

等質空間の射影幾何

名古屋大学理学部 向井 茂

射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対しては

(1) 定義方程式系や斉次座標環を記述する,

また、付随して得られる多様体, 例えば,

(2) secant 多様体 $\text{Sec } X \subset \mathbb{P}^N$, tangent scroll

$\text{Tan } X \subset \mathbb{P}^N$ や射影的反対 $\check{X} \subset \check{\mathbb{P}}^N$ を調べる

等の問題が考えられるが、これは $X \subset \mathbb{P}^N$ を等質的としても決して易しくない。ここでは後者の (2) が例とよくわかる等質射影多様体の類を 2, 3 定義し、これらが等質射影多様体全体の中でどのような位置にあるかを明らかにする。

一つの類は Severi 多様体と呼ばれ、Zak の重要な仕事 [Z] に現れるもので、もう一つは Jordan 代数上の 3 次 Veronese 多様体である。

(([M2]))

これを考へるに、かりは、3次元 Fano 多様体の研究から派生した線型切断定理, 例えば種数 8 の 5 の次の事実の証

明である。

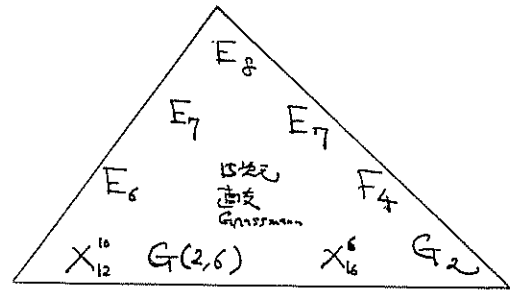
([MT])

定理

種数 8 の定端代数曲線は、線型系 g_7^2 をもたなければ、8次元 Gressmann 多様体 $G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$ の線型切断 $G(2,6)$ の \mathbb{P}^7 と同型である。

証明の一つの柱は、与えられた曲線上で出来るだけ沢山の大域切断をもつ安定ベクトル束を探し出すことで、ここでは述べるが、Brill-Noether 理論の非アベル化と云えるものである。そして、もう一つが等質空間の射影及び対応である。関係する4つの等質空間 $X \subset \mathbb{P}^N$ の特異超平面切断の分類が証明に必要なことであるが、それを考えるのに次のピラミッドが非常に有用である。

標準曲線切断をもつ4つの等質射影多様体を底辺とするこの図は



① 4つの等質射影多様体が孤立して存在するのではなく、1つ上にある3つの等質空間を介して関係し合っていることと

② 4つの各々は共通の性質をもつ等質空間の類の代表であること

を教えてくれる。①については述べないが、②にてくる類とみなから本文で説明しておく。普通の性質は $\text{Sec } X$, $\text{Tan } X$ に関するもの、Legendre 部分多様体、接触構造等である。講演では省略したが、^(の関係の話も §7 に書き加えた。) 2重射影や del Pezzo 多様体と題名からすると、Schubert 部分多様体やそれらの有次元標環等の一般論に言及すべきだ。たかもしるいが、筆者自身の深く係、た等質多様体^(と及有理幾何)に話を限った。等質多様体に少しでも興味を増していただければ幸いであるが、それらの一般論については読者自身でしかるべき著作を読みたい。

なお、文献を明示しなかつた箇所もあるが、§4 と付録の少しの部分、それに §5, 7 を除けば、凡そ知られたことの解説であることも断っておく。代数多様体は ① 上で考へる。

目次

	頁
§ 1 等質射影多様体	4
§ 2 標準曲線切断をもつ基本等質射影多様体	10
§ 3 Jordan 代数	14
§ 4 Severi 多様体	17
§ 5 Jordan 代数上の 3 次 Veronese 多様体	24
§ 6 随伴多様体と接触構造	35
§ 7 等質射影多様体のピラミッド	39
付録 Hopf 零多様体	48

§1 等質射影多様体

G は \mathbb{C} 上の半単純連結代数群, B はその Borel 部分群, 即ち, 極大可解連結部分代数群とする。 B は共役を除いて一意に定まり, 任意の部分代数群 $H \subset G$ に対して

(1.1) 商空間 G/H がコンパクト

$\Leftrightarrow H$ は B (の共役) を含む

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} H$ は parabolic

が成立する。 "最大の" コンパクト等質空間 G/B は (一般完全) 旗多様体 (flag variety) と呼ばれる。

例 (1.2) G が特殊線型群 $SL(n)$ のとき, 上半三角行列

$$\begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \\ 0 & & & & * \end{pmatrix}$$

で行列式 1 のもの全体 B が Borel 部分群である。 旗多様体 G/B は \mathbb{C}^n の部分空間列

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m \subset \mathbb{C}^n, \dim V_i = i$$

の全体をパラメトライズする。

$n=2$ のとき $G/B \cong \mathbb{P}^1$. $n=3$ のとき G/B は Segre 多様体 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ の超平面切断で, \mathbb{P}^2 上の \mathbb{P}^1 -束 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ と同型である。

例 (1.3) 直積 $G = G_1 \times G_2$ の Borel 部分群は各々の Borel 部分群の直積。 よって, $G/B = (G_1/B_1) \times (G_2/B_2)$ 。 例として $SL(2) \times SL(2)$ の旗多様体は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ である。

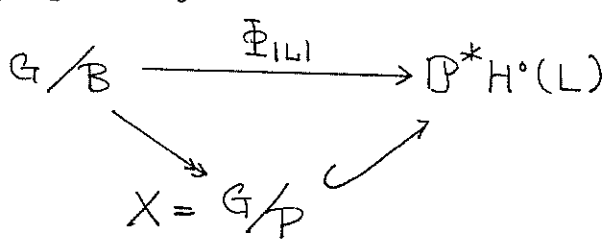
以後コンパクト等質多様体 G/P を G/B の上の完備線型系で
 も、射影空間に埋込んたもの (以下、等質射影多様体と呼ぶ)
 を考察する。これは (1.1) より G/B の像であり、次
 より G の既約表現と 1対1 に対応する。 旗多様体

定理 (Borel-Weil) 群 G は単連結とする (あるいは、
 Lie環 \mathfrak{g} で考える)。旗多様体 G/B 上の nef ^(の同型類) 直線束 L
 を動かしたとき、 $H^0(G/B, L)$ は G の (有限次元)
 既約表現の完全代表系を与える。

注 (1.4) $SL(n, \mathbb{C})$ や symplectic 群 $Sp(2n, \mathbb{C})$ は単
 連結であるが、特殊直交群 $SO(n, \mathbb{C})$ はそうではない。基
 本群は $\mathbb{Z}/2$ で普遍被覆 $Spin(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{2:1} SO(n, \mathbb{C})$ は
 Clifford 代数を用いて構成される。

定理より、等質射影多様体は G (又は \mathfrak{g}) の既約表現
 $H^0(L)^\vee$ の射影化の中に入る。

逆に、勝手な既約表現 V にとり、最
 高次 weight をとる $v \in V$ の軌道を射影



化の中で考える, 即ち, $X = G \cdot [v] \subset \mathbb{P}_* V$ とするこ
とにより, 全ての G の等質射影多様体が得られる。

例 (1.5) $G = SL(2)$ の場合を考えよう。複素多様体
 $G/B = \mathbb{P}^1$ 上の nef 直線束は $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, $n \geq 0$, で,
 $\Phi_{|L|}$ は n 次 Veronese 射 $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$, 像は正規有理 n 次曲
線である。表現の方向を見ると, ベクトル表現 \mathbb{C}^2 の n 次
対称 tensor の全体 $V_n = S^n \mathbb{C}^2$ でも, \mathbb{C} , 既約表現が成り
立つ。 V_n の weight 分解は $\bigoplus_{i=0}^n \mathbb{C} x^{n-i} y^i$ で, 最高次 weight
をもつのは x^n 。 x の $SL(2)$ 軌道は $(ax+by)^n$ $a, b \in \mathbb{C}$
の全体よりなる。 よって, n 次 Veronese 射の像である。

例 (1.6) $G = SL(m+1) \times SL(n+1)$ としよう。
 $SL(m+1)$ の vector 表現 \mathbb{C}^{m+1} と $SL(n+1)$ の \mathbb{C}^{n+1} の
tensor 積 $V = \mathbb{C}^{m+1} \otimes \mathbb{C}^{n+1}$ は G の既約表現。 x の (最高
次) weight vector は $a \otimes b$ の形をしている。 よって, G
軌道を $\mathbb{P}_* V$ の中で考えたものは Segre 多様体 $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$
 $\subset \mathbb{P}^{m+n+1}$ である。

G の 2 つの既約表現は x の 最高次 weight が同じで
同型である。 また, weight w で dominant なるもの, 即ち,
全ての正ルート α に対して $(w, \alpha) \geq 0$ なるものに対して,
 x も最高次 weight とする既約表現が存在する。 単純ル-

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ の反対基を $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l\}$ とすると
 ±, 最高次 weight は \mathfrak{g} の 非負整数線型結合 $\sum_{i=1}^l n_i \omega_i$,
 $n_i \geq 0$, で与えられる。特に, ω_i 自身を最高次 weight とし
 てその既約表現を G の (長番目の) 基本表現と言う。ま
 た, \mathfrak{g} から得られる等質射影多様体を G の基本等質射影多様体
 と言う。

例 (1.7) $G = SL(n)$ の \mathfrak{g} の基本等質射影多様体は
 Plücker 座標で埋込まれた Grassmann 多様体である。実際、
 \mathbb{C}^n と \mathfrak{g} のベクトル表現としたとき、長番目の基本表現は必
 ず外積 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ である。普通の基底 $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}$,
 $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, が \mathfrak{g} の weight 分解と手に入るから、(最高
 次) weight ベクトルの軌道として Grassmann 多様体 $G(k, n)$
 $\subset \mathbb{P}_k \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ が得られる。(例 (1.5) でもこのようである。
 だが、この表現では weight が互いに Weyl 群で移り合うと
 いう特別な性質 (minuscule) を満たしていることに注意。)

