城崎
1987年2月

モジュライ空間と3・4次元多様体

代表者 松本堯生

ベクトル束のモジュライとシンプレクティック多様体

名大理　向井 茂

(斎藤 政彦 記)

§0.

モジュライ空間とは，一言で言うと，"幾何学的対象"の同値類の集合に"自然な構造"を入れたものである。ここで幾何学的対象としては

- 多様体
- 固定された多様体の部分多様体
- 固定された多様体上のベクトル束

等が考えられ，又，構造としては

- 位相
- 複素構造，代数多様体の構造
- 計量，シンプレクティック構造

等が考えられる。

ここでは，多様体上のベクトル束のモジュライを問題にするが，この場合でもどのカテゴリーで考えるかによって，モ

ジュライ空間の様子も随分違ったものとなる。例えば，位相多様体のカテゴリーでは，分類空間Bとその上の普遍ベクトル束$\mathcal{E}$が存在し，連続写像 $f : X \longrightarrow B$ に対し $f^*\mathcal{E}$ を対応させることにより，全単射

$$\left\{\begin{array}{c} f : X \longrightarrow B \\ \text{連続写像} \end{array}\right\} \Big/ \text{ホモトープ} \xrightarrow{\ \sim\ } \left\{\begin{array}{c} X\text{上のベクトル束} \\ \text{の位相同型類} \end{array}\right\}$$

を得る。しかし，Xを複素多様体，V_X をX上の複素正則ベクトル束の同型類の集合とした時に，V_Xに自然な複素構造を入れ，$X \times V_X$上に普遍ベクトル束$\mathcal{E}$を構成しX上の$\underbrace{\text{ベクトル}}_{\text{すべての}}$トル束の族が$\mathcal{E}$の引きもどしによって得られると言うわけにはいかなくなる。（丸山氏の論説を参照。） そこで現実には，V_Xに出来るだけ良い構造を入れたものをモジュライ空間とするわけである。ここで，複素多様体Xに色々な構造，例えば，ケーラー性，射影性等を仮定した時，良いベクトル束のクラス（例えば，単純束や安定束）に制限すると，V_X は再びその構造を受け継ぐことが知られている。（§1）

一方，複素曲面の中でK3曲面Sは，正則シンプレクティック構造ωを持つが，実はK3曲面上の単純ベクトル束（もっと一般に単純層）のモジュライ空間はK3曲面から誘導されたシンプレクティック構造を持つ事が向井[8]によって示されている。ここではK3曲面上の単純ベクトル束のモジュ

ライ空間の例を挙げながら，シンプレクティック構造が遺伝する事について解説し，さらにその高次元シンプレクティック多様体上の単純束のモジュライへの小林昭七氏による拡張について解説する。（小林[5]）

§1．ベクトル束のモジュライ空間．（定義・結果）

まず，複素正則ベクトル束のモジュライについて定義と現在まで知られている基本的な結果をまとめておく。

定義(1.1)　複素多様体の間の写像$\pi : E \longrightarrow X$は次の条件を満す被覆$\{U_i\}_{i\in I}$が存在する時，階数$r$の正則ベクトル束と言う。

1)　各$i \in I$に対して同型 $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$ が存在する。

2)　各$i, j \in I$に対して正則写像 $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(r,\mathbb{C})$ が存在して

$$\left(\left(\varphi_i|_{U_i\cap U_j}\right)^{-1}\circ\left(\varphi_j|_{U_i\cap U_j}\right)\right)(x, v) = (x, g_{ij}(x)v)$$

と書ける。

上の定義において，Xが代数多様体，各U_iがザリスキ開集合に取れ，各g_{ij}がX上の有理型関数の制限である時，Eは

X上の代数的ベクトル束と言う。代数多様体Xがコンパクトな時，SerreのGAGAの原理より正則ベクトル束は常に代数的である。以下ベクトル束はすべて正則ベクトル束とする。

さて複素多様体X上の正則ベクトル束の同型類の集合をV_Xと書く。最も理想的な場合，V_Xがモジュライ空間であるとは，V_Xに複素構造が入り，直積 $X \times V_X$ 上に正則ベクトル束 $\mathcal{E}_X$ が存在し，任意の正則写像 $f: T \longrightarrow V_X$ に対して，$(1 \times f)^* \mathcal{E}_X$ を対応させる事により全単射

$$\left\{ \begin{array}{c} f: T \to V_X \\ \text{正則写像} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} X \times T\text{上の} \\ \text{正則ベクトル束} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

