

最も代数的な2つのK3曲面, EwM 第2講演

#2037

Vinberg 論文^{*)} "The two most algebraic
K3 surfaces", Math. Ann., 1983 の解説.
スワウーニク 年に目してそのから 異格の
説明.

12/7/19 (土)
10:30 - 11:15
中央大学 5533室

Kodaira (1915 - 1997) 楕円曲面論も有名

K3 曲面 = 格子 昨日の全全同語異演
= グラフ 今日

"2.6" も重要 $U \oplus H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$

(4, 20) (の) 格子, 拡大 K3 格子

$\cup \oplus$ (固定 Leech) $= \mathbb{Z} \oplus L \oplus \mathbb{Z}$

(1, 25) 拡大 Leech 格子

Leech 4-本

1983年 Conway 論文

1983年 Bonn, 7月2日

昨日の "§1. 4次曲面" の追加

猪瀬 の 4次曲面 (1977, 冬口止=ホ

報告集) $a, b \in \mathbb{C} \quad x^2 - y$

$$X_{a,b}: y^2 z + x - 4x^3 z + 3a x^2 - \frac{1}{2} (z^2 t^2 + t^4 + b z t^3) = 0$$

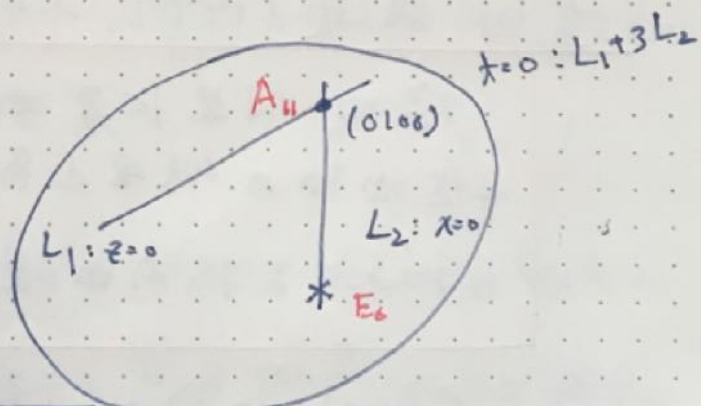
$\subset \mathbb{P}^3$

2 直線を含む $L_1: z = t = 0$ と $L_2: x = t = 0$

2 個の特異点

$$(0, 1, 0, 0) = L_1 \cap L_2$$

$$(0, 0, 1, 0) \in L_2$$



*) 1989年 UCLA 滞在中心で... $x \in \mathbb{C}$ の間には K3 曲面
の II 型退化の分類. Vinberg-Kepelman による方向の興味がある.