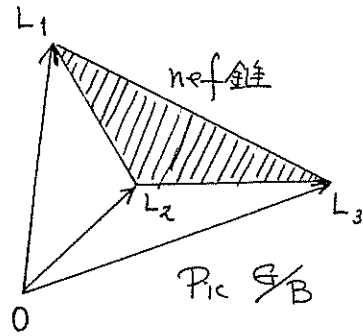
単純ルートの全体を頂点として \mathfrak{g} の (ルート格子内での
 位置) 関係を図示したものが Dynkin 図形なので、基本射
 影多様体は Dynkin 図形とその頂点に対して 1 つずつ定まる。
 自然な同型 $\mathbb{P}_1 G/B \cong \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{Z} \omega_i$ と Borel-Weil 定理を使
 って言換ると、nef 直線束全体のなす半群は、 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l\}$

に対応する直線束 $\{L_1, L_2, \dots, L_l\}$ で生成され、完備線型系 $|L_k|$ による射の像として基本等質射影多様体 $X_k \subset \mathbb{P}^n$ が得られる。

$$G/B \xrightarrow{\Phi_{|L_k|}} \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^n$$

$$\searrow \downarrow \nearrow$$

$$X_k = G/P_k$$



P_k は (k番目の) 極大 parabolic 部分群で、 $\text{Pic } X_k \cong \mathbb{Z}$ は tautological 直線束の制限で生成される。

表 (1.8) 基本等質射影多様体

	Dynkin 図形	G	$X_k \subset \mathbb{P}^n$
A_l	$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{l-1} \quad \alpha_l$ ○—○—...—○—○	$SL(l+1)$	$G(k, l+1) \subset \mathbb{P}^{\binom{l+1}{k}-1}$
B_l	○—○—...—○—○ \Rightarrow ○	$SO(2l+1)$	Grassmannian of totally isotropic subspaces projective embedding $\left\{ \begin{array}{l} \text{spin } SO \text{ の右端} \\ \text{Plücker 行列以外 (制限)} \end{array} \right.$
C_l	○—○—...—○ \Leftarrow ○	$Sp(2l)$	
D_l	○—○—...—○ / \	$SO(2l)$	
$E_{6,7,8}, F_4, G_2$		例外型	

内積や (直交群 SO の場合)、歪内積 (Sp の場合) の付いたバネトル空間の部分空間は、これらの制限が恒等的に零でないとき、totally isotropic であるという。B, D 型の右端ル

ートに対応する等質空間 X_k は n 次元内積空間内の $\left[\frac{n}{2}\right]$ 次元 totally isotropic 部分空間全体をパラメータとする。

($n=2l$ の場合は連結成分が2つあるが、 D_l の右端ルートも丁度2個ある、上からいっている。) この場合には、

Plicker 座標 (の制限) は weight $2\omega_k$ に対応し、基本 weight ω_k 自身に対応する埋込 $X_k \subset \mathbb{P}$ は (半)スピンと呼ばれるもので与えられる。 k 以外の B, C, D 型の基本等質空間は Plicker 座標である。

§2 標準曲線切断をもつ基本等質射影多様体

種数 $g \geq 2$ の non-hyperelliptic 有曲線の射 \mathbb{P}^2_K による像として得られる射影曲線 $C_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ を標準曲線と言う。
 また、 n 次元射影多様体 $X^n \subset \mathbb{P}^N$ は $(n-1)$ 個の超平面 H_1, H_2, \dots, H_{n-1} で切断して標準曲線が得られる、
 即ち、

$$[X^n \subset \mathbb{P}^N] \cap H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_{n-1} = [C_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g-1}]$$

と存在し、(種数 g の) 標準曲線切断をもつと言う。

前節で考えた基本等質射影多様体の中でこの様なものか丁度4個見つかる。

(2.1) 10次元直交 Grassmann 多様体 $X_{12}^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$ は種数7の標準曲線切断をもつ。
∴ X_{12}^{10} は8次元 quadric

$Q^8 \subset \mathbb{P}^9$ 内の4次元部分空間全体のなす $G(5, 10)$ の部分対称の1つの連結成分で、 \mathbb{P}^{15} への埋込はスピノ座標による。
∴これは 直交群 $SO(10)$ の等質空間。

(2.2) 8次元 Grassmann 多様体 $G(2, 6) \subset \mathbb{P}^{14}$ (埋込は Plücker 座標) は種数8の標準曲線切断をもつ。

(2.3) 6次元 symplectic Grassmann 多様体 $X_{16}^6 \subset \mathbb{P}^{13}$ は種数9の標準曲線切断をもつ。
∴ X_{16}^6 は6次元 symplectic ベクトル空間内の3次元 totally isotropic 部分空間全体のなす $G(3, 6)$ の部分多様体で、 \mathbb{P}^{13} への埋込は Plücker 座標

による。

(2.4) G_2 -多様体 $X_{10}^5 \subset \mathbb{P}^{13}$ は種数 10 の標準曲線切断をもつ。但し、 X_{10}^5 は G_2 型例外代数群 G の Lie 環の最高次 weight vector の軌道を射影空間 \mathbb{P}^n の中で与えたもの。(Cayley 代数や trivector から構成される。)

(いづれの場合も $(n-3)$ 回超平面切断すると 3 次元 Fano 多様体で $\text{Pic} = \mathbb{Z}(-K)$ なるものが得られる。)

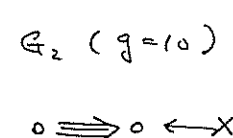
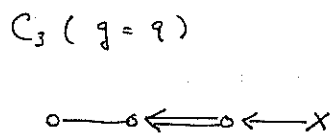
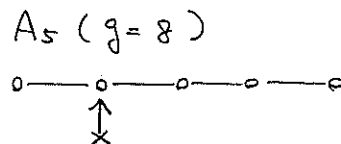
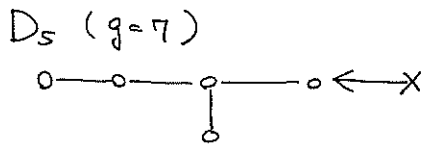
これは、3 次元 Fano 多様体のベテトル束による分類に使われるが、射影幾何的にもそれだけ面白い性質をもっている。先づ、(2.1) の 10 次元直交 Grassmann 多様体 $X_{10}^5 \subset \mathbb{P}^{13}$ は $\dim X = 2 \cdot \text{codim } X$ を満たし、次の予想との関係で興味深い。

予想 (Hartshorne) $\dim X > 2 \cdot \text{codim } X$ なる射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ は常に (超曲面の) 完全交叉である。

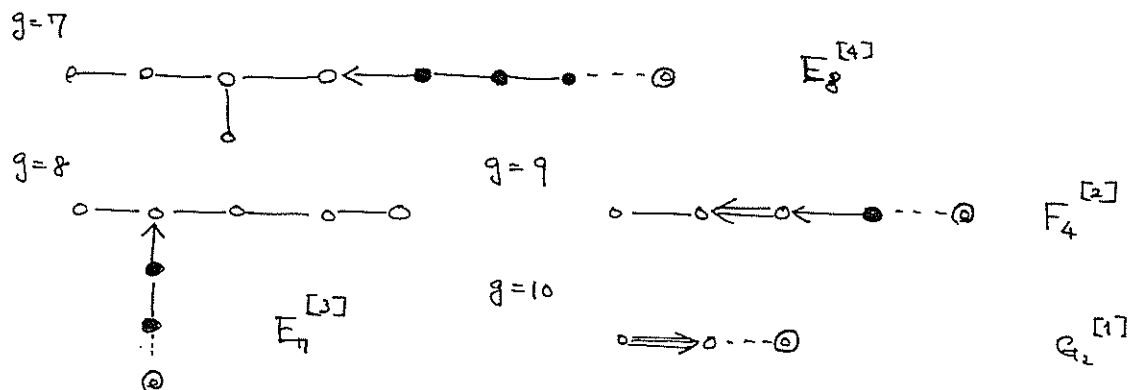
$\dim X = 2 \cdot \text{codim } X$ で完全交叉でない射影多様体で知られているのは n 直交 Grassmannian と 6 次元 Grassmann 多様体 $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ だけである。また、両者とも射影多様体は射影変換が自分自身と同型 $[\check{X} \subset \check{\mathbb{P}}] \cong [X \subset \mathbb{P}]$ というめづらしい性質も共有している。

8 次元 Grassmann 多様体は Severi 多様体の 1 つで、6 次元

symplectic Grassmann 多様体は 3 次有理曲線によく似た性質をもつ。これをさすには、先節で Jordan 代数を復習した後で、§§ 4, 5 で説明しよう。ここでは上の 4 つの等質空間に対応する Dynkin 図形と weight の対についての 1 つの観察を述べておく。作用する代数群は常に $SO(10)$, $PGL(6)$, $Sp(6)$, E_2 型で、Dynkin 図形は



である。但し、新しい頂点 x を 1 つ用意して等質空間に対応する頂点にそこから矢印を書いた。このままではわかりずが、上の図形を矢印と反対側に伸ばせるだけ伸ばしていくと (黒丸 \bullet で黒く) 拡大 Dynkin 図形になる。で、それ以上伸ばすと Euclid でも affine でもないところになる。



ここで、黒丸と二重丸は新たに加わ、右頂点で、Dynkin
 図形 Γ に対して $\Gamma^{[i]}$ は Γ の拡大 Dynkin 図形 $\tilde{\Gamma}$ から
 ① から順に i 個を取り除いた Dynkin 図形 $\tilde{\Gamma}^{(i)}$ と $\tilde{\Gamma}$ の
 $(i+1)$ 個目の頂点 v の対 $(\frac{v}{2}, 0)$ を表す。この様に標準曲線切断をも
 つ 4 個の等質射影多様体は E_6 を除く例外型 Dynkin 図形
 と対応して $i=0$ から $i=3$ まである。これは等質空間の "ピ
 ラミッド" の底辺部と茶して $i=0$ であることを容易に見るだろう。

§ 3 Jordan 代数

複素数体上の中心の単純 Jordan 代数について必要系ことを復習しよう。入門書としては [S1] の付録をすすめる。

定義 (3.1) 演算 $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ $\varepsilon \in \mathbb{C}$ (有限次元) ベクトル空間 \mathcal{U} は 1) $ab = ba$ と 2) $(a^2 b) a = a^2 (b a)$ が全ての $a, b \in \mathcal{U}$ に対して成立するとき, Jordan 代数であると言う。

