On Nagata's example of an infinitely generated ring of invariants

向井 茂 (MUKAI, Shigeru) *

永田は[8]において，偶数変数多項式環へのベクトル群 $\mathbf{C}^n$ の標準的なべき単作用

$$(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{C}^n \curvearrowright \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] =: S$$

$$\begin{cases} x_i \mapsto x_i \\ y_i \mapsto y_i + t_i x_i \end{cases}, \quad 1 \le i \le n \tag{1}$$

の余次元３部分空間 $G \subset \mathbf{C}^n$ への制限を考察した．そして，$n = 16$ で G が一般のときに不変式環 S^G が有限生成でないことを示した．（$\dim G = 13$）筆者は[5]第２章において，その議論を改良して $n = 9$ のときにも有限生成でないことを示した [1]（$\dim G = 6$）．本稿ではこれにいくつかの注意を与えるとともに（§4），さらに進めて次を示したい．

定理 1 18変数多項式環への作用（１）の一般の３次元部分空間 $G \subset \mathbf{C}^9$ に関する不変式環 S^G も有限生成でない．

代数群の多項式環への線型作用に対する不変式環の有限生成性は Hilbert の第14問題と呼ばれる．定理より加法群 $\mathbf{G}_a$ の３個の直積に対してこの答は否定的である．一方，$\mathbf{G}_a$ 自体に対して答は肯定的である（Weitzenböck の定理[15][12]）．[2] よって加法群の直積に対する第14問題では次が未解決で残っている．[3]

問題 $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$ の多項式環への線型作用に対して不変式環は有限生成か？ [4]

---

*Supported in part by the JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (A) (2) 10304001.

[1]講演の後（１０月１５日）に同様のこと（$n = 9, \dim G = 6$）が Steinberg 氏 [14] によって既になされていたことを寺西氏に教えていただいた．この場を借りて訂正し感謝する．

[2]$\mathbf{G}_a$ の線型でない作用に対する反例についてはRoberts[11]を見よ．

[3]Hilbert 自身の創始した方法でもって、簡約代数群に対しては肯定的である．例えば，拙著[5]を参照されたい．

[4]講演の際にも報告したが，作用（１）の２次元部分空間 G に関する不変式環は有限生成である．これ以外にも自明でない肯定的例があるが，ここでは扱わない．

一般に作用（1）を余次元 r の部分空間Gへ制限したものの不変式環 S^G に対しては3本足の n 頂点 Dynkin 図形 $T_{2,r,n-r}$[5]

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & r & & & n-r & & & \\
\circ & & \circ---\circ & & \circ---\circ & & \circ & & \circ(\quad \times) \\
 & & & \circ & & & & &
\end{array}
$$

のルート系が対応する．よく知られているように，これの Weyl 群は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r} \leq 1 \tag{2}$$

のときに無限群になる．そして，G が一般なときこのせいで不変式環 S^G が有限生成でなくなる．定理はこのなかで $\dim G = n-r$ が最小になる場合である．また，(2) において等号の成立する次の3つの場合（アフィンDynkin図形）の一つである．

(n,r)	(9,3)	(9,6)	(8,4)
$\dim G = n-r$	6	3	4
Dynkin 図形[6]	$\tilde{E}_8$	$\tilde{E}_8$	$\tilde{E}_7$
幾何	$\mathbf{P}^2$の9点爆発	$\mathbf{P}^5$の9点爆発	$\mathbf{P}^3$の8点爆発

無限生成環には病的なイメージをいだくかもしれないが，ここで扱うのは楕円曲線 C 上の2点 p, q からえられる2重次数付環

$$\bigoplus_{m,n\in\mathbf{Z}} H^0(C, \mathcal{O}_C(mp+nq))$$

のように幾何的に自然なものである．これは直線束 $\mathcal{O}_C(p-q) \in \mathrm{Pic}^0\, C$ が位数無限ならば有限生成でない．[7]実際，2重次数付環としての台は

$$\{m+n>0\} \cup \{(0,0)\} \subset \mathbf{Z}^2$$

[5]図には対応する表現を示すために頂点 × を追加したもの（拡大 Dynkin 図形）を書いた．Weyl 群がレベル1の不変式の全体にどう「作用」するかを表す．

