不変式環と双有理幾何
ー永田型不変式環とその一般化についてー

向井 茂 (MUKAI, Shigeru) * 京都大学数理解析研究所

代数群が（有限変数）多項式環に線形に作用するとき，その不変式環が有限生成かという問題をヒルベルトの本来の第 14 問題（original Hilbert's 14th problem[1]）という．永田 [N1] による反例以降、この問題は有限生成になるための良い条件を求める方向に向かっている．ここでは [N1] で考えられたべき単（unipotent）作用に対してこの方向で得られた結果を報告する．

1 永田型作用（余次元 3）

1 次元加法群 $\mathbf{G}_a$ が体 k 上[2]の 2 変数多項式環 $k[x,y]$ に

$$x \mapsto x,\ y \mapsto y + tx, \quad t \in \mathbf{G}_a$$

でもって作用する．これの n 個の（k 上の）テンソル積でもって n 次元加法群の $2n$ 変数多項式環へのべき単作用

$$(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{G}_a^n \curvearrowright k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n] =: S$$

$$\begin{cases} x_i \mapsto x_i \\ y_i \mapsto y_i + t_i x_i \end{cases}, \quad 1 \le i \le n$$

*Supported in part by the JSPS Grant-in-Aid for Exploratory Research 14204001.

[1] [N1] 序文.

[2] この節では簡単のため k は複素数体とする.

が得られる．この作用を一般の s 次元部分加法群 G に制限したものを永田型作用と呼ぶ．不変式環 S^G が一般には有限生成でないことを示した 1958 年の記念碑的な論文 [N1] が一連の話の源である．ここでは $G \subset \mathbf{G}_a^n$ の余次元 $r = n - s$ が 3 の場合が主に考察されている．不変式環のある対角的な部分環に着目し，それと射影平面の n 点爆発の関係が調べられている．n が 16 以上の平方数のときその部分環が有限生成でないこと，そして，そのことより不変式環自体も有限生成でないことが示されている．この部分環は自由アーベル群 $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ で次数付けられているが，それの台が半群として有限生成でないことがポイントである．

さて，筆者は [M1] において $r = 3, n = 9$ の場合も不変式環が有限生成でないことを示すことができ、これがこの方面に本格的に取り組む契機となった．この場合の長所は射影平面の 9 点爆発と対応することである．Painlevé 方程式や半 $K3$ 曲面を含むいろんな数学がこの周辺に集っていることもうれしい．

射影平面上の 9 点 $p_1, \dots, p_9 \in \mathbf{P}^2$ に対してはそれらを通る 3 次曲線 $C \subset \mathbf{P}^2$ が存在するので上の対角的な部分環の台は有限生成になってしまう．よって [N1] の論法はそのままでは適用できない．しかし，3 次曲線の存在は話を非常に明解にしてくれる．まず，9 点が一般の位置にあることにより C は一意的であり，かつ，非特異である．また，C の法束と 9 点の差として得られる次数 0 の因子類 $\delta := C|_C - \sum_{i=1}^9 p_i$ は次をみたす．

☆ $\delta \in \mathrm{Pic}^0 C$ は何倍しても 0 に線形同値にならない．

この性質より、レベルという量[3]でもって $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ 次数付き環とみたとき，無限個の不変式（レベル１）が生成元として必要なことがわかる．

[3] $x_1, \dots, x_n$ に関する次数から $y_1, \dots, y_n$ に関する次数の $s-1$ 倍をひいたものをレベルという．

2　非有限生成性（新論拠）

永田型不変式環 S^G 自体は大きな自由アーベル群 $\mathbf{Z}^{n+1}$ で次数付けられている．[4]対角的な部分環[5]に注目するという [N1] の方法から離れて次数付環としての台 $\mathrm{Supp}\, S^G \subset \mathbf{Z}^{n+1}$ に着目したのが [M3] である．同時に加法群 G の余次元 r も一般で考えた．

