

# Enriques surfaces and root systems

## — Enriques surfaces of type $E_7$ —

向井 茂 (MUKAI, Shigeru)

### 概要

An Enriques surface  $S$  is called of type  $E_7$  if the twisted Picard lattice  $\text{Pic}^\omega S$  contains the (negative definite) root lattice of type  $E_7$  as a sublattice. Assume that  $S$  is not of type  $E_8$  or  $E_7 + A_1$ . Then the period of  $S$  of type  $E_7$  is the same as that of a curve of genus two  $y^2 = g_1(x)g_2(x)g_3(x)$  with a Göpel subgroup, where  $g_1, g_2, g_3$  are quadratic polynomials. An Enriques surface  $S$  of type  $E_7$  is birationally equivalent to the quotient of a quartic surface  $\{(A_1xt + yz) + (A_2yt + xz) + (A_3zt + xy)\}^2 + 4Dxyz = 0 \subset \mathbb{P}^3$  by the standard Cremona transformation  $(x : y : z : t) \mapsto (1/(A_1x) : 1/(A_2y) : 1/(A_3z) : 1/(A_1A_2A_3t))$ . Moreover, the coefficients  $A_1, A_2, A_3$  are equal to  $D(g_1)R(g_2, g_3), D(g_2)R(g_1, g_3), D(g_3)R(g_1, g_2)$  and  $D = \{\det(g_1, g_2, g_3)\}^2$ , where  $D(g_i)$  is the discriminant,  $R(g_i, g_j)$  is the resultant and  $(g_1, g_2, g_3)$  is the  $3 \times 3$  matrix whose entries are the coefficients of  $g_1, g_2, g_3$ .

Enriques 曲面  $S$  は K3 曲面  $X$  を固定点をもたない対合  $\varepsilon$  で割って得られる代数曲面である。因子類群の間のノルム準同型写像  $\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } S$  の核  $\text{Pic}^\omega S$  の上で交点数は常に偶数である。そこで、 $\text{Pic}^\omega S$  に交点数の半分を値とする整内積を与え、これを捩れ Picard 格子 (twisted Picard lattice) と呼ぶ。この捩れ Picard 格子  $\text{Pic}^\omega S$  が (負定値) 整格子  $L$  を原始的部分格子<sup>1</sup>として含むとき、Enriques 曲面  $S$  は  $L$  型であるという<sup>2</sup>。ここでは、 $L$  が  $E_7$  型の (負定値) ルート格子である場合に、Enriques 曲面の定義式を周期から復元する。

## §1 4次曲面が被覆する $E_7$ 型 Enriques 曲面

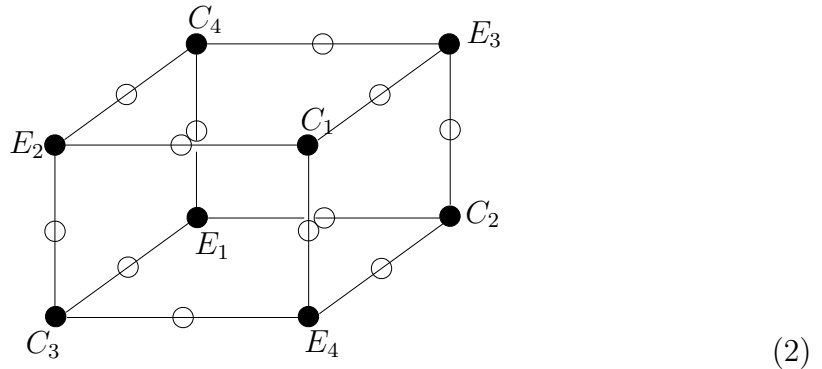
射影空間  $\mathbb{P}^3$  内の 4 次曲面

$$\{(A_1xt + yz) + (A_2yt + xz) + (A_3zt + xy)\}^2 + 4Dxyz = 0 \quad (1)$$

<sup>1</sup>部分格子  $L \subset I$  は商  $I/L$  が捩れをもたないとき、原始的 (primitive) と言う。

<sup>2</sup>Nikulin[11] では、Enriques 曲面上の非特異射影直線の配置からルート型を定めている。 $L$  がルート型格子のとき、ここでの定義とは少し異なることに注意。