(0100) a 附近像 $y=1$, $A^p(x, z, t)$ #2038

$$zt - 4x^3 z + 3axt^2 - \frac{1}{2}(z^2 t^2 + t^4) + bzt^3 = 0$$

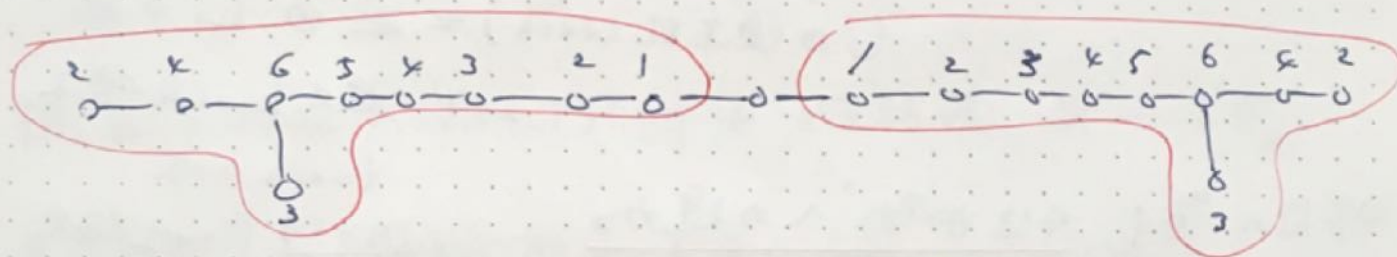
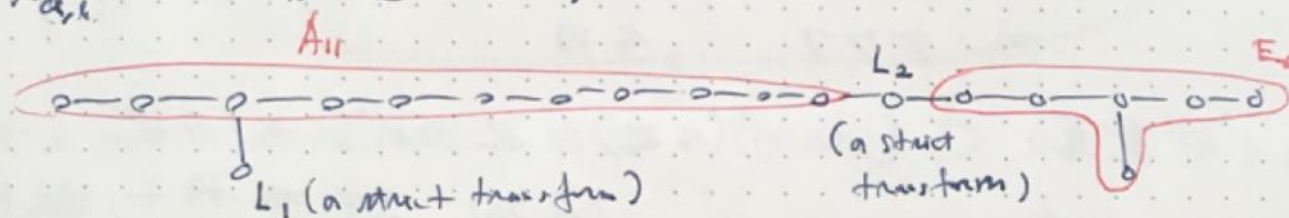
$$\sim zt + \tilde{x}^{12} = 0 \quad A_{11} \text{型有理2重点}$$

(0010) a 附近像 $z=1$, $A^3(x, y, t)$

$$-\frac{1}{2}t^2 - 4x^3 + 6t^3 + y^2 t + (4\text{项})$$

$$\sim \tilde{x}^2 + \tilde{x}^3 + \tilde{y}^4 \quad E_6 \text{型有理2重点}$$

$\tilde{X}_{a,b}$ 上的 \mathbb{P}^1 配置 (19本) の双対グラフ



$f: X_{(a,b)} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ 楕円纤维化 (section A)

$$f^{-1}(0) = f^{-1}(\infty) = \tilde{E}_9$$

$(a, b) \in \mathbb{C}^2$ 一般に Picard 数 18.

塩田・猪瀬 (1977, 小平選歴 (1) 記念号)

塩田・特異 < 3 曲面 (Picard 数最大) は $= 9$ 4重曲面の特異点解消 $\tilde{X}_{a,b}$ と同型. ((9+1) は対応した楕円曲线の n 不変量の計算から.)

(参) Clingher - Doran (2007)

例 4, $g=20$ の \mathbb{P}^1 上の楕円関数

$$f: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ である.}$$

#2039

系 $g=20$ (最小) の K3 曲面の自己同型群

$\text{Aut } X$ は無限. (位数 ∞ の自己同型である).

証明の方針: 塩田 Tate 公式を f に適用

$$\text{rk } MW(f) = g - 2 - \sum_{x \in \mathbb{P}^1} ((\text{fiber } f^{-1}(x) \text{ の位数} - 1))$$

↑
Mordell-Weil 群
有限生成 Abel 群

$$\leq 20 - 2 - 8 - 8 = 2$$

$f^{-1}(0)$ と $f^{-1}(\infty)$ は異なる 2 つの fiber である可能性

2 つの fiber を除くと $\sum_{x \in \mathbb{P}^1} (\dots) = 0$ となる. よって

$$\text{rk } MW(f) > 0. \quad X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1 \text{ (楕円)} \text{ の位数 } \infty$$

(楕円曲線の群論等々) のため存在. ∞ の平行移動 (fiber 毎) が位数 ∞ の自己同型である.

2 つの例外の場合 $MW(f)$ は有限 (Abel) 群.

別の楕円関数 $f': X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $\text{rk } MW(f') > 0$ となるように選ぶ証明を終了. p.o.d.

この証明は例外の場合に扱われるが, Viehweg 論文の題目は two most algebraic K3 surfaces. この論文の記号は X_4 と X_3 .

X_m は P^1 数最大 ($g=2g$) で, 判別式 $\neq 0$.
 ($m=4, 3$) の $K3$ 曲面. 具体的に n は 2 つの異なる
 曲線の直積 Σ 位数 m の symplectic 自己同型 σ の
 商である.

