代数曲面と対称性ー K3 曲面と多面体を中心にしてー

玉城教授記念講演会

向井 茂

2019 年 1 月 18 日（金）

テーマと文献

主題：$K3$ 曲面の対称性と有限単純群の（いくつかの）関係

参考にした文献

[R] Mark Ronan, Symmetry and the monster: one of the greatest quests of mathematics, 2006, Oxford Univ. Press.
（邦訳「シンメトリーとモンスター 数学の美を求めて」）

[K] E. Kummer, Über die Flm̈achen vierten Grades mit sechzehn singulärten Punkten, Monat. d. König. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1864.
（16 個の特異点をもつ 4 次曲面について）

$K3$ 曲面

K3 (=Kummer+Kähler+小平) $\Leftrightarrow$ 正則 symplectic 構造 ($\exists$ 何処でも消えない正則微分 2 形式 ω_X) と単連結性 $\pi_1(X) = 0$.

例 4 次曲面 $X : F_4(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}^3$.

例の例 Fermat 型 $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0$.

要注意 対称性を重んじて射影空間 $\mathbb{P}^3$ の斉次座標 $(x : y : z : t)$ を用いている.
どれかを 1、例えば $(x : y : z : 1)$ として通常の座標 (x, y, z) と同一視して、通常の定義式．Fermat 型の場合だと
$x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 0$.
（このアフィン曲面に無限遠曲線を付加したもの.）

$K3$ 対 Mathieu 群 M_{23}

再掲：K3 (=Kummer+Kähler+小平) $\Leftrightarrow$ 正則 symplectic 構造と単連結性 $\pi_1(X) = 0$.（再掲終）

定理 (M. 1988) 有限群 G に対して次は同値.
(1) G は symplectic に K3 曲面に作用できる（ある K3 曲面の symplectic 対称性を与える）.
(2) G は M_{23} の部分群で（作用域 Ω_{23} 上に）4 個以上の軌道をもつ.

例 位数 384 の群 F が Fermat 4 次曲面

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0$$

に symplectic に作用.
$F \simeq (C_4)^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ は M_{23} の部分群で長さ 1, 2, 4, 16 の 4 軌道をもつ.

群の名前

- 巡回群 C_n（加法的には $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$）
- n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$：置換 $\sigma : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$ 全体（写像の合成で群）、位数 $n!$
- 置換群=（対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群）
- 交代群 $\mathfrak{A}_n$：偶置換の全体、位数 $n!/2$

例（再掲）位数 384 の群 F が Fermat 4 次曲面

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0$$

に symplectic に作用.
$F \simeq (C_4)^2 \rtimes \mathfrak{S}_4$ は M_{23} の部分群で長さ 1, 2, 4, 16 の 4 軌道をもつ.

注意
C_4 は座標に $\pm 1, \pm\sqrt{-1}$ を掛ける操作．$\mathfrak{S}_4$ は座標の置換.
symplectic $\Leftrightarrow$ 行列式 1 の線形変換で定義多項式を保つ

M_{23} の前に単純群について少し

- 5 次以上の一般の方程式は根号で解けない.
  証明のアイデアは群の言葉への「翻訳」
- 方程式 $\Rightarrow$ ガロア群
  根号（n 乗根）で解く $\Rightarrow$ 巡回群 C_n
- 一般の n 次方程式のガロア群は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$.
  $n \geq 5$ のとき、巡回群を成分とする組成列をもたない.
- より強く、交代群 $\mathfrak{A}_n$, $n \geq 5$ は単純群（非自明な正規部分群をもたない）

有限単純群の分類（Mathieu まで）と $K3$

1. 素数位数巡回群 C_n,
2. 5 次以上の交代群 $\mathfrak{A}_n$, $n \geq 5$,
3. Lie 型の有限単純群、例えば、$PSL(2, \mathbb{F}_q)$（q は素数冪）,
4. 26 個の散在型
   4.1 19c. Mathieu 群 M_k, $k = 11, 12, 22, 23, 24$.
   M_{12}, M_{24} は Ω_{12}, Ω_{24} 上の 5 重可移（置換群）

$$|M_{12}| = 12 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7, \ |M_{24}| = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 48$$

   （M_{24} は Steiner 系 $\mathfrak{S}(4, 8, 24)$ を保つ．Golay 符号と等価.）
   4.2 $\cdots$（100 年近く空く）