を考える．ただし、 $A_1, A_2, A_3, D \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  は非零定数である．この4次曲面は4個の座標点  $(1000), \dots, (0001)$  で  $D_4$  型の有理2重点をもち、それら以外では非特異である．その極小非特異化を  $X = X_{(A_1:A_2:A_3:D)}$  とする．4次曲面と座標平面との交わりは(2重)2次曲線である．特異点解消とこれら4本の2次曲線(例えば、 $t = yz + xz + xy = 0$ )でもって、 $X$  上の20本の  $\mathbb{P}^1$  配置を得るが、その双対グラフは次の通りで、立方体の8頂点(黒丸)と12辺の中点(白丸)よりなる．



ここで、 $C_i, 1 \leq i \leq 4$ , は4本の2次曲線の強変換を表す．グラフにおけるこれらの補集合が  $E_i, 1 \leq i \leq 4$ , を中心とする  $D_4$  型 Dynkin 図形4個の疎な和集合になっている．

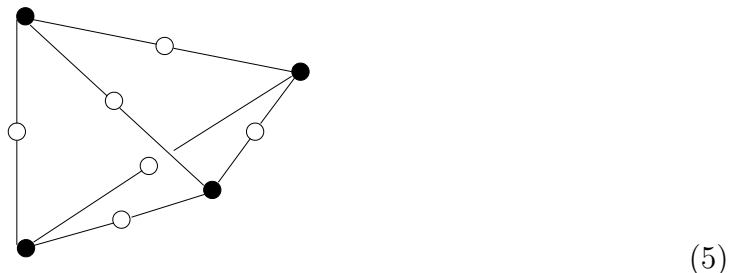
定義式(1)は座標の置換  $(xy)(zt), (xz)(yt), (xt)(yz)$  で保たれる．よって、 $X$  には  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$  (Kleinの4元群)が作用する．それだけでなく、(1)は  $\mathbb{P}^3$  の標準 Cremona 変換

$$(x : y : z : t) \mapsto \left( \frac{1}{A_1 x} : \frac{1}{A_2 y} : \frac{1}{A_3 z} : \frac{1}{A_1 A_2 A_3 t} \right) \quad (3)$$

でも保たれる．(代入して  $(A_1 A_2 A_3 x y z t)^2$  を掛けると元に戻る．) よって、極小特異点解消  $X$  の対合  $\varepsilon$  が誘導される．これが固定点をもつのは

$$(s_1^2 - 4s_2)^2 = 64s_4 \quad (4)$$

と同値である<sup>3</sup>．ただし、 $s_i$  は  $A_1, A_2, A_3, D$  の  $i$  次基本対称式である．よって、(4)が成立しない時に、商曲面として Enriques 曲面  $S = X/\varepsilon$  が得られる．対合  $\varepsilon$  はグラフ(2)に立方体の中心に関する点対称で作用するので、 $S$  の上には次を双対グラフとする10本の  $\mathbb{P}^1$  が載っている．



<sup>3</sup>この式は  $A_1, A_2, A_3, D$  を斉次座標とする  $\mathbb{P}^3$  の中で Steiner の Roman 4次曲面を定めている．

このグラフから隣接しない黒丸と白丸を1個ずつを取り除くと  $E_7$  型の拡大 Dynkin 図形 ( $III^*$  型の小平ファイバー) が得られる。よって、 $S$  は  $E_7$  型である。座標の置換  $(xy)(zt), (xz)(yt), (xt)(yz)$  と Cremona 変換 (3) と可換なので、K3 曲面  $X$  への  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$  作用は Enriques 曲面  $S$  への作用に落ちる。

注意 1 ここでは複素数体上で考えているが、標数 2 の体上での (1) は Jacobian Kummer 曲面の定義式である (Laszlo-Pauly[8, §4])。