[6]最初の2つはは同じ Dynkin 図形であるが，拡大 Dynkin 図形は異なる．

[7]この例はRees [10]以来いろんな所に顔を出している．

で，半群として有限生成でない．よってこの環は有限生成でない．[8]

1 永田同型

余次元 r の部分空間 $G \subset \mathbf{C}^n$ がr個の斉次１次方程式系

$$\sum_{i=1}^n a_i^{(1)} t_i = \sum_{i=1}^n a_i^{(2)} t_i = \cdots = \sum_{i=1}^n a_i^{(r)} t_i = 0 \tag{3}$$

で定義されているとしよう．定義式の変数t_iに y_i/x_i を代入してえられる r 個の有理式

$$\sum_{i=1}^n a_i^{(1)} \frac{y_i}{x_i}, \quad \sum_{i=1}^n a_i^{(2)} \frac{y_i}{x_i}, \ldots, \sum_{i=1}^n a_i^{(r)} \frac{y_i}{x_i}. \tag{4}$$

は G 不変である．S を $x_1, \ldots, x_n$ で局所化した環

$$\mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, y_1, \ldots, y_n] = \mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, \frac{y_1}{x_1}, \ldots, \frac{y_n}{x_n}]$$

に $(t_1, \ldots, t_n) \in G$ は

$$\frac{y_i}{x_i} \mapsto \frac{y_i}{x_i} + t_i$$

で作用する．[9] よって，局所化した作用の不変式環は $\mathbf{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ 上（4）で生成されている．これらに単項式 $\prod_1^n x_i$ を掛けて分母を払ってえられる不変式 $J^{(1)}(x, y), \ldots, J^{(r)}(x, y)$ で生成されるS^Gの部分（多項式）環を R とする．問題は $R[x_1, \ldots, x_n] \subset S^G$ の差であるが，これが幾何的に記述できる．[10]

---

[8] この環はアフィン Dynkin 図形 $\tilde{A}_1 \circ = \circ$ に関係する（§4 を参照せよ）.

[9] $x_1, \ldots, x_n$ は不変式だからこれは可能である.

[10] 講演で話したように，$r = 1$の場合に両者は一致する.

まず,

$$S^G = S[x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}]^G \cap S = R[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}] \cap S \qquad (5)$$

に注意しよう．$J^{(1)}(x,y), \ldots, J^{(r)}(x,y)$ の線型結合で 単項式$y_1 \prod_{i=2}^n x_i$ を含まないものが $(r-1)$ 次元ある．これらで生成される R のイデアルを I_1, 同様に $I_2, \cdots, I_n$ を定める．I_1 に属するものは x_1 で割ることによって不変（多項）式がえられる．より一般に，共通部分

$$I_1^{b_1} \cap \cdots \cap I_n^{b_n}, \quad (b_1, \ldots, b_n \geq 0)$$

に属するものは単項式 $x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ で割ることにより不変式がえられる．あと少しの議論と（5）より次をえる．

命題 2 ([8], [7]) 不変式環 S^G は拡大多重Rees環

$$R[x_1, \ldots, x_n] + \sum_{b_1, \ldots, b_n \geq 0} (I_1^{b_1} \cap \cdots \cap I_n^{b_n}) x_1^{-b_1} \cdots x_n^{-b_n} \subset R[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$$