定理 1 不等式 $1/2 + 1/r + 1/s \leq 1$ が成り立つなら永田型不変式環は有限生成でない．

$r = 3, n = 9$ の場合だと,「射影平面を 9 点（一般の位置）で爆発して得られる曲面 X の上には無限個の第 1 種例外曲線があるので不変式環は有限生成でない」というのが定理の内容である．定理の証明ではこれを標準 Cremona 変換

$$\mathbf{P}^{r-1} \cdots \to \mathbf{P}^{r-1}, \quad (x_1 : x_2 : \cdots : x_r) \mapsto (\frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \cdots : \frac{1}{x_r})$$

の言葉で一般化している．これは前節の☆を使う論法よりも強力である．実際，☆は無限個の第 1 種例外曲線があるための充分条件ではあるが、必要条件ではない．爆発の中心が 2 本の 3 次曲線の交点になっている場合を考えよう．このとき δ は零である．よく知られているように曲面 X は射影直線上の楕円曲面である．2 本の 3 次曲線が充分一般ならその Mordell-Weil 群は無限（最も一般には $\mathbf{Z}^8$）．よって、自己同型群 $\mathrm{Aut}\, X$ も無限で、無限個の第 1 種例外曲線が存在する．また、有限体の代数的閉包上で本来の第 14 問題の反例を作るには☆ではダメだが，無限個の第 1 種例外曲線は標数に関係なく存在するのでこちらの方法では作ることができる．

[N1] では 13 次元加法群，[M3] では 6 次元の加法群の不変式環で有限生成でないものが得られるが，r を一般にしたおかげで，この定理に

[4]各 $i = 1, \ldots, n$ に対する i 次数（x_i, y_i に関する次数）と $x_1, \ldots, x_n$ に関する次数.

[5]i 次数が $1 \leq i \leq n$ によらない所を取り出したもの.

より $\mathbf{G}_a^3$ の不変式環で有限生成でないものがえられる $(r=6, n=9)$．現時点では、これは本来の第 14 問題に対する反例としては最小である．すなわち，次はまだ解けていない．

問題　2 次元加法群 $\mathbf{G}_a^2$ の（有限変数）多項式環への線形作用の不変式環は有限生成か？

ここまでは [M2] にも大凡を解説したのでそちらも参考にされたい．以下，その後の進展について述べる．

3　永田型作用の一般化

長さが q, r, s の 3 本足 Dynkin 図形

r　　　　　　s

○　○ − − − ○　○ − − − ○　○　○

○

○

を $T_{q,r,s}$ で表す．これの Weyl 群が無限群になる条件は

$$\bigstar \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} \leq 1$$

であることはよく知られている．$q=2$ の場合にこの事実が定理 1 の証明に有効に使われるが，$q=2$ とは限らない一般の 3 本足 Dynkin 図形と不変式環の関係が気になる．答は意外と簡単で $2n$ 変数多項式環への永田型作用（部分加法群 $G_i \subset \mathbf{G}_a^n$ は全て s 次元）を $q-1$ 個とってきてそれらの $k[x_1, \ldots, x_n]$ 上のテンソル積をとったものが $T_{q,r,s}$ で制御される．$(q-1)s$ 次元加法群が qn 変数多項式環に作用する．

定理 2 ([M4]) 不等式★が成り立つなら永田型作用のテンソル積の不変式環は有限生成でない.

これはあくまで部分加法群の次元を揃えてテンソル積をとった場合で，そうでない場合の不変式環の（非）有限生成性は未解決である.

4 有限生成性

定理1の逆が成立する.

定理 3 $1/2+1/r+1/s>1$ なら永田型不変式環は有限生成である.

不等式より r,s のどちらかは3以下である．$r=1$ の場合の不変式環は $n+1$ 変数多項式環である．また、$r=2$ の場合は $2n$ 個の不変式で生成される．これらはどちらも容易にわかる．$r=3$ は永田 [N1] で主に考えられた場合で，不変式環は射影平面 $\mathbf{P}^2$ を一般の位置にある n 点で爆発した曲面 X の全座標環

$$TC(X)=\bigoplus_{L\in\mathrm{Pic}\,X}H^0(X,L)\simeq\bigoplus_{a,b_1,\ldots,b_n\in\mathbf{Z}}H^0(X,\mathcal{O}_X(ah-b_1e_1-\cdots-b_ne_n))$$