## §2 $E_7$ 型 Enriques 曲面に対する周期写像

Enriques 曲面  $S$  は K3 曲面  $X$  を固定点のない対合  $\varepsilon$  で割って得られる。よって、 $S$  上には非自明な局所系  $\mathbb{Z}_S^\omega$  が存在する。 $\mathbb{Z}_S^\omega$  は  $X$  上の自明局所系  $\mathbb{Z} \times X$  を  $(-1_X) \times \varepsilon$  で割ったものである。この局所系の第 2 コホモロジー群  $H_S := H^2(S, \mathbb{Z}_S^\omega) \simeq \mathbb{Z}^{12}$  は重み 2 の Hodge 構造をもつ。 $H_S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  は  $H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$  と分解され、Hodge 数は  $1, 10, 1$  である。 $\mathbb{Z}_S^\omega \times \mathbb{Z}_S^\omega \rightarrow \mathbb{Z}_S$  は内積を定め、これでもって  $H_S$  は階数 12、符号数  $(2, 10)$  の odd unimodular 格子 (記号は  $I_{2,10}$ ) になる。また、Hodge 構造の偏極が与えられる。捩れ Picard 格子は  $H_S$  の  $(1, 1)$  部分に他ならない。

定理 1 [Torelli 型定理] 二つの Enriques 曲面  $S, S'$  に対して、それらの偏極 Hodge 構造  $H_S, H_{S'}$  が同型ならば、 $S$  と  $S'$  は同型である。

言い換えると Enriques 曲面の同型類の集合からの周期写像

$$\{\text{Enriques 曲面}\} / \text{同型} \rightarrow \tilde{D}^{10} / O(I_{2,10}), \quad S \mapsto H_S \quad (6)$$

は単射である (殆ど全射でもある。) ただし、 $\tilde{D}^{10}$  は 10 次元の IV 型有界対称領域の 2 個の疎な和集合で、そこに  $I_{2,10}$  の直交群  $O(I_{2,10})$  が作用している。

注意 2 Torelli 型定理のこの定式化は非自明な局所系を使わずに Allcock[1] が純格子論的に見つけた。上のように局所系  $\mathbb{Z}_S^\omega$  を使うことは R. Oudompheng 氏も独立に見つけている。

$L$  型の Enriques 曲面  $S$  に対しては、 $H_S$  における  $L$  の直交部分の Hodge 構造を対応させる周期写像を考える。周期領域は  $L$  の階数分だけ次元が下がる。格子  $E_7$  に対しては次が成立することに注意しよう。

1.  $E_7$  の  $I_{2,10}$  への埋込は一意的である。
2. 埋込  $E_7 \hookrightarrow I_{2,10}$  の直交補格子  $M$  (上より一意的に定まる) は  $\text{diag}[1, 1, -1, -1, -2]$  を内積行列とする階数 5 の格子である。

3. 制限写像  $O(I_{2,10}, E_7) \rightarrow O(\mathbb{Z}, \text{diag}[1, 1, -1, -1, -2])$  は全射である .

これらと上の Torelli 型定理より周期写像

$$\{E_7\text{-型 Enriques 曲面}\}/E_7\text{同型} \rightarrow \tilde{D}^3/O(\mathbb{Z}, \text{diag}[1, 1, -1, -1, -2]) \quad (7)$$

は単射である .

次に、3次元 IV 型有界対称領域  $D^3$  ( $\tilde{D}^3$  の連結成分) は 2次 Siegel 上半空間  $\mathfrak{H}_2 = \{\mathfrak{S} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0\}$  と同型であることに注意する . 群作用も込めて詳しく見ることに  
より、数論的商多様体の間の同型

$$\tilde{D}^3/O(\mathbb{Z}, \text{diag}[1, 1, -1, -1, -2]) \simeq \mathfrak{H}_2/\Gamma_0^*(2) \quad (8)$$

を得る . ただし、 $\Gamma_0^*(2)$  はレベル 2 の合同部分群

$$\Gamma_0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid C \equiv 0 \pmod{2} \right\} \subset Sp(4, \mathbb{Z}) \quad (9)$$

に Fricke 元  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ 2I_2 & 0 \end{pmatrix}$  を付加して指数 2 の拡大をしたものである .