と一致する．

$J^{(1)}(x,y), \ldots, J^{(r)}(x,y)$ を斉次座標とする射影空間 $\mathbf{P}^{r-1} = \operatorname{Proj} R$ を考えよう．上で定義したイデアル $I_i, 1 \leq i \leq n$, は点

$$p_i := (a_i^{(1)} : a_i^{(2)} : \cdots : a_i^{(r)}) \in \mathbf{P}^{r-1}$$

で消える多項式の全体である．以下，これらの n 点は相異なるとしよう．そして $p_1, \ldots, p_n$ を中心とする爆発

$$\pi : X = X_G \longrightarrow \mathbf{P}^{r-1}$$

を考える．X_G の同型類は G の定義式（3）によらない．$(r-1)$ 次元射影的非特異代数多様体で，これの Picard 群は超平面の引き戻し h と例外因子 e_i を基底とする階数 $n+1$ の自由アーベル群である．

さて，すべての直線束の大域切断の空間の直和

$$\bigoplus_{a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(ah - b_1 e_1 - \cdots - b_n e_n)) \simeq \bigoplus_{L \in \operatorname{Pic} X} H^0(X, L) \quad (6)$$

は環になる．これを X の全座標環（total coordinate ring）と呼び，$\mathcal{TC}(X)$ で表す．今の場合，$\mathcal{TC}(X)$は上の拡大 Rees 環に同型である．より正確にはそれに R の自然な次数付けを加えて $n+1$ 重次数付環にしたものである．

命題 3 不変式環 S^G は爆発 X_G の全座標環 $\mathcal{TC}(X_G)$ と同型である．[11]

2　不変式のレベル

作用（1）は線型作用なので多項式の全次数を保つ．よって不変式環は全次数でもって次数付けられている．また $f(x,y)$ が G不変式なら，

$$\begin{aligned} & f(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n, y_1+\alpha t_1 x_1,\ldots,y_n+\alpha t_n x_n) \\ = \ & f(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n, y_1,\ldots,y_n) \end{aligned}$$

が成立する．よって，$f(\alpha x,y)$ も G不変式である．これより S^G は x に関する次数と y に関する それで 2 重に次数付けられている．

定義 $2n$変数多項式 $f=f(x,y)\in S$ に対して

$$l(f) := \deg_x f - (\dim G - 1)\deg_y f \in \mathbf{Z}$$

を f のレベルと言う。

例（1）$x_1,\ldots,x_n$ はレベル 1 の不変式である．

（2）前節の不変多項式 $J^{(1)}(x,y),\ldots,J^{(r)}(x,y)$ は，x に関して $n-1$ 次，y に関して線型である．よって，レベルは G の余次元 r に等しい．

命題3の同型で $J^{(1)}(x,y),\ldots,J^{(r)}(x,y)$ は $H^0(X,\mathcal{O}_X(h))$ の元に，x_i は $H^0(X,\mathcal{O}_X(e_i))$ にうつる．よって次をえる．

補題 4 $H^0(X,\mathcal{O}_X(ah-b_1e_1-\cdots-b_ne_n))$ にうつる不変式 $f\in S^G$ に対して次が成立する．

$$l(f) = ra - \sum_{i=1}^n b_i, \quad a=\deg_y f$$

3　定理の証明の概略

楕円曲線 $\mathbf{C}/\Gamma, \Gamma=\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$, を 6 次の完備線型系，例えば $\wp$関数とのその高次導関数，による射

$$\mathbf{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbf{P}^5, \quad z\mapsto (1:\wp(z):\wp'(z):\cdots:\wp^{(\mathrm{v})}(z))$$

でもって $\mathbf{P}^5$ に埋め込み，それの像を C ，9 点 $c_1,\cdots,c_9\in\mathbf{C}$ の像を $p_1,\ldots,p_9\in C$ とおく．また，$\mathbf{C}^9$の 3 次元部分空間を

$$G = \left\{ (t_1, \ldots, t_9) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{9} t_i = \sum_{i=1}^{9} \wp(c_i) t_i = \cdots = \sum_{i=1}^{9} \wp^{(\mathrm{v})}(c_i) t_i = 0 \right\}$$