例 (3.2) (結合的) 可環 \mathcal{R} に対して新演算を $a \circ b = (ab + ba) / 2$ で入れたものは Jordan 代数である。

\mathbb{C} 上の Jordan 代数に対して, 単純, 半単純, 中心的概念が, 普通の (結合的 Artin) 代数と同様に定義される。以下, 中心的で単純なものを考える。

Jordan 代数 \mathcal{U} の元 x に対して, それによる掛算写像の行列式を考える。即ち,

$$N_m(x) := \det \left[\mathcal{U} \xrightarrow{x \text{ 倍}} \mathcal{U} \right] \in \mathbb{C}.$$

これは \mathcal{U} 上の有次多項式 (関数) である。そして, 既約多項式の中 $F(x)^2$ と表すことができる。このとき, $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$

\mathcal{A} の reduced norm とし、 $\deg F(x) \in \mathcal{A}$ の次数と
言う。

分類 \mathcal{A} は次数 d の中心型単純 Jordan 代数とす。
 $d \geq 2$ ならば、 \mathcal{A} は交代する。

(3.3) $d = 1$ ならば $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ 。

(3.4) $d = 2$ ならば \mathcal{A} は 2 次代数。即ち、 \mathcal{A} 上の内
積 $(,)$ と単位元 $e_0 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ 規則

$$x^2 - 2(e_0, x)x + (x, x)e_0 = 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

で \mathcal{A} は Jordan 代数。

(3.5) $d \geq 3$ ならば、 \mathcal{A} は次の 4 種のうちのどれかと同型
である。

記号	Jordan 代数	reduced norm	交代代数
$\text{Sym}_d(\mathbb{C})$	d 次対称行列の全体	行列式	\mathbb{R}
$M_d(\mathbb{C})$	d 次正方行列の全体	行列式	\mathbb{C}
$\text{Alt}_{2d}(\mathbb{C})$	$2d$ 次歪対称行列の全体	Pfaffian	\mathbb{Q}
$\mathcal{H}_3(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})$	(標準) 3 元数代数上の 3 次 Hermitian 行列の全体		\mathbb{O}

$M_d(\mathbb{C})$ の Jordan 代数構造は例 (3.2) からくるもので、
 $\text{Sym}_d(\mathbb{C})$ はその部分 Jordan 代数になる。

よって 4 種は実数体上の 4 つの交代代数 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{O}$ である。

8元数代数と対応している。最後 $a + a$ は例外型 (27次元) で、 $d=3$ のみしか存在しないことに注意。

Jordan 代数, $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}$, \mathfrak{k} の一般化である Jordan 3重系は対称空間の組織所を記述, 研究に使用 (参. [S2])。

§4 Severi 多様体

\mathcal{U} は 3 次 の 中心 的 単純 Jordan 代 数 , $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathcal{U} の reduced norm と する . また , $\mathcal{U} \ni x \mapsto x' \in \mathcal{U}$ は 2 次 写 像 で $xx' = x'x = F(x) \cdot 1$ を みた す も の と する .

例 \mathcal{U} が 3 次 正 方 行 列 の 全 体 $M_3(\mathbb{C})$ の とき , F は 行 列 式 . 行 列 x に 対 し て x' は x の 余 因 子 行 列 で あ る .

\mathcal{U} を 射 影 化 し た 空 間 $\mathbb{P}_* \mathcal{U}$ の 中 で , $x' = 0$ を 子 元 x の 全 体 X を 考 え よ う .

$$X = \{ [x] \mid x' = 0 \} \subset S_3 = \{ [x] \mid F(x) = 0 \} \subset \mathbb{P}_* \mathcal{U}$$

X は 2 次 式 で 定 義 し ら れ , 3 次 超 曲 面 S_3 の 特 異 点 集 合 と 一 致 す る .

例 $\mathcal{U} = M_3(\mathbb{C})$ の とき , $x' = 0$ は $\sum_{k=1}^3 x_k \leq 1$ と 同 値 で あ る . こ の 様 な 行 列 $x \neq 0$ は 列 ベクトル と 行 ベクトル の 積 に (本 質 的 に) 一 意 的 に 表 示 さ れ る .

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3)$$

よ っ て , X は Segre 多 様 体 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$ と 同 型 で あ る .

$X \subset \mathbb{P}_* \mathcal{U}$ の 性 質 を 列 挙 し よ う .

(4.1) X の secant 多 様 体 $\text{Sec } X$, 即 ち , secant 直 線

$\overline{P_f}, p \neq f \in X$, の和集合の閉包, は上の3次超曲面 S_3 である。直前の例で説明すると, 階数1の行列2個の和は高々階数2で, 逆に階数2の行列は常に2つ表されることがある。他の場合も同様。

(4.2) $\dim \mathcal{U} = \frac{3}{2} \dim X + 3$ 。 (\mathcal{U} が交代代数上の3次 "Hermitian" 行列の全体であるから。)

(4.3) 射影多様体 X (特異超平面切断の全体) は3次超曲面 $Sec X$ と一致する。但し, $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^\vee$ は内積 $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}, (a, b) \longmapsto \text{tr}(ab)$ によって同一視される。

(4.4) $X \subset \mathbb{P}_x \mathcal{U}$ は等質射影多様体である。作用する(代数群の) Lie 環 \mathfrak{g} は Jordan 代数 \mathcal{U} の構造 Lie 代数と呼ばれるもの。それはベクトル空間 $Der \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ に

$$[(D_1, a_1), (D_2, a_2)] = ([D_1, D_2] + D_{a_1, a_2}, -D_1(a_2) + D_2(a_1))$$

によって Lie 環構造を入れたもの。但し, $Der \mathcal{U}$ は \mathcal{U} の微分全体のなす Lie 環で, D_{a_1, a_2} は \mathcal{U} の2元に対して

$$D_{a_1, a_2}(b) = (a_1 b) a_2 - a_1 (b a_2)$$

で定義される内部微分。

前節 (3.5) の 4 つの 3 次 Jordan 代数に付して X と \mathcal{O} は次の様に存る。

(4.5)

\mathcal{O}	$X \subset \mathbb{P}^* \mathcal{O}$	\mathcal{O} の Dynkin 図形
$\text{Sym}_3(\mathbb{C})$	$\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$ Veronese	A_2
$M_3(\mathbb{C})$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$ Segre	$A_2 \perp A_2$
$\text{Alt}_6(\mathbb{C})$	$G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$ Grassmann	A_5
$\mathcal{H}_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$	$X^{16} \subset \mathbb{P}^{26}$	E_6

この 4 つの等質射影多様体は次の Zak の ⁽²⁾ 定理との関係で有名である ([LV], [Z])。

定理 (Linear normality) $X^n \subset \mathbb{P}^N$ は非特異かつ非退化な n 次元射影多様体とする。もし $N < \frac{3}{2}n + 2$ ならば X の secant 多様体 $\text{Sec } X$ は \mathbb{P}^N と一致する。
 (すなわち、どの点 $x \in X$ からの射影 $X \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ も理込に存する。))

不等号を等号にした $N = \frac{3}{2}n + 2$ の場合で、 $\text{Sec } X \neq \mathbb{P}^N$ なるものを Severi 多様体と言う。

定理 (Classification) Severi 多様体は上表(4.5)の4つのものが射影同値である。

Severi 多様体の Dynkin 図形を図示しよう。(Veronese 曲 ^{矢つ}面は $SL(3)$ の (ハックトル表現の) 2次対称表現 $S^2\mathbb{C}^3$ と対応しているため、weight は基本 weight ω_1 の2倍である。よって、新しい頂点 x から矢印を2重に書く。

$$\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5 \quad \circ \longrightarrow \circ \longleftarrow x$$

次に $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ は $SL(2) \times SL(2)$ の等値空間で、対応する weight は各 factor の $SL(2)$ の基本 weight の和 (表現としては tensor 積) である。よって、新頂点 x から2つの A_2 に矢印を書く。

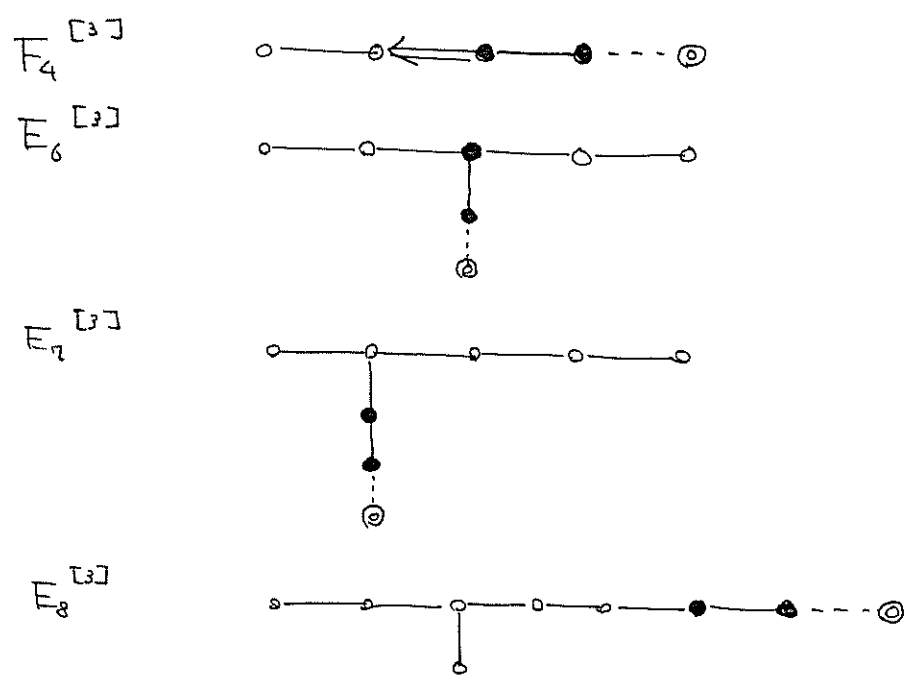
$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8 \quad \circ \longrightarrow \circ \longleftarrow x \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ$$