数論的商多様体  $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2), \mathfrak{H}_2/\Gamma_0^*(2)$  は PEL 構造付 Abel 多様体のモジュライ空間である . 先ず、 $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2)$  は Göpel 部分群付主偏極 Abel 曲面  $(A, L, G)$  のモジュライ空間である . ただし、主偏極 Abel 曲面  $(A, L)$  の Göpel 部分群とは、2分点よりなる位数 4 の部分群  $G \subset A$  で、2等分点群上の Weil pairing  $A_{(2)} \times A_{(2)} \rightarrow \mu_2$  の制限が零になっているものである . この条件は直線束  $L^{\otimes 2}$  が商 Abel 曲面  $X/G$  上の直線束  $L'$  に descent することと同値である . よって、 $(A' := A/G, L')$  は再び主偏極 Abel 曲面である . また、 $A$  の 2等分点群  $A_{(2)}$  の  $A \rightarrow A'$  による像  $G'$  は  $(A', L')$  の Göpel 部分群である .  $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0^*(2)$  は  $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2)$  を Fricke 元の導く  $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2)$  の対合 (Fricke 対合) で割ったものであるが、この対合は  $(A, L, G)$  を  $(A', L', G')$  をうつす .

主偏極 Abel 曲面  $(A, L)$  は楕円曲線の直積ではないとしよう . このとき、 $(A, L)$  は種数 2 の曲線  $C$  の Jacobi 多様体  $\text{Jac } C$  と同型である .  $C$  は 6 点を分岐とする  $\mathbb{P}^1$  の 2重被覆  $y^2 = f_6(x)$  と表される . Göpel 部分群  $G$  を選ぶことは分岐の 6 点を 3 個の対に分けることと対応するので、 $(C, G)$  の定義式は 3 つの 2 次式  $g_1, g_2, g_3$  を用いて  $y^2 = g_1(x)g_2(x)g_3(x)$  と表わされる . ただし、 $g_i(x) = 0$  の零点を  $q_i, r_i$  (Weierstrass 点) とするとき、 $q_i + r_i - K_C$  が  $G$  の非零元を与える .

### §3 主結果

まず 4 次曲面 (1) を使う形を述べ、その後で改良を説明する .

定理 2 Enriques 曲面  $S$  は  $E_7$  型であるが、 $E_8$  型でも  $(E_7 + A_1)$  型でもないとする<sup>4</sup> .  $S$  の周期に (7) と (8) でもって対応する Göpel 部分群付主偏極 Abel 曲面を  $(A, L, G)$  とする .  $(A, L)$  は種数 2 の完備非特異代数曲線  $C$  の Jacobi 多様体  $\text{Jac } C$  と ( 偏極を込めて ) 同型で、 $G$  に対応する  $C$  の表示を  $y^2 = g_1(x)g_2(x)g_3(x)$  とする . このとき、 $S$  は

$$\begin{aligned} A_1 &= D(g_1)R(g_2, g_3), A_2 = D(g_2)R(g_1, g_3), A_3 = D(g_3)R(g_1, g_2), \\ D &= \{\det(g_1, g_2, g_3)\}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

を係数とする 4 次曲面 (1) の極小特異点解消  $X = X_{(A:B:C:D)}$  の対合  $\varepsilon$  による商と同型である . ただし、 $D(g_i)$  は 2 次式の判別式、 $R(g_i, g_j)$  は 2 次式対の終結式である . また、 $(g_1, g_2, g_3)$  は 2 次式  $g_1, g_2, g_3$  の係数を並べて得られる 3 次正方行列である .

注意 3 対応する主偏極 Abel 曲面  $(A, L)$  が ( 偏極も込めて ) 二つの楕円曲線の直積と同型になるとき、Enriques 曲面は  $E_8$  型になる .