が得られる時に言う。ここで，$X \times T$上の正則ベクトル束E_1，E_2について$E_1 \sim E_2$とは，あるT上の直線束Lが存在し，$E_1 = E_2 \otimes p_2^*(L)$となる時に言う。上の図の右側を，解析空間の圏（An）から集合の圏（Set）への関手と見なした時，V_Xと$\mathcal{E}_X$は，その関手を表現しているわけで，V_Xは丸山氏の論説にあるFine moduli であると言われる。現実にはこのような理想的な状況はほとんどおこらないので，粗モジュライ空間の存在が問題となる。ここで，V_Xが粗モジュライ空間であるとは，V_Xに複素構造が入り，任意の複素多様体Tと$X \times T$上の正則ベクトル束$\mathcal{E}$について，自然な写像，$f: T \longrightarrow V_X$，$f(t) = [\mathcal{E}_t = \mathcal{E}|_{X \times \{t\}}$の同型類$]$，

$^\forall t \in T$ が正則写像になる時に言う。すなわち，正則ベクトル束の同型類の集合V_Xに自然な複素構造を入れたものを粗モジュライ空間（以下モジュライ空間と呼ぶ）である。

ところで，一つの固定されたコンパクト複素多様体Xに対し，モジュライ空間V_Xを考える時に，Xの上の全てのベクトル束を考えてしまってはいい性質のモジュライ空間は得られない。そこで，モジュライ空間にどの様な性質を望むかに従って考えるベクトル束の類を上手に選ぶ必要がある。その性質としては次のようなものがある。

定義(1.2)　X上の正則ベクトル束Eは，その自己準同型写像が定数倍しかない時，<u>単純（simple）</u>であると言う。

（すなわち，E：単純 $\Leftrightarrow$ $H^0(X, \mathcal{E}nd(E)) = \mathbb{C}$）

定義(1.3)　(X, H)を射影多様体とアンプル可逆層の組とする。代数的ベクトル束E（又は連接層）について

$$P_E(m) = \frac{1}{r(E)} \chi(E(m)) = \frac{1}{r(E)} \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, E \otimes H^{\otimes m})$$

とおく。Eが<u>H-安定</u>（<u>準安定</u>）とは，$\mathcal{O}(E)$の連接部分層F，$0 < r(F) < r(E)$に対し

$$P_F(m) \underset{(\leqq)}{<} P_E(m) \qquad {}^\forall m \gg 0$$

となる時を言う。

定義 (1.4)　(X, g) を Kähler 多様体と Kähler 計量の組とする。正則ベクトル束 E の Hermite 計量 h は、その曲率が、g の Kähler 形式と定数倍しか違わない時、Einstein－Hermite 計量と呼ばれる。

これらの良いベクトル束については以下の事が知られている。

(A_{an}) コンパクト複素多様体の上の単純ベクトル束のモジュライ空間は解析空間。但し一般に Hausdorff 的でない。

(A_{alg}) 完備代数多様体上の単純ベクトル束のモジュライ空間は代数空間。

(B_{alg}) 射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ の上の安定ベクトル束のモジュライ空間は準射影的（よって Hausdorff）。安定層を付加することによってコンパクト化され射影スキームになる。（Gieseker [1]，丸山 [7]）

(B_{an}) コンパクトKähler多様体 (X, g) の上のベクトル束で Einstein－Hermite計量 h をもつもののモジュライ空間の非特異部分は，X の Kähler計量 g から誘導された Kähler 計量を持つ。（小林）

(B_{YM}) コンパクト（実）4次元 Riemann多様体の上の反自己双対的な Yang－Mills 接続のモジュライ空間は，自然な Riemann 計量をもつ。（伊藤 [2]）