残り2つは基本 weight と対応している。

$$\begin{aligned} G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14} & \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \\ & \quad \uparrow \\ & \quad x \\ X^{16} \subset \mathbb{P}^{27} & \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \longleftarrow x \\ & \quad \downarrow \\ & \quad \circ \end{aligned}$$

これら4つの Dynkin 図形を §2 の様に付け替えていく。

f) \mathbb{C}^3 は



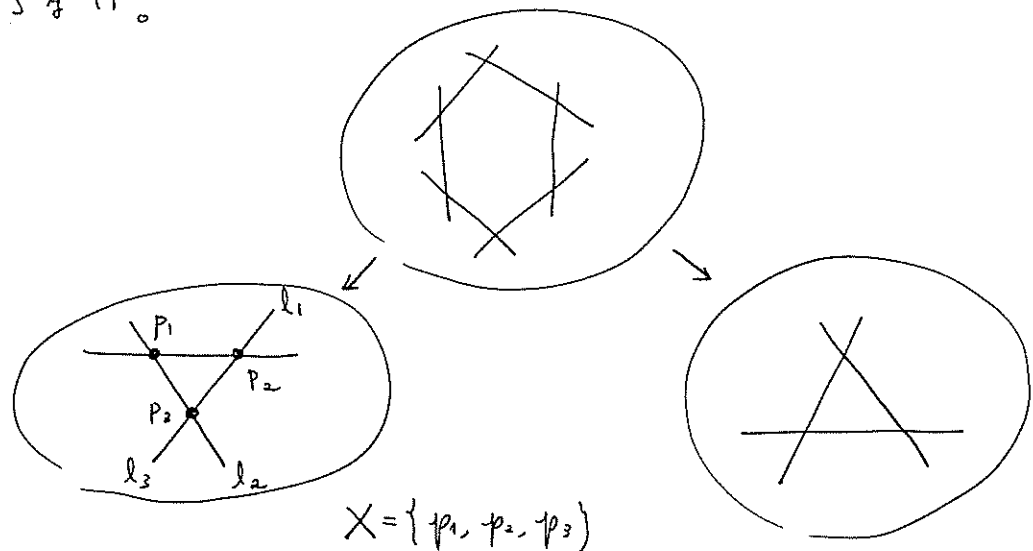
であることがわかる。この本も Dynkin 図形 Γ に対する $\Gamma^{[3]}$ という形をしていることに注意しよう。

Severi 多様体は簡単に興味深い Cremona 変換の例も手をつけてくれる。それは 2 次写像 $x \mapsto x'$ の射影化

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_* \mathcal{U} & \dashrightarrow & \mathbb{P}_* \mathcal{U} \\ \psi & & \psi \\ [x] & \mapsto & [x'] \end{array}$$

である。 $F(x) \neq 0$ のとき $[x'] = [x^{-1}]$ であるから、
 これは双有理 involution である。そして、 X を中心とする
 blow-up と 3 次超曲面の strict transform の $(X \wedge)$ blow-
 down の合成という簡明な構造をしている。この状況は、
 \mathcal{U} が 3 次单纯体でなくても 3 つの 1 次の直和や 2 次代数と 1
 次の直和の場合でも同じである。前者、即ち、 $\mathcal{U} =$

$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ の場合、元 $a = (x, y, z) \in \mathcal{U}$ のノルムは xyz で adjoint a' は (yz, zx, xy) だから、上の $\mathbb{P}_* \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{P}_* \mathcal{U}$ はよく知られた \mathbb{P}^2 の二次変換に外ならない。



$$X = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$S_3 = \text{Sec } X = l_1 \cup l_2 \cup l_3$$

これは Dynkin 図形 (と weight α 対) $D_4^{[3]}$ に対応している。後者、即ち、 $\mathcal{U} = (\text{二次代数}) \oplus \mathbb{C}$ は Dynkin 図形 $B_\ell^{[3]}, D_\ell^{[3]}$ ($\ell \geq 4$) に対応し、孤立した点と $(n-2)$ 次元 quadric Q^{n-2} に不確定点集合とすると \mathbb{P}^n の有理 involutions が得られる。

問題 (4.6) 三次形式 $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ に対して

$\mathbb{P}^n \ni \mathbb{P}^n$ の有理写像 φ

$$\varphi: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \longmapsto (\partial F / \partial x_0 : \partial F / \partial x_1 : \dots : \partial F / \partial x_n)$$

で定める。 \mathbb{Q} が有理数になる F を分類せよ。 Jordan 代数のノルム以外にもあるか？ (参 [ES])

$\mathfrak{A}^{[3]}$ の話はここまでにして、 $\mathfrak{A}^{[2]}$ に対する等値射影多様体をこの節で調べよう。

§ 5 Jordan 代数上の 3 次 Veronese 多様体

空間 3 次 (有理) 曲線 $C_3 \subset \mathbb{P}^3$ は完全交叉であり、射影多様体の最も簡単な例である。いくつかの著しい性質を列挙しよう。

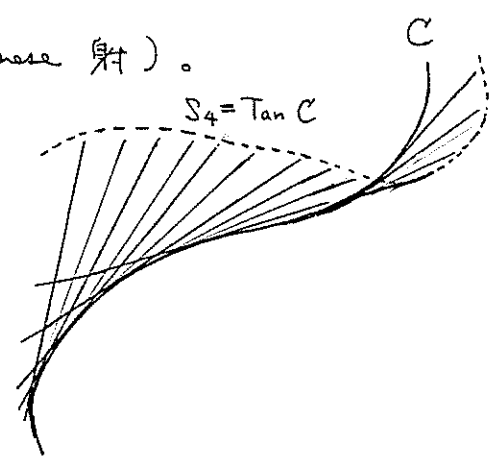
(5.0) 先づ射影同値を無視すれば、射

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^3 \quad x \longmapsto (1 : x : x^2 : x^3)$$

の像の閉包である (\mathbb{P}^1 の 3 次 Veronese 射)。

(5.1) Tangent scroll $\text{Tan } C$,

即ち、 C の接線全部の和集合は C に沿って尖点 (cusp) をもつ 4 次曲面 S_4 で、 C の射影及び \check{C} と一致する。但し、 \mathbb{P}^3 と \check{C} の及び \mathbb{P}^3 の同一視は後述の歪内積による。



(5.2) 等値射影多様体である。

これを \mathbb{C}^2 を含む以下の考察には次の考え方が便利である。 $V_3 = S^3 \mathbb{C}^2 \in SL(2)$ の 4 次元既約表現とする。これは 2 変数 3 次齊次式 $f(x, y) = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3$ の全体よりなるベクトル空間である。3 次曲線 C_3 は射影空間 $\mathbb{P}V_3$ の中で $(px + qy)^3$ という形の t の全体よりなり、4 次曲面 S_4 は重根をもつ $f(x, y)$ の全体よりなる。

$$C_3 = \{3\text{重根をもち} f\} \subset S_4 = \{\text{重根をもち} f\} \subset \mathbb{P}V_3 = \mathbb{P}^3$$

最高次 weight 点 $[x^3]$ (判別式) = 0 で定義
の $SL(2)$ 軌道 \mathbb{P}^3 の 4 次曲面

3 次式に限ると易しいことが、次の定理を引用しよう。

定理 (Cayley) 一般の 2 変数奇数次多項式 $f_{2n-1}(x, y)$

は一意的に n 個の 1 次式の中の和で表される。即ち、

$$f_{2n-1} = l_1^{2n-1} + l_2^{2n-1} + \dots + l_n^{2n-1}.$$

(3 次式 f が重根をもたず $f = l_1^3 + l_2^3$ と表される存
し、 x の Hessian $H(f)$ は積 $l_1 l_2$ の定数倍になる。
一意性は n から従う。高次の場合は高次の Hessian を考え
れば同様。)

$n=2$ の場合を幾何的に言い直すと次の様になる。

(5.3) Unique secant property (USP と略す) を満
す。即ち、 \mathbb{P}^3 の一般の点 p に対して、 p を通る C_3
の secant line が丁度 1 つ存在する。(今の場合、“一般”
を具体的に言うとは $p \notin S_4$ 。ただ、接線も secant 直線の特
別なものと考えますから $p \in C_3$ でも構いません。)

さて、 $SL(2)$ の有限次元既約表現は自己双対であること
を思い出そう。奇数次元存し $SL(2)$ -不変内積を、偶数次

元を不変歪内積をもつ。 V_3 の場合, $f, g \in V_3$ に対し

$$(f, g) = (a_0 b_3 - a_3 b_0) - 3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

が成り立つ。

(5.4) 空間3次曲線 $C_3 \subset \mathbb{P}^3$ は上の不変歪内積 (f, g) 定まる \mathbb{P}^3 上の接触構造) に関して Legendre 部分多様体である。

一般に, \mathbb{C}^{2n} 上に非退化歪内積 (\cdot, \cdot) が与えられているとき, その射影化 \mathbb{P}^{2n-1} の各点 p には n を含む超平面 H_p が対応させられる。実際, $p^\perp := \{v \in \mathbb{C}^{2n} \mid (p, v) = 0\}$ の射影化を H_p とすればよい。

定義 (5.5) 奇数次元射影空間 \mathbb{P}^{2n-1} 内の $(n-1)$ 次元部分多様体 X は, 各点 $p \in X$ での接空間が H_p に含まれるとき, Legendre 部分多様体であるという。([A] 付録4)

これは X の affine 錐 $\tilde{X} \subset \mathbb{C}^{2n}$ が Lagrange 部分多様体, 即ち, \tilde{X} の接空間がいつも symplectic ベクトル空間 $(\mathbb{C}^{2n}, (\cdot, \cdot))$ の totally isotropic 部分空間であることと同値である。

空間3次曲線の性質 (5.1) — (5.4) を Jordan 代数上の話に戻してしよう。 \mathcal{U} は \mathbb{C} 上の半単純 Jordan 代数で次のうちのいずれかとする。