と定める．次が定理１のより精密な形である．

定理 5 $c_1, \cdots, c_9 \in \mathbf{C}$ はΓ を法として $\mathbf{Z}$ 上１次独立，すなわち，

$$\mathbf{Z}^9 \longrightarrow \mathbf{C}/\Gamma, \quad (b_1, \ldots, b_9) \mapsto \sum_{i=1}^{9} b_i c_i, \quad \text{は単射} \tag{7}$$

と仮定する．このとき，作用 $G \curvearrowright \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_9, y_1, \ldots, y_9]$ の不変式環は有限生成でない．

§1 を復習しよう．不変有理式

$$\sum_{i=1}^{9} \frac{y_i}{x_i}, \quad \sum_{i=1}^{9} \wp(c_i) \frac{y_i}{x_i}, \quad \sum_{i=1}^{9} \wp'(c_i) \frac{y_i}{x_i}, \ldots, \sum_{i=1}^{9} \wp^{(\mathrm{v})}(c_i) \frac{y_i}{x_i}.$$

に単項式 $\prod_1^9 x_i$ を掛けて分母を払ったものが$J^{(1)}(x, y), \ldots, J^{(6)}(x, y) \in S^G$ で，これらで生成される部分環が R である．そして，拡大 Rees 環

$$R[x_1, \ldots, x_9] + \sum_{b_1, \ldots, b_9 \geq 0} (I_1^{b_1} \cap \cdots \cap I_9^{b_9}) x_1^{-b_1} \cdots x_9^{-b_9} \subset R[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_9^{\pm 1}]$$

と不変式環 S^G が一致する．

言い換えると S^G は $\mathbf{P}^5$ の９点 $p_1, \ldots, p_9$ を中心とする爆発 X の全座標環 $\mathcal{TC}(X)$ と同型であるが，今の場合，９点の取り方より C（またはそれの X における固有変換）に制限する環準同型写像

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{TC}(X) & \longrightarrow & \mathcal{TC}(C; p_1, \ldots, p_9) \\ \| & & \| \\ S^G & & \bigoplus_{a, b_1, \ldots, b_9 \in \mathbf{Z}} H^0(C, \mathcal{O}_C(a) \otimes \mathcal{O}_C(-\sum_{i=1}^{9} b_i p_i)) \end{array} \tag{8}$$

が考えられる．補題4よりレベル l の不変式は C 上の次数 l の直線束の大域切断にうつる．

さて，無限個の不変式の構成について簡単に述べる．

定義 不変式の$r(\geq 2)$次元空間$V\subset S^G$とr個の零でない不変式$f_1,\ldots,f_n\in S^G$の組 $(V;f_1,\ldots,f_r)$ は，すべての添字集合 $I\subset\{1,\ldots,r\}$ に対して，V の元で $\prod_{i\in I}f_i$ で割り切れるものの全体のなす部分空間の余次元が I の元の個数に等しいときに裏返し可能と言う．

このような組が与えられたとき，$(r-1)$個の積 $f_1\cdots\check{f}_i\cdots f_r$ で割り切れる V の元が定数倍を除いて一意に定まる．これを g_i としよう．これら全ての積 $g_1\cdots g_n$ は積 $f_1\cdots f_r$ の $(r-1)$乗で割り切れる．また，一個を除いた積 $g_1\cdots\check{g}_i\cdots g_r$ は $f_1\cdots f_r$ の $(r-2)$乗で割り切れる．そこで，これらの商

$$\frac{g_1\cdots\check{g}_i\cdots g_r}{(f_1\cdots f_r)^{r-2}},\quad 1\leq i\leq n$$