さて，射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ 上では，

E－H 計量をもつ ⇒ 安定 ⇒ 単純

である。前半は小林[4]により示され，（E－H計量をもつ $\underset{(小林)}{\Rightarrow}$ μ-安定（Mumford－竹本の意味）$\overset{(\text{trivial})}{\Rightarrow}$ 安定），後半は簡単な演習問題である。安定性は開条件であるので，安定束のモジュライ空間は単純束のモジュライ空間の開部分集合である。

§2　K3曲面上のベクトル束

コンパクト2次元複素多様体 S は2つの性質：

(1) S上には，零点のない正則2形式 $\omega \in H^0(S, \Omega^2_S)$ が存在．

(2) 第1 Betti 数は零

を満す時，K3曲面と呼ばれる。上の性質(1)より K3曲面は次の意味でシンプレクティック多様体である。

定義 (2.1)　複素多様体 X 上の閉じた正則2形式 ω は X の各点 x で非退化，すなわち接空間 $T_{X,x}$ 上の双線形形式

$$\omega_x : T_{X,x} \times T_{X,x} \longrightarrow \mathbb{C}$$

が非退化の時，X上の（正則）シンプレクティック構造であると言う。

K3曲面の例をいくつかあげよう。

例 (2.2)　非特異4次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ は K3 曲面である。

例 (2.3)　(2次超曲面) $\cap$ (3次超曲面) $\subset \mathbb{P}^4$ は非特異な時K3曲面である。

実際，(2)の条件は Lefshetz の定理から．又 (1)は，$K_{\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$，$K_{\mathbb{P}^4} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-5)$ と添加公式を用いて簡単に示せる。

少し高級な例としては次がある。

例 (2.4)　$G = Spin(10) = (SO(10, \mathbb{C})$ の univ. cover$)$

V：スピノル表現　($\dim V = 16$)

$X \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{15}$　highest weight vector の G-orbit.

$X = G/P$　：複素10次元等質空間．　$\deg X = 12$.

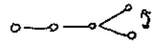
$H_1, H_2, \cdots, H_8$　一般の超平面 $\subset \mathbb{P}(V)$

$S = X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_8 \subset \mathbb{P}^7$　は　K3曲面.

これもやはり，Lefshetz の定理と $K_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-8)$ からすぐわかる。

K3曲面のベクトル束のモジュライ空間には，再びK3曲面が表われる。その例をみよう。

例 (2.5)　$S \subset \mathbb{P}^3$ を一般の非特異4次曲面，$s \in S$ に対し点 s からの射影 $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ を考え，$\pi_s : S - \{s\} \to \mathbb{P}^2$ とする。$E_s = (\pi_s^* T_{\mathbb{P}^2}$ を S 上に解析的にひろげたもの$)^{(*)}$ とする。E_s は，階数 $r(E_s) = 2$，$c_1(E) = 3h$，$c_2(E) = 11$ かつ安定なベクトル束である。逆にこの様なベクトル束は，全て E_s，($^\exists s \in S$) と同型となる。よってモジュライ空間は S と同型．（h は $\mathbb{P}^3$ の超平面束の S への制限）

例 (2.6)　$G = Spin(10)$，V スピノル表現，V^* をその双対表現とする。例 (2.4) と同様に $X^* \subset \mathbb{P}(V^*)$ を作ると X と X^* は同型である。（V と V^* は表現としては違うがディンキン図形  の自己同型で移り合う。）$W^8 \subset V^{16}$ を一般の8次元部分空間とし，W^* をその双対部分空間 $\subset V^*$ とする。$S = X \cap \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$，$S^* = X^* \cap \mathbb{P}(W^*) \subset \mathbb{P}(V^*)$ とすると，S，S^* はK3曲面となる。次が示される。