この定理で除外されている  $E_8$  型や  $(E_7 + A_1)$  型の全体は  $E_7$  型全体 ( モジュライ ) の中で、余次元 1 の部分族をなす .  $E_8, (E_7 + A_1)$  型にも有効な形に定理を改良することができる . そのために、 $A_1A_2A_3 \neq 0$  と仮定して、射影平面  $\mathbb{P}_{(x:y:z)}^2$  の 2 重被覆

$$\tau^2 = xyz\{(A_1xt + A_2yt + A_3zt)(yz + xz + xy) + Dxyz\} \quad (11)$$

を考えよう . 分岐は座標 3 角形  $xyz = 0$  と 3 頂点を通る 3 次曲線

$$(A_1xt + A_2yt + A_3zt)(yz + xz + xy) + Dxyz = 0 \quad (12)$$

の和である ( ただし、 $D = 0$  のとき、上の 3 次曲線は可約 . ) この 3 次曲線は  $\mathbb{P}^2$  の Cremona 変換  $(x : y : z) \mapsto (1/(A_1x) : 1/(A_2y) : 1/(A_3z))$  で不変であるので、2 重平面 (11) は Cremona 変換の持ち上げ

$$(x : y : z : \tau) \mapsto \left( \frac{1}{A_1x} : \frac{1}{A_2y} : \frac{1}{A_3z} : \frac{-\tau}{A_1A_2A_3xyz} \right) \quad (13)$$

で保たれ、極小特異点解消  $X = X_{(A_1:A_2:A_3:D)}$  に対合  $\varepsilon$  が誘導される . (4) が成立しないとき、 $\varepsilon$  は固定点をもたず、Enriques 曲面  $S = X/\varepsilon$  が得られる .

$D \neq 0$  のとき、(11) は 4 次曲面 (1) の双有理同値類を点 (0001) からの射影でもって 2 重平面表示したものに他ならない . よって、(11) は (1) と共通の特異点解消  $X = X_{(A_1:A_2:A_3:D)}$  をもつ . しかし、族 (11) は  $D = 0$  でも Enriques 曲面が得られる点で族 (1) より優れている .  $D = 0$  のとき、Enriques 曲面  $S$  は  $(E_7 + A_1)$  型である .

<sup>4</sup>正確には over lattice の情報 ( この場合は  $E_8$  ) も込めて「 $(E_7 + A_1)^+$  型」と言うべきであるが、記述を煩雑にしないために略した .

注意 4 この  $(E_7 + A_1)$  型は数値的に自明な対合 (numerically trivial involution) の分類の一環として拙著 [9] で研究された . 実際、被覆の 2 枚のシートを入換える対合  $\tau \mapsto -\tau$  は  $S$  の有理係数コホモロジー群  $H^2(S, \mathbb{Q})$  に自明に作用する .

注意 5  $D \neq 0$  のときの (11) ( (1) と言っても同じ ) の対合  $\tau \mapsto -\tau$  は  $S$  の整係数コホモロジー群  $H^2(S, \mathbb{Z})$  に鏡映として作用する .  $H^2(S, \mathbb{Q})$  に鏡映として作用する対合は数値的に鏡映 (numerically reflective) と呼ばれ、拙著 [10] で研究された . そこで構成された Hutchinson-Göpel 型のもとの、この  $E_7$  型でもって、Enriques 曲面の数値的に鏡映な対合は尽きる .

また、2 重射影平面 (11) では  $E_8$  型が抜けている . これを含めるために、楕円 K3 曲面

$$\tau^2 = u^3 + \{(t^2 - p_1)^2 - p_2\}u^2 + (p_4 - 2p_3t^2)u \quad (14)$$

を考察する . ただし、 $t$  は底射影直線  $\mathbb{P}^1$  の非斉次座標、 $\tau, u$  は fiber 座標である .  $(\tau, u) = (\infty, \infty)$  を 0 切断とみなす .  $(\tau, u) = (0, 0)$  はこれと疎な切断で、2-torsion になっている . 極小非特異化は  $t = \infty$  において可約 fiber をもつが、それは  $p_3 \neq 0$  のとき  $I_{12}$  型 (12 角形)  $p_3 = 0$  のとき  $I_{16}$  型である . また、対合

$$(\tau, u, t) \mapsto \left( -\frac{(p_4 - 2p_3t^2)\tau}{u^2}, \frac{p_4 - 2p_3t^2}{u}, -t \right) \quad (15)$$

が作用し、(4) が成立しないとき固定点をもたない . よって、商として楕円 Enriques 曲面がえられる (これは  $p_3 = 0$  の場合に Barth-Peters[2] によって研究された .)