で生成される S^G の部分空間を V' とおく．このとき，V' と

$$\frac{g_i}{f_1\cdots\check{f}_i\cdots f_r},\quad 1\leq i\leq r \tag{9}$$

の組を $(V;f_1,\ldots,f_r)$ の裏返しという．なお，$n\geq r=\dim V$ ときの $(V;f_1,\ldots,f_n)$ が裏返し可能とは，r個の添字集合 $I\subset\{1,\ldots n\}$ すべてに対して $(V;f_i,i\in I)$ が裏返し可能と定める．また，$(V;f_1,\ldots,f_n)$ の $f_1,\ldots,f_r$ に関する裏返しとはV'と（9）ともとのままの $f_i,\,r+1\leq i\leq n,$ の組を言う．他の添字集合 I に対しても同様である．

定理の証明では$r=6,n=9$とする．$J^{(1)}(x,y),\ldots,J^{(6)}(x,y)$の生成する$S^G$の6次元部分空間$V$と当り前の不変式$x_1,\ldots,x_9$の組$(V;x_1,\ldots,x_9)$が裏返し可能である．これを$x_1,\cdots,x_6$で裏返したものを$(V^{(1)}:f_1^{(1)},\cdots,f_9^{(1)})$とする．このとき，これも裏返し可能である．$f_1^{(1)},\cdots,f_6^{(1)}$ で裏返すともとに戻ってしまうので，それ以外の6つ組でもって裏返す．こういうことをくり返していく．[12] 何回も裏返しが可能なのことや，えられる不変式の C への制限が零でないことは（7）で保証される．このようにしてえられる $(V^{(i)}:f_1^{(i)},\ldots,f_9^{(i)})$ において，$V^{(i)}$ のレベルはいつも6で，9個の不変式 $f_1^{(i)},\ldots,f_9^{(i)}$ はレベル1で保たれる．一方，いつも y次数の小さい順に6個を選んで裏返しをするようにしておくと，$f_1^{(i)},\ldots,f_9^{(i)}$ の y次数の最大は着実に増加していく．補題4よりこれらは $\mathcal{TC}(C;p_1,\ldots,p_9)$の無限個の相異なるレベル1直和成分にうつる．一方，仮定（7）より $\mathcal{TC}(C\,;p_1,\ldots,p_9)$ のレベル0部分は定数しかない．よって，不変式環 S^G の C への制限写像（8）による像は有限生成でない．特に，S^G自身も有限生成でない．

[12]$(V;x_1,\ldots,x_9)$ に添字の置換と裏返しでもってWeyl群 $W(\tilde{E}_8)$を作用させると言うこともできる．

4　余次元３の場合についての注意

全座標環 $\mathcal{TC}(X) \simeq \bigoplus_{L\in \mathrm{Pic}\, X} H^0(X,L)$ の多重次数付環としての台

$$\{L \in \mathrm{Pic}\, X \mid H^0(X,L) \neq 0\}$$

は効果的因子（effective divisor）全体のなす半群 Eff X であることに注意しよう．これが半群として有限生成でなければ，環 $\mathcal{TC}(X)$ も有限生成でない．定理 1 は Weyl 群の作用を使ってこの半群が有限生成でないことを示すという方針で証明できる．しかし，前節では先に不変式環を楕円曲線に制限する方法を紹介した．ちなみに裏返しは $\mathbf{P}^5$ の双有理変換

$$\mathbf{P}^5 \cdots \to \mathbf{P}^5, \quad (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6) \mapsto (\frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} : \frac{1}{x_4} : \frac{1}{x_5} : \frac{1}{x_6})$$

に対応する．

　この節では G が余次元 3 の場合について 2 つの注意を与える．$X = X_G$ は射影平面 $\mathbf{P}^2$ の n点

$$p_i = (a_i^{(1)} : a_i^{(2)} : a_i^{(3)}), \quad 1 \leq i \leq n$$

での爆発である．これは曲面なので半群 Eff X を直接扱うことが容易である．例えば，次が成立する．

補題 6 C は X 上の既約曲線で自己交点数は負，$(C^2) < 0$，とする．このとき，C の線型同値類 $[C]$ は半群 Eff X のどんな生成系にも属する．

