代数曲面：有理性判定

向井 茂 (Shigeru MUKAI) *

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数多様体は代数的にも複素幾何的にも見ることができ，それらが絡まって面白い様相を出現させる．前者の代表として有理関数体が，後者にはホモロジー等の位相不変量や正則微分形式等がある．代数曲面の有理性判定 (Castelnuovo) の証明を整理する機会があったので，そのときのノートを肉付けしてみた．

− − − − − − − − − − − − − − − − − − − −

まず，1次元を復習しよう．$\mathbb{C}$ 上の完備非特異代数曲線 C を以下では単に「曲線」ということにする．これはコンパクト Riemann 面と同じである．最も基本的な不変量として種数 g があるが，これには三つの意味がある．

（幾何的種数） $h^0(K_C)$，すなわち，正則 1 形式（Abel 微分，局所的に $f(z)dz$）の 1 次独立なものの個数．

（算術的種数） $h^1(\mathcal{O}_C)$. 構造層を係数とするコホモロジー空間の次元．

（位相的種数） 第 1 Betti 数の半分 $B_1/2$.

そして，$g=0$ は C が Riemann 球 $\mathbb{CP}^1$ と同型であることや関数体 $\mathbb{C}(C)$ が $\mathbb{C}$ 上の純超越拡大であること（有理性）を特徴付けている．

例 1 $f(z)$ は z の $(2g+2)$ 次多項式で $f(z)=0$ は重解をもたないとする．$\mathbb{C}$ 上の純超越拡大 $\mathbb{C}(z)$[1]の 2 次拡大 $\mathbb{C}(z)(\sqrt{f(z)})$ に対応する（超楕円）曲線は種数 g である．よって，体 $\mathbb{C}(z)(\sqrt{f(z)})$ が純超越的であるのは $g=0$ のときに限る．

---

*Supported in part by the JSPS Grant-in-Aid for Exploratory Research 15654006.

[1] 1 変数多項式環 $\mathbb{C}[z]$ の商体のこと．$\mathbb{C}$ 上 1 個の不定元で生成される体．

関数体 $\mathbb{C}(C)$ が純超越拡大 $\mathbb{C}(z)$ の部分体と同型であるとする．このとき，Riemann 球 $\mathbb{CP}^1$ から曲線 C に全射正則射がえられる．$g = h^0(K_C)$ より，C の種数は 0 である．よって，次がえられる．[2]

定理 1 (Lüroth) $\mathbb{C}$ 上の 1 次元純超越拡大の（$\mathbb{C}$ を含む）部分体はやはり $\mathbb{C}$ 上純超越的である．[3]

§1 Castelnuovo の有理性判定法

上のような代数曲線論（1 変数代数関数論）や Lüroth の定理を 2 次元にも拡張しようという試みが 19 世紀末から 20 世紀初頭にかけてイタリア学派によってなされた．

完備かつ非特異な代数曲面（2 次元代数多様体）S を以下では単に曲面という．これは代数次元が 2 の[4] 2 次元コンパクト複素多様体と同じである．まず，曲線の種数 g をどのように曲面に拡張するかが問題となる．素直な拡張として次の二つが見つかる．

不正則数 (irregularity) $q := h^0(\Omega^1_S)$. 正則 1 形式 (局所的には座標 z_1, z_2 でもって $f_1(z_1, z_2)dz_1 + f_2(z_1, z_2)dz_2$ と表示される）の 1 次独立なものの個数．層係数コホモロジー空間の次元 $h^1(\mathcal{O}_S)$ や第 1 Betti 数の半分 $B_1/2$ とも等しい．

幾何種数 (geometric genus) $p_g := h^0(K_S)$. 正則 2 形式（局所的には $f(z_1, z_2)dz_1 \wedge dz_2$）の 1 次独立なものの個数．層係数コホモロジー空間の次元 $h^2(\mathcal{O}_S)$ に等しい．

Riemann 球 $\mathbb{CP}^1$ に相当する最も簡単な曲面が射影平面 $\mathbb{CP}^2$ である．これと双有理同値な曲面[5]を有理的 (rational) という．これは，S の関数体 $\mathbb{C}(S)$ が $\mathbb{C}$ 上の 2 次元純超越拡大 $\mathbb{C}(t_1, t_2)$ であることと同値である．有理的ならば $q = p_g = 0$ が簡単わかる．曲線の場合の特徴付け「$g = 0 \Leftrightarrow$ 有理的」から，次を期待したくなる．

[2]純代数的証明もある．例えば，永田 [9, §3.12].