- a) 単純かつ次数 3。
- b) 2次代数と \mathbb{C} の直和。
- c) \mathbb{C} 。

よって、3次冪次式 $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ は a) の場合 reduced norm, b) の場合 reduced norm の積, c) の場合 x の 3乗とする。 簡単に為、 a), b), c) をまとめ、対 (\mathcal{U}, F) を 3次 Jordan 代数と呼ぶ。 2次写像 $\mathcal{U} \ni x \mapsto x' \in \mathcal{U}$ を前節と同様に定めた。

定義 (5.6) 3次 Jordan 代数 (\mathcal{U}, F) に対して、射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & (1 : x : x' : F(x)) \end{array}$$

の像の閉包 $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ を (\mathcal{U}, F) 上の (3次) Veronese 多様体と言う。 但し、 $n = \dim \mathcal{U}$ 。

例 (5.7) $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ のとき $X \subset \mathbb{P}^3$ は有理3次曲線である。

$\mathcal{U} = M_3(\mathbb{C})$ のとき、 $x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ の行走は、 3つ

のベクトル

$$(1, 0, 0, a, b, c)$$

$$(0, 1, 0, d, e, f)$$

$$(0, 0, 1, g, h, i)$$

で生成された \mathbb{C}^6 の 3次元部分空間の Plücker 座標である。

よって、 $X^9 \subset \mathbb{P}^9$ は 9次元 Grassmann 多様体 $G(3, 6)$

である。 $\mathcal{U} = \mathbb{C}^9$ の像はその最大 Schubert 胞体。

次の観察がこの節の主結果である。

定理 (5.8) 3次 Jordan 代数 (\mathcal{U}, F) 上の Veronese 多様体 $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ は次の性質をみたす。

(1) 射影双対 \check{X} は 4次超曲面で X の tangent scroll $\text{Tan } X$ と一致する。 (\mathbb{P}^{2n+1} と X の双対は下の \mathbb{G} -不変歪内積で同一視する。)

(2) 等質射影多様体である。推移的に作用する (代数群の) Lie 環 \mathfrak{g} は Jordan 代数 \mathcal{U} の対称 Lie 代数と呼ばれるもの。それは $\mathcal{U} \oplus (\text{Der } \mathcal{U}) \oplus \mathcal{U}$ に (-見そうてお"が) 自然な Lie 環構造を入れたもの ([S1], [S2] を見よ。)

(3) Unique secant property を満たす。

(4) $\mathcal{F} := \mathbb{C} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathbb{C}$ 上の σ -不変 (非退化) 歪内積に関して $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ は Legendre 部分多様体である。

[注] (5.9) (1) 4次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ の定義式は σ -不変であるが、 \mathcal{V} が例外型の $\mathcal{H}_3(\mathbb{C})$ のとき、この4次元方程式は E_7 型 Lie 群の作用で不変である。これは例外 Lie 群の構成と関連して Freudenthal により発見された。

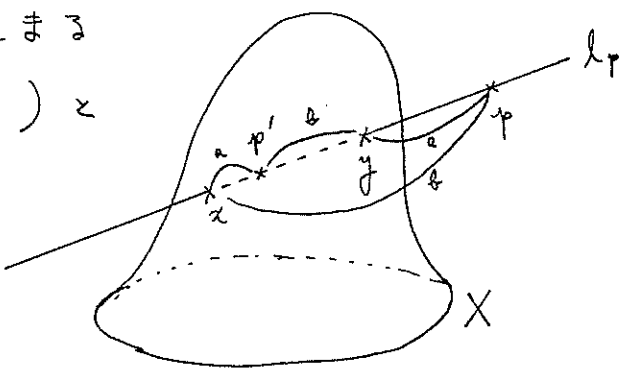
(2) $(2n+2)$ 次元ベクトル空間 \mathcal{F} は Freudenthal 3重系 ($[Me]$)、 \mathcal{V} は sp symplectic 3重系 ($[YA]$) と呼ばれる3重積 $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ をもっている。
 $(u, v, w) \longmapsto (u, v, w)$

定理の多様体 $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ は等値射影多様体としては、拡大 Dynkin 図形 $\tilde{\mathcal{A}}$ から最大ルート θ と α の隣をとり得られる $\mathcal{A}^{[1]}$ に対応し、 A, C 型以外の \mathcal{A} に対して定義される。対応する3次 Jordan 代数 (\mathcal{V}, F) は存在するが、 \mathcal{A} が A 型のときは $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ は2つの disjoint な n 次元部分空間の和集合と考えるのが正しい。

表 (5.10)

\mathfrak{K}	$\mathfrak{K}^{[2]}$	既約表現		Jordan 代数	
		\mathfrak{F}	\mathfrak{F}	等質多様体	\mathcal{V}
E_8		E_7	56次元	$E_7 \subset \mathbb{P}^{55}$ 27次元	例外
E_7		D_6	32次元 半スピノ	$X^{15} \subset \mathbb{P}^{31}$ Grassmann 代数	$A_{H_6}(\mathbb{C})$
E_6		A_5	$\lambda^3 \mathbb{C}^6$	$G(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$	$M_3(\mathbb{C})$
F_4		C_3	$\lambda^3 \mathbb{C}^6 / \sigma_{\lambda} \mathbb{C}^6$	6次元 symplectic Grassmannian	$Sym_3(\mathbb{C})$
G_2		A_1	$S^3 \mathbb{C}^2$	$\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$	\mathbb{C}
B_n		$\mathfrak{sl}(2)$ $\oplus \mathfrak{so}(n+1)$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{n+1}$	$\mathbb{P}^1 \times Q^{n-1} \subset \mathbb{P}^{2n+1}$	(2次元代数) $\oplus \mathbb{C}$
D_n					

前節の Severi 多様体の場合程簡単にわかるが、 \mathcal{V} 上の 3 次 Veronese 多様体 $X^3 \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ からも Cremona 変換が次の様に定まる。Unique secant property より、一般の点 $p \in \mathbb{P}^{2n+1}$ に対して一意に定まる secant 直線を $l_p (\ni p)$ とする。また、 X との交わりを x, y とする。



として 4 点 $(p, p': x, y)$ の複比が -1 となるように \mathbb{P}^1 上の点 p' を定める。(点 p が $(x, y) \in a:b$ に対応して $(x, y) \in b:(-a)$ に対応する点を p' 。) このとき、対応 $\mathbb{P}^{2n+1} \ni p \longmapsto p' \in \mathbb{P}^{2n+1}$ としても、 \mathbb{P}^{2n+1} の位数 2 の反有理自己同型が得られる。この symplectic 座標 $(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n)$ として、4 次超曲面 $T_{\text{an}} X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ の定義式 $D(x_0, \dots, y_n)$ とすると、この反有理変換は

$$(x_0: \dots: x_n: y_0: \dots: y_n) \longmapsto \left(\frac{\partial D}{\partial y_0}: \dots: \frac{\partial D}{\partial y_n}: -\frac{\partial D}{\partial x_0}: \dots: -\frac{\partial D}{\partial x_n} \right)$$

で与えられる。(複素空間の点 v の Cremona 変換として [EJ] で定義されている。
注(5.9) α 3 重線 \mathbb{P}^3 上 $v \longmapsto \{v, v, v\}$ を与える。)

例 (5.11) G_2 型, 即ち, 最初考えた空間 3 次曲線 $C_3 \subset \mathbb{P}^3$ の場合, 上の反有理変換は

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ \cup & & \cup \\ [f] & \longmapsto & [j(f, H(f))] \end{array}$$

である。但し, $f = f(x, y)$ は 2 変数 3 次斉次式, $H(f)$ はその Hessian $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$, $j(f, g)$ は Jacobi 行列式 $\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$ である。この反有理変換は C_3 を中心に

blow-up して, 例外因子 E と $\text{Tan } C$ の strict transform
 の交わり (\mathbb{P}^1 束 $E \rightarrow C$ の section である) を blow-up し,
 として, $\text{Tan } C$ と E の strict transform を "恒に交わり"
 して \mathbb{P}^3 という風に分解される。 \mathbb{P}^3 を C_3 で blow-up
 したものは \mathbb{P}^2 上の \mathbb{P}^1 束であるが, C を二次曲線上の
 section で初等変換して"るとも考えられる。 また, 種数 3
 次数 6 の空間曲線を中心とする \mathbb{P}^3 の Cremona 変換がよく
 知られて"るが, 上の Cremona 変換は C の中心が 3 次曲線に
 double structure を入れた non-reduced スキームに退化した
 場合と考えられる。

定理 (5.8) の重要な性質は $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ が等質 Legendre
 部分多様体であること, 他は性質 (1) と (3) は C が S 導
 くことかである。 C は単純 Lie 環の分類の幾何的理解と
 関係して面白いが, 別の機会にゆづる。

注 (5.12) Unique secant property も強い性質と思え
 るが, C である S 上の Jordan 代数上の Veronese 多様体を特徴
 付けることはできる。 例之は, S 次 del Pezzo 曲面
 $S_5 \subset \mathbb{P}^5$ は USP を満たす。 この USP は 6 次元
 Grassmann 多様体 $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ が C の性質をもつことに

由来する。

□ $G(2,5)$ の外の点 $p \in \mathbb{P}^9$ に対して, p を通る 5 次元部分空間 P で $P \cap G(2,5)$ が 4 次元 quadric にあるものが丁度 1 つ存在する。』

§3 ででてきた 10 次元直交 Grassmann 多様体 $X_{12}^{10} \subset \mathbb{P}^9$ も同様の性質をもつ (命題 (A.4) 参照)。

□注 (5.13) Severi 多様体もそうであるが, 3 次 Veronese 多様体の場合も表現空間は [SK] の意味の概均質ベクトル空間 (pre homogeneous vector space) である。相対不変式はそれぞれ 3 次, 4 次である。15 次元直交 Grassmann 多様体 $F_7^{[2]}$ と 6 次元 symplectic Grassmann 多様体 $F_4^{[2]}$ の場合に, 表現空間 \mathbb{P}^n の軌道分解が [I] により求められている。[Mu] も関係深い。