$R_{m,k} = +1/2$ Kummer 曲
 $\Sigma = A/\Gamma_4$ の位数 4,
 3-variant

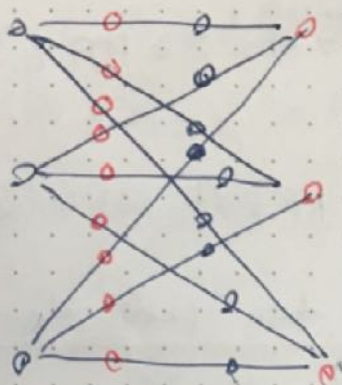
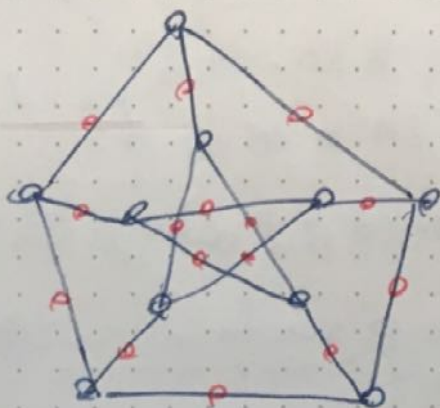
$$X_4 = (E_{\sqrt{1}} \times E_{\sqrt{1}}) / [\sqrt{1}, -\sqrt{1}]$$

$$X_3 = (E_{\omega} \times E_{\bar{\omega}}) / [\omega, \bar{\omega}] \quad \omega \text{ の虚数立方根}$$

Σ は無限個の P^1 を含むが, 有限個の P^1 配置 Σ 全体を
 作ることもできる.

[1] X_4 は $10+15=25$ 本の P^1 をもって成るグラフ
 が Petersen グラフの重心配置になることもできる,
 (後述)

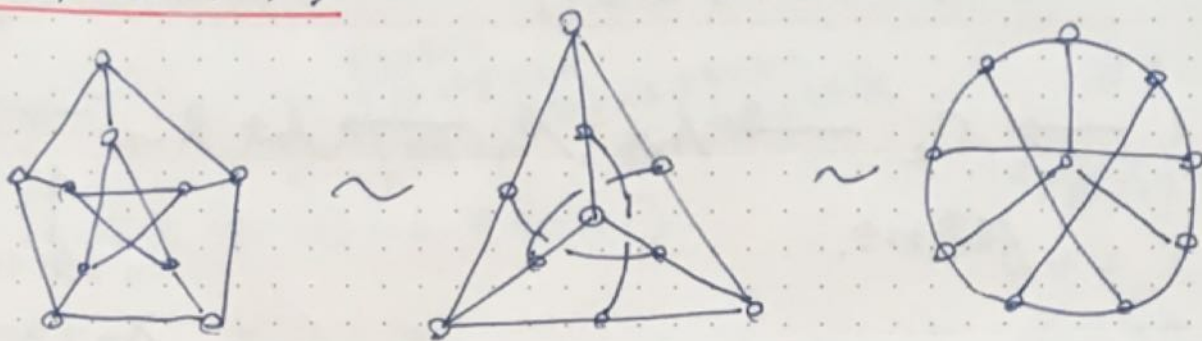
[2] X_3 は $6+18=24$ 本の P^1 をもって成るグラフ
 が完全二分グラフ $K_{3,3}$ の重心配置になることもできる.