[3]これが 2 次元以上の純超越拡大に対しても成立するかというのが，Lüroth の問題と呼ばれる．以下で見るように 2 次元では正しい．しかし，これはギリギリの結果で，3 次元以上では正しくない．また，$\mathbb{C}$ を一般の体や標数正の代数的閉体にしても最早正しくない．

[4]有理型関数全体のなす体の $\mathbb{C}$ 上の超越次元が 2 ある．

[5]二つの曲面は両者から適当に点や部分曲線を除いた開集合が同型なとき（別の言い方をすると，両者の関数体が同型なとき）双有理同値であるという．

問題 1 $q = p_g = 0$ ならば曲面は有理的か？

S が３次元射影空間 $\mathbb{CP}^3$ に埋め込まれているとき，不正則数 q はいつも消える．また，$p_g = 0$ は $S \subset \mathbb{CP}^3$ の次数が３以下であることと同値である．よく知られているように２次曲面は $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ と同型で有理的である．また，３次曲面は $\mathbb{CP}^2$ の６点を中心とする爆発 (blow-up) と同型でこれも有理的である．このように，射影空間 $\mathbb{CP}^3$ 内の非特異曲面に対しては，p_g が曲線の g と同じ役割を果たして，有理性が $(q =)p_g = 0$ で特徴付けられる．

しかし，1894 年に Enriques は次の反例を与えて上の問題（作業仮説）が一般には正しくないことを示した．

例 2 射影空間 $\mathbb{CP}^3$ 内の６次曲面 $f_6(x, y, z, t) = 0$ で６本の座標直線（$x = y = 0$ 等）に沿って特異点をもつものを特異点解消してえられる曲面 S は $q = p_g = 0$ だが非有理的である．ただし，$(x : y : z : t)$ は $\mathbb{CP}^3$ の斉次座標である．(例えば [3, §4.12].)

例 3 (堀川表示) 二つの射影直線の直積 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ の２重被覆 $\tilde{S} : \tau^2 = f_{4,4}(x, y)$ を考える．ただし，x, y は各射影直線の非斉次座標で，$f_{4,4}(x, y)$ はどちらに関しても４次の２変数多項式．それの定める曲線 $C \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ は特異点がないとする．このとき，２重被覆 $\tilde{S}$ は $K3$ 曲面と呼ばれる曲面になる．これは $p_g = 1$ で非有理的である．

$\mathbb{CP}^1$ の位数２の自己同型 σ_0 を一つ固定する．(σ_0, σ_0) は $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ の自己同型で固定点を４個もつ．C が (σ_0, σ_0) 不変で４個の固定点を通らないように選ぶ．このとき，$K3$ 曲面 $\tilde{S}$ の位数２の自己同型 σ で固定点のないものが得られる．商曲面 $S = \tilde{S}/\sigma$ は $q = p_g = 0$ だが非有理的である．

これらの例が非有理的なのは正則２重２形式が存在するからである．正則２重２形式とは局所的に $f(z_1, z_2)(dz_1 \wedge dz_2)^{\otimes 2}$ と局所座標 z_1, z_2 と正則関数 $f(z_1, z_2)$ でもって表され，S 上大域的に矛盾なく定義されているものである．１次独立な正則２重２形式の個数 $h^0(2K_S)$ を P_2 で表す．S が有理的なら $P_1(= p_g), P_2$ に限らず，すべての $n \geq 1$ に対して，正則 n 重２形式の個数 $h^0(nK_S)$ を P_n が消えることが簡単にわかる．(小平次元が $-\infty$ と呼ばれる状態.）次の有理性判定がこの稿の目標である。