定理 (2.7)　S^* は S 上の $rk(E) = 2$，$c_1(E) = h$，$c_2(E) = 5$ なる安定ベクトル束のモジュライ空間である。

$S^{**} = S$ であるから，SはS^*上の同様なベクトル束のモジュライ空間である。

一般にSとS^*は同型ではないが，周期を$\mathbb{Q}$上で考えれば，同型となり，SとS^*は isogeny である。

次にモジュライ空間が高次元になる場合をみよう。

例(2.8) $S \subset \mathbb{P}^4$ を例(2.3)のK3曲面とする。今 $s, t \in S$ ($s \neq t$) を取り，$L_{s,t}$ を $s, t \in S$ を結ぶ曲線 $L_{s,t}$ とする。Sを十分一般に取れば $L_{s,t}$ はSと s, t のみで交わる。直線 $L_{s,t}$ からの射影 $\pi_{s,t} : S - \{s, t\} \to \mathbb{P}^2$ により，$E_{s,t} = (\pi_{s,t}^*(T_{\mathbb{P}^2})$ のSへの拡張$)$ とすると，$E_{s,t}$は $rk(E_{s,t}) = 2$，$c_1(E_{s,t}) = 3h$，$c_2(E_{s,t}) = 16$ なる安定なベクトル束となる。さらに，$s = t$の場合 $L_{s,s}$ を $s \in S$ における接線とした時も $E_{s,s}$ は上の性質を持つ。逆に，上の性質を持つベクトル束は上の形でかける。ここで上の性質を持つ，ベクトル束のモジュライ空間は，S上の点対 $\{s, t\}$ で $s \neq t$ か，$s = s$ ならば，sのSにおける接線の全体のなす集合 $Hilb^2 S$ と同型となる。$Hilb^2 S$ はSの2次対称積 $Sym^2(S)$ $(= S \times S /_{1,2\text{成分の入れ換え}})$ の非特異化に他ならず4次元の複素射影多様体になる。

さて，藤木氏は $Hilb^2 S$ が，S上のシンプレクティック構造から導かれる自然なシンプレクティック構造を持つ事を最初に発見し，高次元既約単連結シンプレクティック多様体の最初の例になった。

§3 モジュライ空間のシンプレクティック構造

前節で見たように，K3曲面上の安定束（又は単純ベクトル束）のモジュライ空間は，K3曲面上のシンプレクティック構造を受け継ぐという現象があるわけだが，これはK3曲面上の単純ベクトル束（もっと一般にK3曲面上の単純連接層）に対して一般に成り立つ。この節ではこの事実を示すが，この事実は次の様に拡張されている。

(C) コンパクト（正則）シンプレクティック多様体 (X, ω) の上の単純ベクトル束のモジュライ空間の非特異部分は，シンプレクティック構造ωから導かれたシンプレクティック構造をもつ。（小林 [5]）

(C_{YM}) 実4次元コンパクト超Kähler多様体の上の反自己双対 Yang-Mills 接続のモジュライ空間は自然な超Kähler構造をもつ。（伊藤 [3]）。

小林氏の結果については，5節で簡単に解説する．

さて，Xをコンパクト複素多様体，EをX上の単純ベクトル束とする．(X, E)の組に対し，基点付き複素解析空間 $(M(E), *)$ と $X\times M(E)$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が存在し，次の性質を満す．1) $\mathcal{E}|_{X\times *}\cong E$　2) $\mathcal{E}'|_{X\times *}$ が E と同型な $X\times T$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}'$ に対して，Tの基点 * の近傍から M(E) への *-正則写像 φ で $(1\times\varphi)^*\mathcal{E}\cong\mathcal{E}'$ となるものがある。　3)　2) における φ は正則写像の芽として一意的．（M(E)は，Eの倉西空間に外ならない。存在については [9] を見よ。）

ベクトル束の単純性は開条件であるが，M(E)上の全てのベクトル束は単純と仮定してよい。よってX上の単純ベクトル束のモジュライ空間 SV_X の [E] の近傍の複素構造をM(E)を用いて入れることができる。（これを張り合せていける事は3)が保障する。）

SV_X の局所的性質およびその上の正則2形式の存在をみるために，ベクトル束の無限小変型について考える。ベクトル束は正則写像 $g_{ij}: U_i\cap U_j \to GL(r,\mathbb{C})$ により定まるが $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ は $GL(r,\mathcal{O}_X)$ 係数の 1-cocycle で $H^1(X, GL(r,\mathcal{O}_X))$ の元と思える。$\{g_{ij}\}$ を無限小数 $\varepsilon\neq 0,\ \varepsilon^2=0$ により，$\widetilde{g_{ij}} = g_{ij}(1+\varepsilon a_{ij})$ と変形すると，($a_{ij}\in \Gamma(U_i\cap U_j, M(r,\mathcal{O}))$