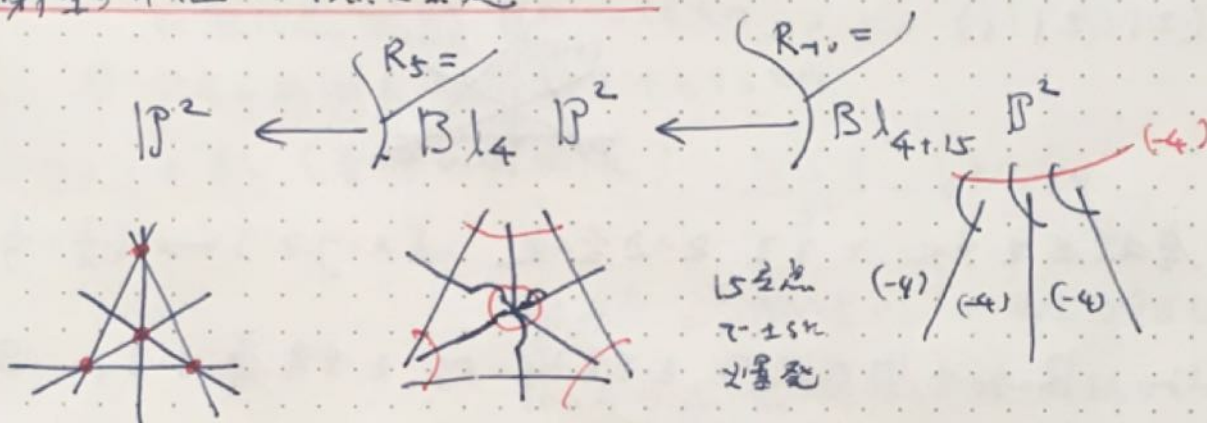
Petersen グラフ P_{10}

#2041



最も身近な現れ方

射影平面の4点2重被覆 R_5 (5点 del Pezzo 曲面)



R_5 は 10本の (+) P^1 と t_5 , その双対グラフが P_{10} .

正則自己同型群 $\text{Aut } R_5 \cong G_5 \cong \text{Aut } P_{10}$ グラフの自己同型群

R_{-10} 2重 15点 7-2重被覆 はもの (境界数10の Coble 曲面)

10本の (-4) P^1 } 双対グラフは P_{10} の重心系部分
15本の (-1) P^1

Vinberg 論文

$$|\mathcal{L}_2^{\circ}| = 25, |\mathcal{L}_2^{\bullet}| = 20, |\mathcal{L}_1| = 5 \text{ --- (*)}$$

の \mathcal{L}_2° からの 25本の P^1 に対応する。問題は K_3 曲面

X_4 は $\sum_{10 \text{ 本}} (-4) P^1$ と分岐と3子 R_{-10} の 2重被覆.



$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \text{Aut } X_4 \longrightarrow \text{Aut } R_{-10} \longrightarrow 1$$

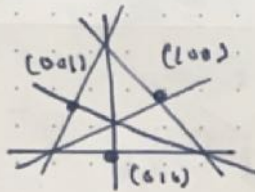
複素結合

↑
 完全射性
 X_4 の 2-
 elementary 性
 が示す結果

(*) の δ_1 は u^2 .

標数 $p \leftarrow R_5$ の 4 中心の座標

$(\pm 1: \pm 1: 1) \in \mathbb{F}_2$



座標点を中心とした 2 次変換 $(x, y, z) \mapsto (\frac{1}{x}: \frac{1}{y}: \frac{1}{z})$

は R_{-10} の自己同型を誘導 σ_1 を誘導する。 \mathbb{G}_5

$\cong \text{Aut } R_5$ に対応する

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \in \text{Aut } R_{-10}$$

$\in \mathbb{F}_2$ であるから δ_1 に対応する。 (δ_2 は u^2 は説明略)

定理

$$(C_2 * C_2 * C_2 * C_2 * C_2) \rtimes \mathbb{G}_5 \xrightarrow{\sim} \text{Aut } R_{-10}$$

$\sigma_1, \dots, \sigma_5$ は文字列の群

$$\text{例. } (\dots \sigma_i) (\sigma_i^{xxx}) = (\dots xxx) \text{ となる}$$

Remark 標数 $p \neq 2$ 以外も同様。標数 2 の場合、

昨日の完全同講演に出てきた F_4 平面 (E_8 格子の構成)。

2 元体 \mathbb{F}_2 上の R_{-10} は自己同型 $\text{Aut } R_{-10} \cong \mathbb{G}_5$ 。