), 191-282.

§2 周期

Peters, C. and Stienstra, J.: A pencil of K3-surfacces related to Apery's recurrence for ζ(3) and Fermi surfaces for potencial zero,Lect. Notes in Math. **1399**(1991), 110-127.

§3 トレリ（型）定理

Horikawa, E.: On the periods of Enriques surfaces, I, II, Math. Ann. **234**(1978), 73-88; ibid **235**(1978), 217-246.

Borcherds, R.: The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebras, Topology, **35**(1996), 699-710.

Mukai, S.: Lecture notes on K3 and Enriques surfaces, in "Contribution to algebraic geometry", pp. 389-405, Eur. Math. Soc., Zurich, 2012.

Allcock, D.: The period lattice for Enriques surfaces, Math. Ann. **317**(2000), 483-488.

Barth, W. and Peters, C.: Automorphisms of Enriques surfaces, Inv. Math. 73(1983), 383-411.

金銅誠之、K3曲面、共立出版、東京、2015.

§4 Vinberg-Conway鎖と標数正

Vinberg, E.B.: Some arithmetic discrete groups in Lobachevskii spaces, in "Discrete subgroups in Lie groups", Oxford Univ. Press, 1975, pp. 323-348.

Vinberg, E.B. and Kaplinskaja, I.M.: On the group $O_{18,1}(\mathbf{Z})$ and $O_{19,1}(\mathbf{Z})$, English translation, Soviet Math. Dokl. **19**(1978), 194-197.

Vinberg, E.B.: The two most algebraic K3 surfaces, Math. Ann. **265**(1983), 1-27.

Conway, J. and Sloane: Leech roots and Vinberg groups, Proc. R. Soc. London, **384**(1982), 233-258.

Borchers, R.: Automorphism groups of Lorentzian lattices, J. Algebra, **111**(1987), 133-153.

Dolgachev, I. and Kondo, S.: A supersingular K3 surface in characteristic 2 and the Leech lattice, IMRN, **2003**(2003), 1-23.

2023年6月
向井 茂