) $\{\widetilde{g_{ij}}\}$ が乗法的 1-cocycle になるための条件は

(3.1) $$g_{jk}^{-1}\, a_{ij}\, g_{jk} + a_{jk} = a_{ik}$$

であり，これは $\{a_{ij}\}_{i,j\in I}$ が $\mathcal{E}nd(E)$ を係数とする（加法的1-コサイクルである事を示す。よって

(3.2) $$\{E\text{の無限小変型}\} \cong H^1(X, \mathcal{E}nd(E)).$$

SV_X の構成法（倉西空間の構成法）から，これは次のように言い換えられる。

(3.3) 単純ベクトル束Eに対応する点[E]での SV_X の Zariski 接空間は $H^1(X, \mathcal{E}nd(E))$ と同型である。

特に

(3.4) $$\dim_{[E]} SV_X \le \dim H^1(X, \mathcal{E}nd(E))$$

が常に成立し，等号は SV_X が[E]で非特異な時に限って成立する。

さて，ベクトル束の(局所的)自己準同型に対して，そのトレースはスカラーである。よってEの局所的自己準同型 f, g に対して $\mathrm{Tr}(f\cdot g)$ を対応させる事により，層の対 (pairing)

$$\mathcal{E}nd(E)\times\mathcal{E}nd(E) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

が得られる。これは f と g に関して対称なのでコホモロジーに導くカップ積

(3.5) $H^1(X, \mathcal{E}nd(E)) \times H^1(X, \mathcal{E}nd(E)) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$

は歪対称である。

ここで、XをK3曲面としよう。すると $\Omega^2_X \cong \mathcal{O}_X$ で、$H^2(X, \mathcal{O}_X)$ は1次元であるから、Serre の双対定理より、(3.5) の双線型歪対称写像は非退化である。さらに

(1) X が K3 曲面ならば、SV_X は非特異

(2) (3.5) より導かれる $\omega_{SV_X,(E)} : T_{SV_X,(E)} \times T_{SV_X,(E)} \to \mathbb{C}$ は SV_X 上正則な2形式 ω_{SV_X} を定め、さらに ω_{SV_X} は閉形式である。

が示される。(向井 [8], [9] を見よ。) よって次が示される。

定理 (3.6) X が K3 曲面の時、SV_X は非特異かつ、自然なシンプレクティック構造をもつ。

さらに、X上の単純連接層 E (⇔ End(E) が1次元) の同型類の全体に自然な複素構造を入れたものを Spl_X と書く時、次が成立する。

定理 (3.7) X が K3 曲面又はアーベル曲面の時、Spl_X は非特異で自然なシンプレクティック構造を持つ。

(向井 [8], [9])

次元の計算等は、[8], [9] を参照。

定理 (3.7) の系として次が得られる。$Hilb^n X$ で X の0次元部分スキームで長さ n のもの全体を表わす。$Hilb^n X$ には自然な複素構造が入り、自然な写像 $Hilb^n X \to Sym^n X$ は正則で、しかも X が曲面の時、n 次対称積 $Sym^n X$ の非特異化を与える。

系 (3.8) X が K3 曲面の時、$Hilb^n X$ は自然なシンプレクティック構造を持つ。

$Hilb^n X$ も既約な正則シンプレクティック多様体の例であるが、高次元(4次元以上)のシンプレクティック多様体はこれ以外に、あまり知られていない。(もちろん $Hilb^n X$ の変型、初等変換をほどこしたもの等はあるが。)

§4 シンプレクティック構造とその遺伝

前節で見たようにシンプレクティック構造が遺伝する現象を、少し一般的に考察しよう。

定義 (4.1) C^∞ 多様体 X 上の各点の接空間に非退化歪対称形式 $\omega_x \in \bigwedge^2 T^*_{X,x}$ が与えられ、$\omega = \{\omega_x\}$ は X 上の C^∞ 2形式で $d\omega = 0$ の時、ω を X の(実)シンプレクティック構造と呼ばれる。