□注 (5.14) 定理 (5.8) が最も簡単に確かめられるのは, $\mathfrak{g} = \mathfrak{B}_2, \mathfrak{D}_2$, 即ち, 特殊直交 Lie 環 $\mathfrak{so}(n)$ に対応する場合である。 ($n \times n$) (等質射影多様体) は射影直線 \mathbb{P}^1 と $(n-6)$ 次元 2 次超曲面 Q^{n-6} の直積 $\mathbb{P}^1 \times Q^{n-6} \subset \mathbb{P}^{2n-7}$ で不変 4 次式 (Tan X = \check{X} の定式) は Cauchy-Schwarz の不等式の両辺の差

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n-4} y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n-4} x_i y_i \right)^2$$

で、よく知られているように平方和

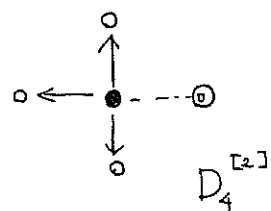
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n-4} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

に等しい。但し、 \mathbb{P}^{2n-7} の symplectic 座標を

$(x_1, \dots, x_{n-4}, y_1, \dots, y_{n-4})$ とした。特に、 $n=8$ のとき、

即ち、 $D_4^{[2]}$ に対応する等質射影多様体は

Segre 多様体 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$ である。



上の4次式を適当に座標変換したものは

サイズ $2 \times 2 \times 2$ の立方行列の超行列式 (hyperdeterminant) と
思える。

§ 6 随伴多様体と接触構造

等質空間のピラミッドを定義するために、随伴多様体を説明する。射影多様体としての性質は知られてるが、接触構造という大事な性質ももっている。

偶数次元の多様体にはシンプレクティック構造という特別な性質もつものが存在する。奇数次元ではこれに匹敵するのは次の概念である。(一般背景は [A] とその付録 4 を見よ)

定義 (6.1) ($[K0]$) $(2n+1)$ 次元複素多様体 X の (正則) 接触構造 (contact structure) とは開被覆 $\{U_i\}_i$ と各 U_i 上の正則 1 型式 ω_i でも、条件をみたすものを言う。

i) $\omega_i \wedge \underbrace{d\omega_i \wedge \dots \wedge d\omega_i}_{n \text{ 回}}$ は U_i 上どこでも零になる。

ii) 共通部分 $U_i \cap U_j$ 上で ω_i と ω_j は正則関数倍しか違わない。即ち、 $\omega_i = f_{ij} \omega_j$ 。

$\{f_{ij}\}$ は乗法的なコホモロジーで、 $\{U_i \times \mathbb{C}\}$ をこれと貼り合せて得られる X 上の直線束を L で表す。定義より、完全列

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow T_X \xrightarrow{\{\omega_i\}} L \longrightarrow 0$$

と $\{d\omega_i\}$ の定める非退化歪対称 2 線型型式

$$E \times E \longrightarrow L$$

が得られる。特に、 $c_1(X) = c_1(E) + c_1(L) = (n+1)c_1(L)$ である。最も基本所与のは \mathbb{C}^{2n+1} 上の 1 型式

$$\omega = x_1 dy_1 + x_2 dy_2 + \dots + x_n dy_n + dz \text{ である。}$$

但し、 $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ は \mathbb{C}^{2n+1} の座標。

この ω を用いて、接触多様体でコンパクトなものはいくつかある。

① シンプレクティック多様体を適当な \mathbb{C}^* -作用で割ると、手が取り早い。先づは、前節で出てきた

例 (6.2) 偶数次元ベクトル空間 \mathbb{C}^{2n+2} 上の symplectic

構造は奇数次元射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1} = (\mathbb{C}^{2n+2} - \{0\}) / \mathbb{C}^*$ 上の接触構造と導く。記号的に書くと

$$\Omega = (x_0 dy_0 - y_0 dx_0) + (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) + \dots + (x_n dy_n - y_n dx_n)$$

② で、例えは $x_0 \neq 0$ する開集合の上では 1 型式

$$\omega_0 = \frac{\Omega}{x_0^2} = dz + (p_1 dz_1 - q_1 dp_1) + \dots + (p_n dz_n - q_n dp_n)$$

同様にして $\omega_1, \dots, \omega_{2n+1}$ が定まる。但し、 $z = y_0/x_0$,

$$p_i = x_i/x_0, \quad q_i = y_i/x_0 \text{ である。}$$

多様体 Y の余接束 T_Y^* が symplectic 構造をもつことはよく知られているが、これを $2n$ 次元を得る。

例 (6.3) 複素多様体 Y の余接束の射影化

$$P_Y = T_Y^* - (0\text{-section}) / \mathbb{C}^*$$

は接触構造をもつ。

また, Lie 群 G の余随伴表現 \mathfrak{g}^* の軌道も自然な symplectic 構造をもつ。

例 (6.4) 単純代数群 G の \mathfrak{g}^* における最高次 weight

元の軌道を $P(\mathfrak{g}^*)$ で考えたものは射影等価多様体で接触構造をもつ。

Killing 形式で \mathfrak{g}^* と \mathfrak{g} は同一視できるので, 最高ル
-ト $\lambda \in P(\mathfrak{g})$ の中で軌道をとったものと同じである。よ
って, $\lambda \in G$ の随伴多様体 (adjoint variety) と呼ぶ。
簡単に記述できるのは次の通りである。

例 (6.5) $G = SL(n+1)$ の adjoint 多様体は Segre 多様
体 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n^2+2n}$ の非特異超平面切断。例 (6.3) で
 $Y = \mathbb{P}^n$ の場合であるが, そういふ \mathbb{P}^{n+1} 束構造をもつ。

例 (6.6) $G = Sp(2n)$ の adjoint 多様体は \mathbb{P}^{2n-1} の 2 次

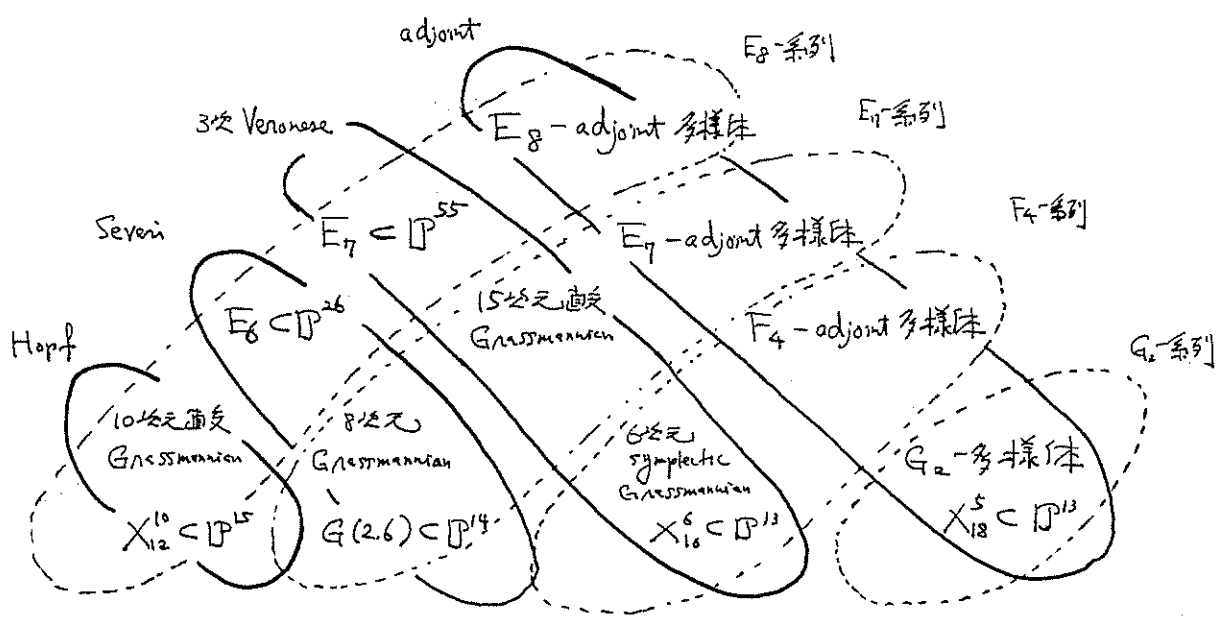
Veronese 埋込。 接触構造は (6.2) で説明した通り。

例 (6.7) $G = SO(n)$ の adjoint 多様体は 2次超曲面 $Q^{n-2} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 内の直線全体のなす $G(2, n)$ の部分多様体。

G_2 が \mathbb{R}^3 の古典型である場合の adjoint 多様体で最小次元のものか、 G_2 型の場合の S -fold $X_{10}^5 \subset \mathbb{P}^{13}$ で、 \mathbb{R}^3 で述べたように種数 10 の標準曲線切断をもつ。

§ 7 等質射影多様体のピラミッド

§§ 3-5 で述べた等質多様体の3系列, 即ち, adjoint の $\mathcal{A}^{[1]}$, 3次 Veronese の $\mathcal{A}^{[2]}$, Severi 系列 $\mathcal{A}^{[3]}$, として, 付録で述べる $E_8^{[4]}$ である所の 10次元直交 Grassmannian を, 4つの例外型 Dynkin 図形 $\mathcal{A} = E_8, E_7, F_4, G_2$ に対して, $E_8^{[4]}$ を頂点として書き述べる事が得られる。



(§2)

標準曲線切断をもつ4個の等質射影多様体(§2)がピラミッドの直辺をなす。(もう少し下にも繰り返されるが略した。また, adjoint 系列を除けば, これも既約対称 Hermite 空間でもある。)

このピラミッドの点線で囲んだ系列内での関係についておぼへる。単純代数群 G の等質射影多様体 $X \subset P^N$ に対して, X の中の直線全体のなす部分多様体 Y を考える。

これには G が作用するが, 少数の例外を除けば再び G の

等質空間に存在。 (McKay 対称に似た面白い現象も観察される。) して、 X の点 p を止めて、 $\varepsilon = 0$ を通る直線全体の存在部分多様体 $DX \subset Y$ を考える。

観察 (7.1) Dynkin 図形 (と weight の対) $\mathfrak{A}^{[i]}$ に対応する等質空間 $\varepsilon = X$ とすると、 $\mathfrak{A}^{[i+1]}$ には DX が対応する。群は G の p での安定化部分群の半単純部分。