証明．C が二つの効果的因子の和 $C_1 + C_2$ と線型同値だとする．このとき，

$$(C.C_1) + (C.C_2) = (C^2) < 0$$

である．よって，C_1, C_2 のどちらかは C を既約成分として含み，他方は零である．♢

　特に，第 1 種例外曲線

$$C \simeq \mathbf{P}^1, (C^2) = -1 \tag{10}$$

はこの Eff X の生成系に属するので，命題2より次をえる．

命題 7 曲面 X_G 上に無限個の第 1 種例外曲線が存在するなら，不変式環 S^G は有限生成でない．

一方，点が９個以上で一般の位置にあるとき，X 上に無限個の第１種例外曲線があることが永田[9]により示されている．よって，$n \geq 9$ で余次元３の $G \subset \mathbf{C}^n$ が一般のとき，S^G は有限生成でない．これが第１の注意である．

なお，半群 $\mathrm{Eff}\, X$ の３次元空間

$$\tilde{A}_1 = \{a(3h - \sum_{i=1}^{9} e_i) - me_8 - ne_9\}$$

による切口は下図のとおりである．レベル l は $m+n$ に等しく，それが０の $3h - \sum_{i=1}^{9} e_i$（反標準因子）とレベル１平面内の放物線上の無限個の第１種例外曲線

$$(m^2+m)(3h - \sum_{i=1}^{9} e_i) - me_8 + (m+1)e_9, \quad m \in \mathbf{Z}$$

とで生成される．

半群 $\mathrm{Eff}\, X$

[5]（や[14]）の証明はこの論法ではない．[8]に従って８次元乗法群のさらなる作用

$$T = \left\{ (d_1, \ldots, d_9) \in \mathbf{C}^9 \;\middle|\; \prod_{i=1}^{9} d_i = 1 \right\} \curvearrowright S \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_i \mapsto d_i x_i \\ y_i \mapsto d_i y_i \end{array} \right. , \quad 1 \leq i \leq 9$$

を考え，より小さな不変式環

$$S^{G\cdot T} \simeq \bigoplus_{a,b\in\mathbf{Z}} H^0(X_G, \mathcal{O}_X(ah - b(e_1 + \cdots + e_n)))$$

が有限生成でないことを示すものである．こちらの利点は環 $S^{G\cdot T}$ の次元（=4）が最小になることである．

さて，9点 $p_1, \ldots, p_9 \in \mathbf{P}^2$ が3次曲線のペンシル

$$\Lambda : \lambda_1 f_1(x,y,z) + \lambda_2 f_2(x,y,z) = 0$$

の基点集合である場合を考えよう．これは無限個の例外曲線の存在がよく見える場合である．もちろん特別な場合はそうでないことによく注意しておこう．

例　Hesse ペンシル

$$\lambda_1(x^3 + y^3 + z^3) - 3\lambda_2 xyz = 0$$

の基点を爆発した曲面 X 上には9個しか例外曲線がない．

ペンシルは X の楕円ファイバー付け $f = \Phi_{|-K_X|} : X \to \mathbf{P}^1$ を与える．同伴公式より（10）は $C \simeq \mathbf{P}^1, (C.-K_X) = 1$ と同値である．よって，X 上の第1種例外曲線は射 f の切断に外ならない．どれかひとつを選んで原点とみなすことにより全体はアーベル群になる．これを Mordell-Weil 群（より精密にはMW格子[13]）と呼ぶ．Mordell-Weil 群は（負定値）E_8 格子

$$E_8 = \{\alpha = ah - \sum_1^8 b_i e_i \,|\, 3a - \sum_1^8 b_i = 0\} \subset \operatorname{Pic} X, \quad \begin{cases} (h^2) = 1 \\ (e_i^2) = -1 \end{cases}$$

の効果的なルートの全体

$$\{\alpha \in E_8 \,|\, (\alpha^2) = -2, H^0(X, \mathcal{O}_X(\alpha)) \neq 0\}$$