「**定理**（再掲） G は symplectic に K3 曲面に作用できる $\Leftrightarrow$ M_{23} の部分群で 4 個以上の軌道をもつ.」

の M_{23} はこの Mathieu 群（M_{24} の 1 点での安定化部分群）

有限単純群の分類（続）

1. 素数位数巡回群 C_n,
2. 5 次以上の交代群 $\mathfrak{A}_n$, $n \geq 5$,
3. Lie 型の有限単純群、例えば、$PSL(2, \mathbb{F}_q)$（q は素数冪），
4. 26 個の散在型
   - 4.1 19c. Mathieu 群 M_k, $k = 11, 12, 22, 23, 24$. Steiner 系を保つ置換全体.
   - 4.2 20c. '66 J_1
   - 4.3 '68 $J_2 = HJ$. Hall-Janko 群. パラメータ $(\nu, \kappa, \lambda, \mu) = (100, 36, 14, 12)$ の強正則グラフを保つ置換全体.
   - 4.4 '69 HS Higman-Sims 群. 作用域 Ω_{100} は 100 頂点グラフ. パラメータ $(100, 22, 0, 6)$ の強正則グラフを保つ置換全体.
   - 4.5 $\cdots$

話変わって、Ernst Kummer (1810–93)

1864 年の論文は次のようにはじまる．

「Fresnel の波曲面は 4 次曲面で 16 個の特異点をもつ．そのうちの 4 個は実で主平面上にあり、8 個は虚で別の 2 枚の主平面上にある．そして、残りの 4 特異点は無限遠平面上にある．このように 16 個の特異点をもつ 4 次曲面が実際に存在することがわかる．しかし、4 次曲面は 16 個より多くの特異点をもつことはできない．」

特殊な形の 4 次曲面 $\phi^2 + 16Kxyzt = 0$ から出発して 16 個の特異点をもつ 4 次曲面の一般型を求めている．ただし、

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2a(xt + yz) + 2b(yt + xz) + 2c(zt + xy).$$

（K, a, b, c は定数、パラメータ.）

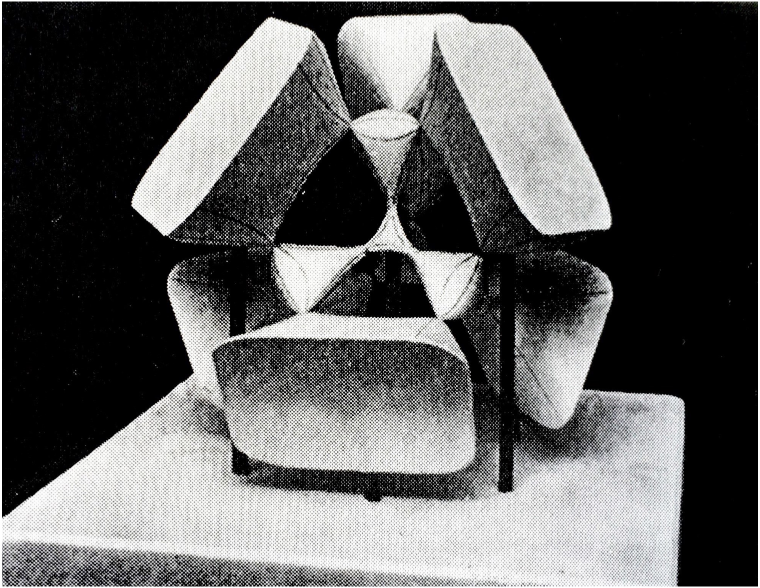


Figure: Kummer 4 次曲面

Kummer 4 次曲面（続）

射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の特殊な 4 次曲面（再掲）$X : \phi^2 + 16Kxyzt = 0$
この 4 次曲面は、4 面体 $xyzt = 0$ の各辺上に 2 個づつ．計 12 個の node（最も簡単な特異点、解析的に円錐の頂点）をもつ．
次が鍵．
「定数 K, a, b, c が条件 $K = -\det \begin{pmatrix} 1 & c & b \\ c & 1 & a \\ b & a & 1 \end{pmatrix}$ をみたすとき、X はさらに 4 個の node をもつ．」
この 4 次曲面が現在「Kummer quartic（4 次曲面）」と呼ばれている．
trope と呼ばれる 16 本の 2 次曲線がのっている．Kummer の (16_6) と呼ばれる有名な配置をなす．
Göpel 4 つ組:=4 個の node でどの 3 個も trope 上にないもの
その個数は 60 個．