DX に属する直線に対して、 ε 内の p での接ベクトルを対応させることにより、 DX は X の p での接ベクトル空間 $A_{X,p}$ の射影化に埋込まれる。 $X \subset \mathbb{P}^N$ が §6 の随伴多様体の場合、直線は常に接触構造から定まる超平面 $A'_{X,p}$ に入っているため、 DX は $\mathbb{P}_*(A'_{X,p})$ に埋込まれる。

観察 (7.2) $\mathfrak{A}^{[i+1]}$ に対応する DX の射影埋込は $i > 0$ のときは $DX \subset \mathbb{P}_*(A_{X,p})$ で、 $i = 0$ のときは $DX \subset \mathbb{P}_*(A'_{X,p})$ である。

等質射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ から DX, D^2X, \dots を作ると、いく操作は $D^i X$ が非連結、または、空集合に存在して終了。

何回繰り返されるかは G によるが、例外型である程長く続き、 E_3 で最長になる。 $E_3^{[5]}$ は 6次元 Grassmann 多様体 $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$, $E_3^{[6]}$ は Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$, として、 $E_3^{[7]}$ は可解となる。で終る。

点 p を通る直線は、 $X \subset \mathbb{P}^N$ を p から射影したとき (特異) 点につぶれる。また、 p からの 2重射影、即ち、接平面を中心とする射影、を考えたときの不確定点集合に入る。よって、 DX は 2重射影 $\pi_{2p}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-n-1}$ の重要な情報である。実際、多くの場合、 DX から X を復元できる。これを $\alpha^{[2]}$ と $\alpha^{[3]}$ の間で説明しよう。

($\alpha^{[2]}$ と $\alpha^{[4]}$ については付録の (A.3) を見よ。)

Jordan 代数上の 3次 Veronese 多様体 $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ に対して、1点 p からの 2重射影 $X^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ は双有理である。blow-up と blow-down の合成で書くと、

- ① X^n を p で blow-up し、
- ② p を通る X^n 上の直線 (DX の元) の strict transform 全体で一存に flop 又は inverse flop, として、
- ③ p を通る X^n 上の 2次曲線の strict transform を全部つぶす

となる。 $DX \subset \mathbb{P}^{2n} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{X,p})$ は §4 で記述した Severi 多様体、又は、その一般化である。逆に、これをから X を

構成しよう。 先ず、 DX の ambient 空間である \mathbb{P}^{n+1} を \mathbb{P}^n の超平面と見る。 \times して、次の操作を行う。

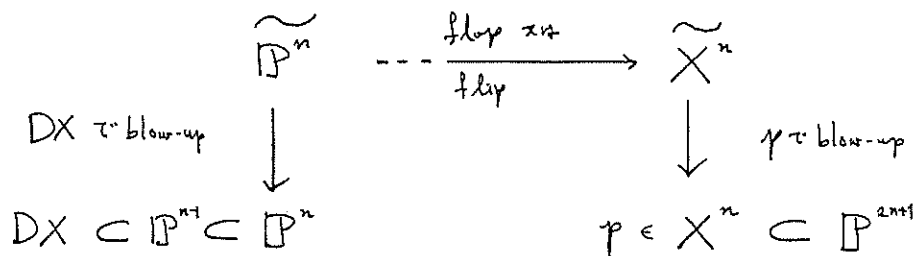
① DX を中心として \mathbb{P}^n を blow-up する。

② DX の secant variety の strict transform は DX 上の \mathbb{P}^k -束と同型。 \times した fibre の \mathbb{P}^k で一番に flop 又は flip を行う。 \mathbb{P}^k の相対的 twists は $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ 。

③ Blow-up して $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^1$, 別の方向に \times して、相対的 twists が $\mathcal{O}(1)^{\oplus k+1}$ の \mathbb{P}^1 を得る。 \times して、 $k=1$ のときは flop。 $k > 1$ のときは、 $K < 0$ から $K > 0$ と変化するので (detected) flip。

④ 超平面 \mathbb{P}^{n+1} の strict transform は上の2つの操作で再び \mathbb{P}^{n+1} になる。 \times して、 twists は $\mathcal{O}(1)$ から $\mathcal{O}(-1)$ に変化して来る。 \times して、 \times した点を1点に \times する。

最後に得られたのが求める等質空間 X (と点 p) である。

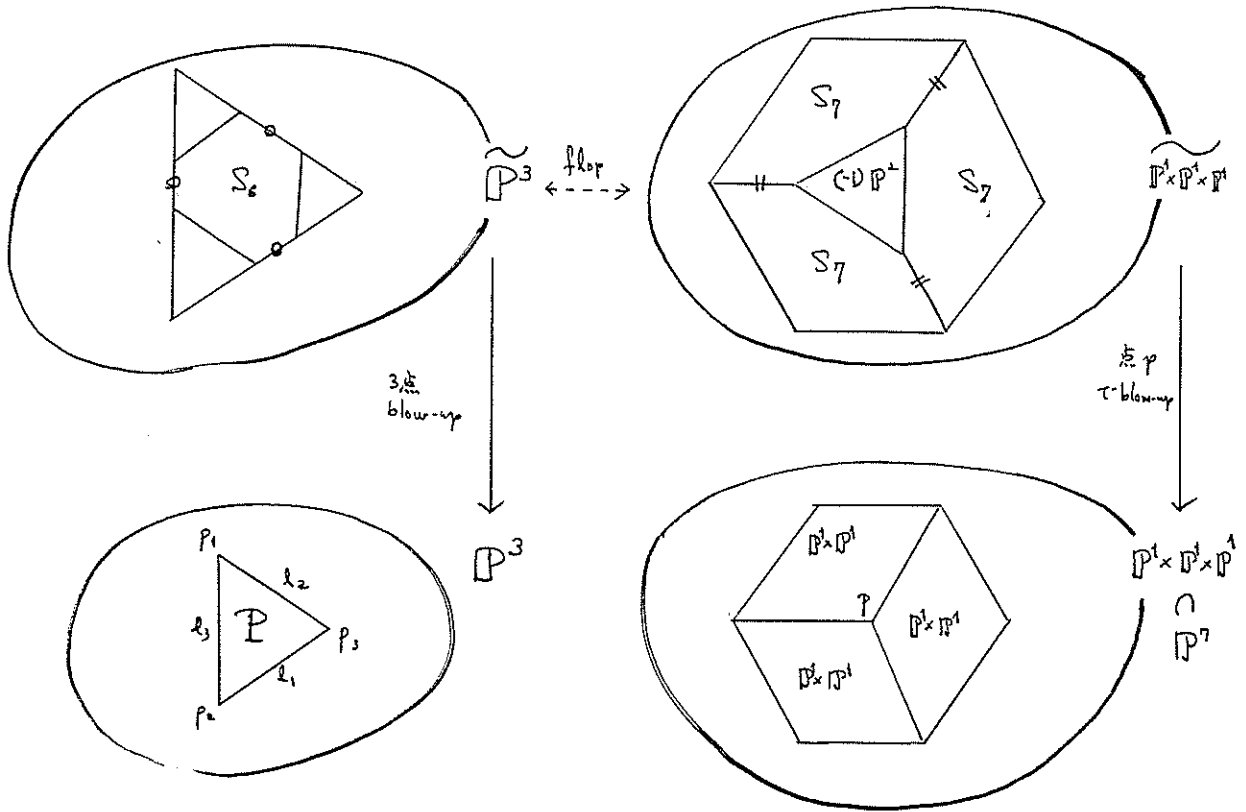


例 2重射影のファイバーは G. Fano による。

例 (7.3) $D_4^{[3]}$ に対応する等質射影多様体は Segre 多様体 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$ で、点 p からの2重射影は \mathbb{P}^3 との及

写像を与える。二つの逆は

- ① \mathbb{P}^3 に一般の位置にある3点 p_1, p_2, p_3 を blow-up して,
 - ② 3直線 l_1, l_2, l_3 の strict transform を flop し,
 - ③ 平面 \mathbb{P} の strict transform を1点に縮小させる
- の合成である。但し, l_1, l_2, l_3 は p_1, p_2, p_3 の2点を通る直線で \mathbb{P} はそれらで張られる平面。



これまでの話とは趣を異にするが、ピラミッドに出現する群表現と del Pezzo 多様体の関係に注意してこの小論を終えよう。先づ、 E_6 系列の等質射影多様体 $E_6^{[d]}$ に対応している既約表現の (nonzero) weight の全体は Weyl 群の作用

\mathfrak{e} : d 次 d の del Pezzo 曲面の上の直線全体と同型である。最も有名なものは $d=3$ で、3次曲面上の27直線の全体は $W(E_6)$ の作用も \mathfrak{e} として、 E_6 の最低次元既約表現 (例外型 Jordan 代数) の weight の全体と同型である。 ([Ma], [Ka] 参照。)

\mathfrak{e} と同様の \mathfrak{e} が E_7 -系列の既約表現 $E_7^{[d]}$ と d 次元 del Pezzo 多様体に対して成立する。但し、del Pezzo 3-fold V_d は [SR] Chap 8, §2 の意味のもので、射影空間 \mathbb{P}^3 に一般の位置にある $(3-d)$ 個の点で blow-up (たもの (半) 反標準モデルである。2点を通る直線と6点を通る3次曲線の strict transform がつらぬるため、有限個ではあるが通常2重点 (ODP) をもっている。上と同様、 $E_7^{[d]}$ に対応する既約表現の weight 全体は Weyl 群の作用も \mathfrak{e} として、 V_d 内の平面全体と同型である。但し、平面とは V_d に含まれる射影平面 P で $\mathcal{O}_P(-\frac{1}{2}K_V) \cong \mathcal{O}(1)$ なるものを言う。(この同型は2次形式も \mathfrak{e} として成立するが省略する。)

例 (7.4) $d=3$: 一般の位置にある5点を中心として \mathbb{P}^3 を blow-up (たもの、 $|-\frac{1}{2}K|$ にある像 $V_3 \subset \mathbb{P}^6$ は10個の ODP をもつ3次超曲面で、丁度15個の平面を含む。これは、 $E_7^{[3]}$ の表現、即ち、 $SL(6)$ の2次元外積表現