さて、 $\mathbb{P}^2$  において座標 3 角形  $xyz = 0$  と可約 3 次曲線  $(A_1xt + A_2yt + A_3zt)(yz + xz + xy) = 0$  で生成される 1 次元線形系 (pencil) を考える . これは K3 曲面 (11) の楕円 fibration を誘導する . この fibration は切断と 2-torsion 切断をもつので、それらを使って、標準型を求めると (14) の形になる . 次は、Kumar[7] の Enriques 版ともみなせる ( $E_8$  型に制限したものは Inose[6] や Clingher-Doran[4] の Enriques 版になっている .)

定理 3  $S$  は  $E_7$  型 Enriques 曲面とする .  $S$  の周期に対応する Göpel 部分群付主偏極 Abel 曲面  $(A, L, G)$  より数  $p_1, p_2, p_3, p_4$  が定まり、 $S$  は楕円 K3 曲面 (14) を対合 (15) で割ったものと同型である .  $S$  が  $E_8$  型でないのは  $p_3 \neq 0$  と同値で、このとき、4 個の係数は

$$p_1 = (A_1 + A_2 + A_3 - D)/2, \quad p_2 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3, \quad p_3 = A_1A_2A_3, \\ p_4 = A_1A_2A_3D$$

で与えられる .

係数  $p_1, p_2, p_3, p_4$  は  $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0^*(2)$  上の重み  $2, 4, 6, 8$  の保型形式になっていて、保型形式環の偶数次部分を生成していることが面白い ( $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2)$  では重み  $2, 4, 4, 6$  の保型形式で生成されている (Ibukiyama[5, §6]) .)

注意 6  $E_7$  型の Enriques 曲面のモジュライは荷重射影空間  $\mathbb{P}(1 : 2 : 3 : 4)$  (佐武コンパクト化) から (4) に対応する因子 (Humbert 曲面) を除いた部分である .

## 参考文献

- [1] Allcock, D.: The period lattice for Enriques surfaces, *Math. Ann.* **317**(2000), 483–488.
- [2] Barth, W. and Peters, C.: Automorphisms of Enriques surfaces, *Invent. math.* **73**(1983), 383–411.
- [3] Barth, W., Peters, C. and Ven, A. Van de: *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, 1984.
- [4] Clingher, A. and Doran, C.F.: Modular invariants for lattice polarized K3 surfaces, *Michigan Math. J.* **55**(2007), 355–393.
- [5] Ibukiyama, T.: On Siegel modular varieties of level 3, *Int. J. Math.* **2**(1991), 17–35.
- [6] Inose, H.: Defining equations of singular K3 surfaces and a notion of isogeny, *Proc. of the Int. Symp. on Alg. Geom.*, Kinokuniya, Tokyo, 1978, pp. 495–502.
- [7] Kumar, A.: K3 surfaces associated to curves of genus two, *Int. Math. Res. Notes*, 2008, Art. ID rnm165, 26 pp.
- [8] Laszlo, Y. and Pauly, C.: The action of the Frobenius map on rank 2 vector bundles in characteristic 2, *J. Alg. Geom.* **11**(2002), 219–243.
- [9] Mukai, S. : Numerically trivial involutions (of Kummer type) of Enriques surfaces, preprint, RIMS Kyoto University, #1544, to appear in *Kyoto Math. J.*
- [10] Mukai, S.: Kummer’s quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces, RIMS preprint #1633, 2008, to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
- [11] Nikulin, V.V.: On the description of the groups of automorphisms of Enriques surfaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **277**(1984), 1324–1327, (in Russian).

Research Institute for Mathematical Sciences  
Kyoto University  
Kyoto 606-8502, Japan  
*e-mail address* : mukai@kurims.kyoto-u.ac.jp