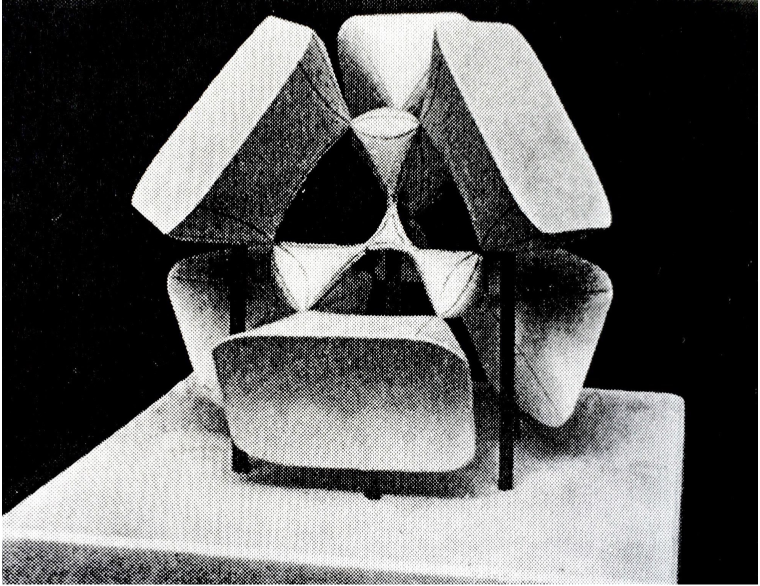


Figure: Kummer 4 次曲面（再掲）とその上の trope, 1

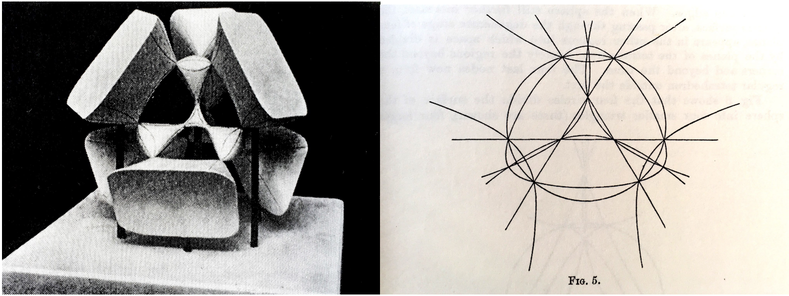


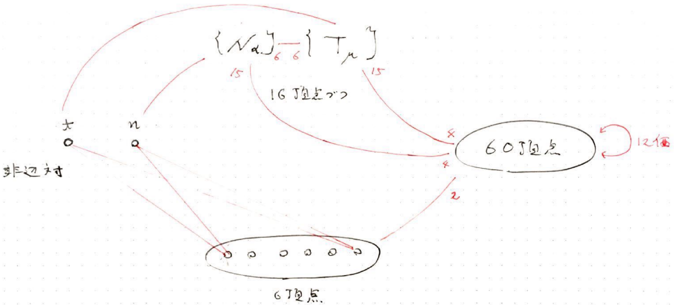
Figure: Kummer 4 次曲面（再掲）とその上の trope, 2

Kummer 対 Higman-Sims

再掲：Kummer 4 次曲面は 16 個の node と 16 本の trope をもって (16_6) 配置をなし、60 個の Göpel 4 つ組をもつ.

再掲：'69 *HS* Higman-Sims の散在型有限単純群はパラメータ $(\nu, \kappa, \lambda, \mu) = (100, 22, 0, 6)$ の強正則グラフ Ω_{100} に作用.