と同型である．定理の仮定より $n\le 8$ なので X は del Pezzo 曲面[6]である．X 上の第1種例外曲線は有限個であるが，これらと反標準因子 $-K_X$（$n=8$ の場合のみ必要）でもって effective 因子の半群 Eff X[7]が生成される．また，nef 因子は基点を持たない．$n=8$ のときの $-K_X$ はこれの唯一の例外であるが，この場合でも $-2K_X$ は基点をもたない．これらのことより全座標環 $TC(X)$ は有限生成である．余次元 r が一般の場合も永田型不変式環は $r-1$ 次元射影空間の n 点爆発 X の全座標環と同型である．しかし，$r\ge 4$ の場合は余次元1をいじらない X の双有理変換（flip や flop が典型例）の存在が話を複雑にする.

[6]反標準因子 $-K_X$ が豊富な曲面.
[7]全座標環 $TC(X)$ の台である.

さて、$s=1$ の場合，不変式環は Grassmann 多様体 $G(2,n+1)$ の斉次座標環と同型である．$s=2$ の場合，n 点付 Riemann 球面上の WZW 共形ブロック（Lie 環は $sl(2)$）の全体と同型である．代数幾何的に言うと，n 点付射影直線 $(\mathbf{P}^1; p_1,\ldots,p_n)$ の上の放物的ベクトル束のモジュライ空間の全座標環と同型である．Mehta-Seshadri や Bauer[B] の結果より、それが有限生成であることがわかる．$s=3$ の場合は射影平面 $\mathbf{P}^2$ の n 点爆発 F の上の適当なベクトル束のモジュライ空間の全座標環と同型である．定理 3 の場合は仮定より $n \leq 8$ なので曲面 F は del Pezzo である．これよりモジュライ空間（複数ある）の effective 因子の半群や nef 因子の様子がよくわかり，全座標環の有限生成性を示すことができる．

5　Sylvester 型作用

加法群の作用の別の例として Sylvester 型がある．2 変数 m 次斉次多項式 $f(x,y)$ と n 次斉次多項式 $g(x,y)$ の対全体のなす $(n+m+2)$ 次元ベクトル空間に $(n-m)$ 次斉次多項式 $h(x,y)$ の全体のなすベクトル空間が

$$f \mapsto f, \quad g \mapsto g + hf$$

でもって作用する．ただし，$n > m$ とした．これより，$(n-m+1)$ 次元加法群 G が $(n+m+2)$ 変数多項式環 S に作用する．放物的ベクトル束に関する Bauer の結果を安定対に関する Thaddeus[T] の結果に置き換えることにより，次数差 $n-m=1$ の場合の Sylvester 型不変式環 S^G の有限生成性を示すことができる（向井・内藤 2002 年）．最近，内藤は次数差が一般の場合にも不変式環の有限生成性を証明している（日本数学会年会一般講演、2003 年春、東京大学）．

問題　3 変数以上の Sylvester 型作用に対して不変式環の有限生成性を調べよ．

参考文献

[B] Bauer, S.: Parabolic bundles, elliptic surfaces and $SU(2)$-representation spaces of genus zero Fuchsian groups, Math. Ann. **290**(1991), 509-526.

[M1] 向井　茂：モジュライ理論１，岩波書店，1998年.

[M2] ——: On Nagata's example of an infinitely generated ring of invariants, 第46回代数学シンポジウム報告集、大阪大学、2001年, pp. 140–151.

[M3] Mukai, S.: Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group, RIMS preprint, **1343**(2001).

[M4] ——: Geometric realization of T-shaped root systems and counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, RIMS preprint, **1372**(2002).

[N1] Nagata, M.: On the fourteenth problem of Hilbert, Int'l Cong. Math., Edingburgh, 1958.

[N2] ——: On rational surfaces, II, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A, **33**(1960), 271–293.

[T] Thaddeus, M.: Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula, Invent. Math. **117**(1994), 317-353.

（筆者の e-mail アドレス：mukai@kurims.kyoto-u.ac.jp）