例 (4.2) 多様体 Y の余接束 T^*_Y は各点 $y \in Y$ の局所座標 $p_1, \dots, p_n$ と $q_1 = \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, q_n = \frac{\partial}{\partial p_n} \in T_{Y,y}$ を用いて 2形式

$$\omega = \sum dq_i \wedge dp_i = d\left(\sum q_i dp_i\right)$$

をもつから，シンプレクティック多様体。

例 (4.3) X を Kähler 多様体とすると Kähler計量 g の虚部 $\mathrm{Im}(g)$ は実シンプレクティック構造。

さて，(X, ω) がシンプレクティック多様体，$\overbrace{G}^{\text{Lie群}}$ が X に作用し，ω が G の作用に対して不変な時，X の subquotient にシンプレクティック構造を入れよう。

定義(4.4) Lie群 G が X にシンプレクティック構造 ω を保ちながら作用しているとする。$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ とする。

$\mu : X \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ がモーメント写像とは，$^\forall a \in \mathfrak{g}$ に対し，X 上の関数 $H_a(x) = \langle \mu(x), a \rangle$ が，a の与える X 上のベクトル場 $\mathfrak{X}_a$ のハミルトニアンになっている時に言う。

定理 (4.5) μ が G 同変なモーメント写像であり，$\alpha \in \mathfrak{g}^*$ が μ の regular value である時，$\mu^{-1}(\alpha)/G$ は，ω から導かれる自然なシンプレクティック構造をもつ。これを簡約相空間 (reduced phase space) と言う。

例をいくつか挙げる。

例 (4.6) V をベクトル空間，$(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ 歪対称．$W \subset V$ を isotropic な部分空間 (すなわち，$(W, W) = 0$) とし，$w_1, \dots, w_n$ を W の基底とする。$G = \mathbb{R}^n$ は V に の様に作用するが，これは $(\ ,\ )$ を保つ。

$t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

$g_t : V \to V \qquad v \longmapsto v + \sum t_i (v, w_i) w_i$

この時，$\mu : V \to W^*$，$v \mapsto (v,\ )$ はモーメント写像で $\mu^{-1}(0)/\mathbb{R}^n \cong W^{\perp}/W$ で $(\ ,\ )$ から導かれるシンプレクティック構造を持つ。

例 (4.7) V を複素ベクトル空間 $z = (z_1, \dots, z_n) \in V$ 上のエルミート形式 $H(z, w) = \sum z_i \overline{w_i}$ を考えよう。$G = \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1 \} \cong S^1$ は V に作用し H を保つ。よって(実) シンプレクティック構造 $\mathrm{Im}(H)$ を保つ。

モーメント写像 $\mu : V \to \mathbb{R}$ を $\mu(z) = \frac{1}{2} H(z, z)$ で定められる。これにより

$$\mu^{-1}(2)/S^1 = S^{2n-1}/S^1 \cong \mathbb{C}P^{n-1}$$

であり，($\mathrm{Im}(H)$ から導かれるシンプレクティック構造) = (Fubini-Study 計量の虚数部分) である。

§5. 小林の定理.

ここでは, 第3節で述べた小林の定理の解説をする。第4節で述べたモーメント写像, 簡約相空間の無限次元版 (Marsden-Weinstein [6]) を用いる点では, (Ban) の証明と共通する.

X をコンパクト複素多様体, ω を X 上の正則シンプレクティック構造, E を X 上の C^∞ 複素ベクトル束とする。E の C^∞-自己同型群, すなわちゲージ群を $GL(E)$ と書く。

$\mathcal{D} = \{ E$ 上の $(0,1)$ 型接続 $\}$

$H(E) = \{ D \in \mathcal{D} ;\ N(D) = D \circ D = 0 \}$: E 上の複素構造.

$S(E) = \{ D \in H(E),\ H^0(X, \mathcal{E}nd(E^D)) \cong \mathbb{C} \}$

$S(E)^\circ = \{ D \in S(E),\ H^2(X, \mathcal{E}nd(E^D)) = 0 \}$

定理 (5,1)

(X, ω_x) を Kähler, コンパクト多様体で, 正則シンプレクティック構造 ω を持つとする。$SV_X(E)^\circ = S(E)^\circ / GL(E)$ は, 非特異な複素多様体 (ただし Hausdorff でないかもしれない) になる。ω_X は $SV_X(E)^\circ$ 上の正則シンプレクティック構造を誘導する。

(小林 [5])

証明の概略を述べよう.

今, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ とすると $D_1 - D_2$ は $\mathcal{E}nd(E)$ 係数の $(0,1)$ 形式, よって $\mathcal{D}$ は $A^{0,1}(\mathcal{E}nd(E))$ を平行移動群としてもつアファイン空間である。別の言い方をすれば, $D \in \mathcal{D}$ おける接空間は $A^{0,1}(\mathcal{E}nd(E))$ と同型である。ω を X 上のシンプレクティク構造とすれば, 双線形形式

$$\langle\ ,\ \rangle : A^{0,1}(\mathcal{E}nd(E)) \times A^{0,1}(\mathcal{E}nd(E)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \omega^n \wedge \bar{\omega}^{n-1}, \quad \dim X = 2n.$$

は, 非退化歪対称形式である。よって $\mathcal{D}$ はシンプレクティク構造をもつ.

$V = L^2_k(\mathcal{D})$, $G = L^2_{k+1}(GL(E))$, $\mathfrak{g} = L^2_{k+1}(\mathfrak{gl}(E)/\mathbb{C})$

を, $k > \dim X$ の時に対応するソボレフ空間をあらわす。

写像

$$\mu : V \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

を

$$\mu(D)(a) = -\int_X \mathrm{Tr}(a \cdot N(D)) \wedge \omega^n \wedge \bar{\omega}^{n-1}$$

で定義すると, これが無限次元版のモーメント写像になっている事 (§4) が容易に確かめられる。ここで, Marsden-Weinstein の方法によれば, $\mu^{-1}(0)/G$ には $\langle\ ,\ \rangle$ から導入されたシンプレクティク構造が入る事が示せるが, 残念ながら, G の action は proper でないので, そのままでは使

えない。$\mu^{-1}(0) = \{ D \in V \ ; \ N(D)=0 \}$ であるが，その開集合 $V' = \{ D \in \mu^{-1}(0) \ ; \ E^D$ is simple $\}$ をとると，G は V' に自由に作用している事がわかり，さらに適当な slice を取る事により，$SV_x^{\circ}(E) = \{ D \in V', \ H^2(X, End(E^D))=0 \}/G$ が複素多様体かつ，$\langle \ , \ \rangle$ から導かれたシンプレクティック構造を持つことがわかる。

注：小林氏の定理は，正則単純ベクトル束 E に対して

$$\begin{array}{ccccc} \langle \ , \ \rangle : H^1(X, \mathcal{E}nd(E)) & \times & H^1(X, \mathcal{E}nd(E)) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \alpha & , & \beta & \longmapsto & \int Tr(\alpha \circ \beta) \wedge \omega^n \wedge \bar{\omega}^{n-1} \end{array}$$

(ただし，ω は X の正則シンプレクティック構造)

を考える事によっても示すことができる。)

REFERENCES

[1] D. Gieseker, On the moduli of vector bundles on an algebraic surface, Ann. of Math., 106 (1977). 45-60.

[2] M. Itoh, The moduli space of Yang mills connections over a Kahler surface is a complex manifold, Osaka J. Math., 22 (1985), 845-862.

[3] ______, Quaternion structure on the moduli space of Yang-Mills connections, preprint.

[4] S. Kobayashi, Curvature and stability of vector bundles, Proc. Japan Acad. 58 (1982), 158-162.

[5] ______, Simple vector bundles over symplectic Kahler manifolds, Proc. Japan Acad., 62 (1986), 21-24.

[6] J. Marsden and A. Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, Reports on Math. Physics 5 (1974), 121-130.

[7] M. Maruyama, Moduli of stable sheaves I, J. Math. Kyoto Univ., 17(1977), 91-126. II, J. Math. Kyoto Univ., 18 (1978). 557-614.

[8] S. Mukai, Symplectic structure of the module space of sheaves on an abeian or K3 surface. Inv. Math.. 77 (1984). 101-116.

[9] ______, K3 曲面上のベクトル束のモジュライとシンプレクティク多様体，"数学" 掲載予定

[10] Y.T. Siu, and G. Trautman. Deformations of coherent analytic sheaves with compact supports, Memoirs of Amer. Math. Soc. 238(1981).