- V 1 頂点を中心に見た分解 100 = 1+22+77．第 2 成分 Ω_{22} は Mathieu 群 M_{22} の作用域.（第 3 成分は special hexads よりなる．）（階数 3 の置換群）
- E 1 辺を中心に見た分解 100 = 2 + 42 + 56．第 2 成分は 4 元体上の射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4)$ の 21 点と 21 直線の全体．第 3 成分の 56 頂点は Gewirtz グラフと呼ばれるもの. $(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4)$ の hyperovals の全体)
- NE 辺で結ばれない頂点対を中心に見た分解 100 = 2+6+32+60（非辺分解）．Kummer とそっくり!



$$(\nu, k, \lambda, \mu)$$
$$= (100,\ 22,\ 0,\ 6)$$

$$2 + \begin{matrix} 16+16 \\ 6 \end{matrix} + 60 = 100$$

$\boxed{\text{Higman−Sims グラフの非辺分解}}$ 11/24/18(土)

Kummer 4 次曲面の無限対称性

再掲：Higman-Sims グラフ Ω_{100} の非辺分解
$100 = 2 + 6 + 32 + 60$.
再掲：Kummer 4 次曲面は 16 個の node と 16 本の trope をもって (16_6) 配置をなし、60 個の Göpel 4 つ組をもつ.

定理 (S. Kondo '98) 一般の Kummer 4 次曲面の自己同型群（無限対称性）は次（の対称性）で生成される.

1. node と 2 重 2 次曲線（16 個づつ）に対応する 32 個の対合（位数 2 の対称性）
2. Göpel 4 つ組に対応する 60 個の対合.
3. Ω_{32} の Desargues 部分グラフに対応する 192 個の対合.
4. 初等アーベル群 2^5.

16 次元 Lobachevsky 空間（非ユークリッド空間）内の 316 面体が証明で用いられる．$(316 = 32 + 32 + 60 + 192)$

有限単純群の分類（続々）

1. 素数位数巡回群 C_n,
2. 5 次以上の交代群 $\mathfrak{A}_n$, $n \geq 5$,
3. Lie 型の有限単純群、例えば、$PSL(2, \mathbb{F}_q)$（q は素数冪）,
4. 26 個の散在型
   4.1 19c. Mathieu 群 M_k, $k = 11, 12, 22, 23, 24$.
   4.2 20c. '66 J_1
   4.3 '68 $J_2 = HJ$. Hall-Janko 群.
   4.4 '69 HS Higman-Sims 群.
   4.5 Leech 格子の等長変換群から新しいもの (Conway)
   HS 等はこの中に section として含まれる.
   4.6 $\cdots$（略）$\cdots$
   4.7 モンスター $\mathbb{M}$、最後に見つかった位数最大のもの

$$2^{46}3^{20}5^9 7^6 11^2 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \sim 8 \times 10^{57}$$

   4.8 $j(q) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots$ との不思議な関係
   (Monstrous Moonshine)
   4.9 $\cdots$

第 3 世代の K3 幾何学?

Q. 金銅 (Kondo) の定理の背景
A. 無限対称性は Leech 格子と Leech ルート系で決定される.

散在型単純群の第 1、第 2、第 3 世代.
Mathieu 群 — Leech 格子の等長変換群 – モンスター $\mathbb{M}$, Pariah ($\mathbb{M}$ に section として含まれない 6 個の例外群)

$K3$ はまだ Mathieu 群（第 1 世代）と Leech 格子（第 2 世代）のレベル.

Q. モンスターレベルの $K3$（曲面の）幾何はあるのか？それは何なのか?
第 3 世代の散在型単純群や Pariah は幾何に関係するのか？
追記：keyword: 頂点作用素代数 (VOA) Matheiw Moonshine（江口・大栗・立川）

ご清聴ありがとうございました!

不使用：さらなる例

再掲：**定理** (M. 1988) 有限群 G に対して次は同値.
(1) G は symplectic に K3 曲面に作用できる（ある K3 曲面の symplectic 対称性を与える）.
(2) G は M_{23} の部分群で（作用域 Ω_{23} 上に）4 個以上の軌道をもつ. (再掲終)

OK 位数 192 の群 H が symplectic に正 8 面体的 Kummer 4 次曲面

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)^2+16xyzt=0.$$

に作用. $H \simeq (C_2)^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ は M_{23} の部分群で長さ 3, 4, 8, 8 の 4 軌道をもつ.

Sch 位数 960 の群 M_{20} が symplectic に Schur 4 次曲面

$$x^4+y^4+z^4+t^4+16xyzt=0$$

に作用. M_{20} は M_{23} の部分群で長さ 1, 1, 1, 20 の 4 軌道をもつ.

Kl $x^3y+y^3z+z^3x+t^4=0 \cdots PSL(2,\mathbb{F}_7) \cdots$ 1,1, 7, 14 の 4 軌道.