（f の可約ファイバーと言っても同じ）で生成される部分群による剰余群と同型である．一般には無限群で，不変式環 S^G は有限生成でない．

それに引き換え，4次元不変式環 $S^{G\cdot T}$ は5変数多項式環 $\mathbf{C}[u_1, u_2, x, y, z]$ の主イデアル $(u_1 f_1(x,y,z) + u_2 f_2(x,y,z))$ による剰余環になる．とくに，有限生成である．これまでの例では $S^{G\cdot T}$ が有限生成でなかった．これが第2の注意で，S^G が有限生成でなくなるのには2つの原因がある．

前節では$G = \mathbf{G}_a^3$ に対する S^G の非有限生成性を示したが，小さい方の不変式環 $S^{G\cdot T}$ に対してもそれが示せる．しかし，それには $\mathbf{P}^5$ の 9 点爆発自体ではだめでそれの極大モデル[13]にうつる必要がある．これはこれで面白いが，準備が必要なのでここでは略した．

5　最後に

代数群 $\mathbf{G}_a$ の m変数多項式環 $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_m]$ への線型作用は m次べき零行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ と対応する．そして，不変式はAに付随する偏微分方程式

$$\partial_A f := \sum_{1\le i,j\le m} a_{ij} z_i \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0$$

の解である．よって，序文の問題は次のように言い替えられる．

問題　可換なべき零行列の対A, Bに対する不変式環，すなわち，∂_A と ∂_B の共通定数環

$$\{f(z) \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_m] \,|\, \partial_A f = \partial_B f = 0\}$$

は有限生成か？

不変式環の有限生成性を示す技術は Hilbert の論文[4]からあまり進展していない．[14] 何か新しい肯定的な技術開発の契機になればと提出する次第である．

参考文献

[1] Dolgachev, I.: Weyl groups and Cremona transformations, Proc. Symp. Pure Math. **40**(1983), 283–294.

[2] —— and Ortland, D.: Point sets in projective spaces and theta functions, Astérisque, **165**(1988).

[3] Du Val, P.: On the Kantor group of a set of points in a plane, Proc. London Math. Soc. **42**(1932), 18–51.

[13]反標準因子が nef になるモデルのこと．極小モデルが標準因子を nef にすることをもじった．公式用語ではない．

[14]例えば Hilbert の原論文の解説を試みた拙稿[6]§4 を参照されたい．

[4] Hilbert, D.: Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann., **36** (1890), 473–534.

[5] 向井　茂:：モジュライ理論１，岩波書店，1998年.

[6] ——：不変式とモジュライ，数学のたのしみ，**28**巻，2001年12月，日本評論社，pp. 29–41.

[7] Mukai, S.: Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group, RIMS preprint, **1343**(2001).

[8] Nagata, M.: On the fourteenth problem of Hilbert, Int'l Cong. Math., Edingburgh, 1958.

[9] ——: On rational surfaces, II, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A, **33**(1960), 271–293.

[10] Rees, D.: On a problem of Zariski, Illinois J. Math. **2**(1958), 145–149.

[11] Roberts, P.: An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's 14th problem, J. Algebra, **132**(1990), 461–473.

[12] Seshadri, C.S.:On a theorem of Weitzenböck in invariant theory, J. Math. Kyoto Univ., **1**(1962), 403–409.

[13] Shioda, T.: Mordell-Weil lattices and Galois representation, I, II, III, Proc. Japan Acad. **65A**(1989), 267–271, 296–299, 300-303.

[14] Steinberg, R.: Nagata's example, in '*Algebraic Groups and Lie Groups*', Austral. Math. Soc. Lect. Ser. **9**, Cambridge Univ. Press, 1997, pp. 375–384.

[15] Weitzenböck, R.: Über die Invarianten von Linearen Gruppen, Acta. Math., **58**(1932), 230–250.

〒606-8502
京都市左京区北白川追分町
京都大学数理解析研究所
mukai@kurims.kyoto-u.ac.jp