$\wedge^2 \mathbb{C}^6$ の 15個の weight と対応している。

この例の場合は Weyl 群 $W(A_5) = G_6$ が実際に多様体 V_3 に作用している。(本当に式を書いても解りし、 V_3 が GIT 商空間 $(\mathbb{P}^1)^6 / \text{PGL}(2)$, $(\mathbb{P}^3)^2 / \text{PGL}(4)$ であることからも従う。) 下の述べる場合には、Weyl 群全体は

配置 (configuration) の対称性としてのみ作用する。

例 (7.5) $d=2$: 一般の位置にある 6 点を中心として \mathbb{P}^3 を blow-up したものの反標準モデル V_2 は 16 個の ODP を持つ。実際、Kummer 4 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ は \mathbb{P}^3 の 2 重被覆である。 V_2 は 2 個の平面を含むが、それは $S \subset \mathbb{P}^3$ 上の 16 本の 2 次曲線と対応している。また、 $E_7^{[2]}$ 表現、即ち、 $\mathfrak{so}(12)$ の 3 次元半スピノ表現の weight の全体と同型である。

例 (7.6) $d=1$: 一般の位置にある 7 点を中心として \mathbb{P}^3 を blow-up したものの反標準モデル V_1 は 28 個の ODP を持ち、126 個の平面を含む。前者は平面 4 次曲線の 28 本の接線 (bitangent) と対応し、後者は E_7 のルートの全体と同型。書き出すとキリがないので 126 平面の内訳を考

けるにとどめる。1) - 6) の strict transform と 0) で示したものを教

0) 7点 p_1, \dots, p_7 上の例外因子

7

1) p_1, \dots, p_7 の 3点を通る平面

$\binom{7}{3}$

2) p_1, \dots, p_7 の 6点を通り、もう

1点で特異な 2次曲面

7×6

3) p_1, \dots, p_7 全てを通り、もう 4点

で特異な 3次曲面

$\binom{7}{4}$

4) p_1, \dots, p_7 全てを通り、6点で

は 2重、1点は 3重点とする 4次

7

曲面

(+)

計

126

Dynkin 図形 F_4 は E_6 を折ったものかと思えるが、 E_6 -
 系列の表現は $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ と対応する。一般の位置にある $(6-d)$
 個の点を中心として $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ を blow-up したものの反標準モ
 デル W_d とするとし、 W_d 内の 3-平面の全体が $E_6^{[d]}$ に
 対応する既約表現の weight 全体と同型である。

例 (7.7) W_2 は 3次元 Siegel 多様体 Y_4 を分岐とする
 \mathbb{P}^4 の 2重被覆。 Y_4 は $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ 主偏極 3次元 Abel 多様体のモジュラ
 イの佐武コンパクト化で、境界の 15直線に沿って ODP を持つ。

Y_4 は 10個の 2次曲面を含み、それらの 3張超平面の逆像として W_2 内の 20個の 3-平面を得る。これは、 $E_6^{[2]}$ 表現即ち、 $SL(6)$ の 3次外積 $\wedge^3 \mathbb{C}^6$ の weight 全体と同型である。

例 (7.8) W_1 は 27直線に沿って ODP をもち、72個の 3-平面を含む。前者は 3次曲面の 27直線と対応し、後者は E_6 のルート全体と同型。

注 (7.9) 例 (7.6) と (7.8) における 4次曲線、3次曲面との対応は、対称性だけではない。実際、 V_1 も W_1 も特別な一点で blow-up したものは \mathbb{P}^2 , \mathbb{P}^3 上の楕円曲線 fibre 空間に存在するが、その discriminant locus は 4次曲線、3次曲面の射影対応 (この場合も次数 12) である。

1994年11月9日

付録 Hopf 零多様体

重要なものは $E_8^{[4]}$ だけなので本文に入れず。たが、3 系列 $\alpha^{[1]}$, $\alpha^{[2]}$, $\alpha^{[3]}$ の続として $\alpha^{[4]}$ が概念的には存在する。こゝでは Hopf 零多様体と呼ぶ。

よく知られている様に、3次元球面 S^3 は射影直線 $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ 上の主 S^1 束である。同様のこゝと、4元数体で行うこゝとを、 S^4 上の主 S^3 束、そして、Cayley の 8元数を用いて S^8 上の主 S^7 束を得る。

(A.1) Hopf ファイバー束

$$\begin{array}{ccccc}
 S^1 & \longrightarrow & S^3 & & S^7 & \longrightarrow & S^{15} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & S^2 & & S^4 & & S^8
 \end{array}$$

この Hopf ファイバー束を複素数体上で代数幾何的に考えよう。 \mathbb{C} 上の Hurwitz 代数 (複素数, 4元数, 8元数と \mathbb{C} に係数拡大したもの) H とし、こゝで、2次写像

$$\begin{array}{ccc}
 H \oplus H & \longrightarrow & \mathbb{C} \oplus H \oplus \mathbb{C} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, y) & \longmapsto & (N_m(x), xy, N_m(y))
 \end{array}$$

を考へ、こゝを射影化した有理写像を

$$\phi: \mathbb{P}_*(H \oplus H) \dashrightarrow \mathbb{P}_*(\mathbb{C} \oplus H \oplus \mathbb{C})$$

とする。Hurwitz 代数のノルムの乗法性 $N_m(xy) = N_m(x) N_m(y)$ より、 ϕ の像は2次超曲面に含まれる。

定義 (A.2) \mathcal{C} の不確定点集合, 即ち,

$$X = \{ [(x, y)] \mid \mathcal{N}_m(x) = \mathcal{N}_m(y) = xy = 0 \} \subset \mathbb{P}_*(H^{\otimes 2})$$

を H の Hopf 零多様体と言う。

有理写像

\mathcal{C} の不確定性は X を blow-up することにより解消され

$$(A.3) \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{P}}^{2h-1} & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & \mathbb{Q}^h \subset \mathbb{P}^{h+1} \\ \downarrow \text{blow-up} & & \\ X \subset \mathbb{P}^{2h-1} & & \end{array}$$

が得られる。この射 $\widetilde{\phi}$ が Hopf 写像 $S^{2h-1} \longrightarrow S^h$ の代数幾何的類似である。

命題 (A.4) X の外にある点 $p \in \mathbb{P}^{2h-1}$ に対して, p を通る $(h-1)$ 次元部分空間 P で $P \cap X$ が $(h-2)$ 次元 2 次超曲面となるものが唯一つ存在する。

$\widetilde{\phi}$ はこれらの部分空間 P の strict transform を fibre とする \mathbb{P}^{2h-1} 束である。Hopf 零多様体 $X \subset \mathbb{P}^{2h-1}$ は Hurwitz 代数の実型 $H_{\mathbb{R}}$ が, \mathbb{C} , 4元数体, 8元数体であるに従って

(A.5) 2本の disjoint 直線の和集合 $X = \mathbb{P}^1 \amalg \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$. (命題の性質は §4 の USP に外ならない。)

(A.6) Segre 多様体 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^7$.

(A.7) 10次元直交 Grassmann 多様体 $X_{12}^{10} \subset \mathbb{P}^{45}$ である。また、対応する Dynkin 図形 (と weight の対) は $E_6^{[4]}$, $E_7^{[4]}$, $E_8^{[4]}$ である。最後のものが §2 で見たように種数 7 の標準曲線切断をもつ。

注 (A.8) Hopf 零多様体 $X \subset \mathbb{P}^{2h+1} \subset \mathbb{P}^{2h}$ を中心に \mathbb{P}^{2h} を blow-up して、超平面 \mathbb{P}^{2h-1} の strict transform を \mathbb{Q}^k に結びここにすると、3個の Severi 多様体を得られる。(残りの \mathbb{P}^2 は $X = \emptyset \subset \mathbb{P}^1$ と対応していると思える。) これは Zak のよき Severi 多様体の分類 ^(実際に) に使われている ([LV]).

参考文献

- [A] Arnold, V.I.: 古典力学の数学的方法, 岩波書店, 1980.
- [B] Boothby, W.M.: Homogeneous complex contact manifolds, Proc. Symp. Pure Math. 3(1961), pp. 144-154.
- [ES] Ein, L. and Shepherd-Barron, N.: Some special Cremona transformations, Amer. J. Math., 111(1989), 783-800.
- [I] Igusa, J.: A classification of spinors up to dimension twelve, Amer. J. Math. 9(1970), 997-1027.
- [Ka] Kanev, V.: Spectral curves and Prym-Tjurin varieties I, preprint, 1991.
- [Ko] Kobayashi, S.: Remarks on complex contact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 10(1959), 164-167.
- [LV] Lazarsfeld, R. and Van de Ven, A.: Topics in the geometry of projective space, DMV Seminar 4, Birkhäuser, 1984.
- [Ma] Manin, Yu.I.: Cubic forms, North-Holland, 1974.
- [Me] Meyberg, K.: Eine Theorie der Freudenthalischen Tripelsysteme, Indag. Math. 30(1968), 162-190.
- [M1] Mukai, S.: Curves and symmetric spaces, Proc. Japan Acad. 68(1992), 7-10.
- [M2] 何井 茂: Fano 多様体の新展開—ベクトル束法と元—

ユライ内題を巡りて, 1994年6月, 投稿中.

[Mu] 室 政和: 例外群 E_7 の作用する概均質ベクトル空間
の特異不変超関数, 数研講究録 no. 55, 1993, pp. 101-117.

[S1] Satake, I.: Algebraic structures of symmetric domains,
Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1980.

[S2] 佐武 一郎: Lie環の論, 日本評論社, 1987.

[SK] Sato, M. and Kimura, T.: A classification of irreducible
prehomogeneous vector spaces and their relative invariants,
Nagoya Math. J. , 65(1977), 1-155.

[SR] Semple, J. and Roth, L.: Introduction to Algebraic
Geometry, Oxford, 1949.

[YA] Yamaguti, K. and Asano, H.: On the Freudenthal's construc-
tion of exceptional Lie algebras, Proc. Japan Acad., 51(1975),
253-258.

[Z] Zak, F.L.: Severi varieties, Math. USSR-Sbornik, 54(1986),
113-127.