定理 2 (Castelnuovo, 1896) $q = P_2 = 0$ ならば曲面は有理的である．

これより Lüroth の定理が次のように２次元に拡張される．

定理 3 (Castelnuovo, 1894) $\mathbb{C}$ 上の *2*次元純超越拡大の（$\mathbb{C}$ を含む）部分体はやはり $\mathbb{C}$ 上純超越的である．

実際，2 次元純超越拡大 $\mathbb{C}(t_1, t_2)$ の部分体 ($\neq \mathbb{C}$) の超越次元は 1，または，２である．その部分体を関数体にもつ曲線，または，曲面を C, S とおく．これらには $\mathbb{CP}^2$ を何点かで爆発したものからの全射正則射 $f : Bl(\mathbb{CP}^2) \longrightarrow C, S$ が存在する．よって，C, S 上には正則 1 形式や正則多重２形式は存在しない．(f による引戻しでもって，$\mathbb{CP}^2$ のものがえられるが，それは零しかない.）よって，定理 2 より定理 3 が従う．

§2　基本事項の復習

先に進む前に足場を固めておこう．曲面という舞台の上で色んな役者が芝居をする．役者は因子で，標準因子 K_S が主役を演じる．まず，S の中の既約曲線（1 次元部分多様体．特異点をもってもよい）を基底とする自由アーベル群 $\bigoplus_{C \subset S} \mathbb{Z} \cdot C$ を S の因子群といい，$\mathrm{Div}\, S$ で表す．これの元 $D = \sum_i a_i C_i$（有限和）を S 上の因子 (divisor) と言う．

因子には特殊なものが２種類ある．一つは S 上の有理関数 $f \in \mathbb{C}(S)^\times$ の定めるもの，主因子 (principal divisor)，もう一つは有理２形式 ω の定めるもの，標準因子 (canonical divisor)，である．有理関数 f に対しては $(f) := \sum_{C \subset S} v_C(f) C \in \mathrm{Div}\, S$ でもって定める．ただし，$v_C(f)$ は f が既約曲線 C に沿ってもつ零の位数，または，極の位数の符号を替えたものである．有理２形式に対しても同様に $(\omega) \in \mathrm{Div}\, S$ を定める．

二つの因子はそれらの差が主因子であるとき，線形同値であるという．主因子の全体は $\mathrm{Div}\, S$ の部分群をなし，それによる剰余類群 $\mathrm{Div}\, S/$(線形同値) を $\mathrm{Pic}\, S$ で表す．有理２形式の定める (ω) 達は一つの剰余類をなす．これを K_S で表し，標準因子類 (canonical divisor class) と呼ぶ．二つの因子 D_1, D_2 の交点数 $(D_1.D_2)$ は線形同値類のみにより定まり，双準同型写像 $\mathrm{Pic}\, S \times \mathrm{Pic}\, S \longrightarrow \mathbb{Z}$ を定める．

関数体 $\mathbb{C}(S)$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としては無限次元である．しかし，有理関数の極の場所と位数を押さえてやると有限次元部分空間がえられる．因子 D に対して，$(f) + D \geq 0$ となる有理関数 $f \in \mathbb{C}(S)^\times$ の集合に 0 を足してやると，$\mathbb{C}(S)$ の $\mathbb{C}$ 部分ベクトル空間がえられる．これを $H^0(D)$ で表す．[6]ただし，因子が ≥ 0 であるとは，$\bigoplus_{C \subset S} \mathbb{Z} \cdot C$ の元とみて，係数

[6]より正しい記号は $H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ であるが，混乱しそうにないのでこう略記する．

が全て ≥ 0 であることである．こういう因子を有効 (effective) であるという．

例 4　1. $D=0$ のとき，$H^0(D)$ は S 上至る所正則な関数の全体．よって，定数関数よりなる 1 次元ベクトル空間である．

2. $C \subset S$ が既約曲線のとき，$H^0(C)$ は C に沿ってのみ高々 1 位の極をもち，他では正則な関数の全体である．

Riemann-Roch 型公式はこの部分ベクトル空間 $H^0(D)$ の次元（小文字 $h^0(D)$ で表す）を求めるためのものである．曲線の場合は本来の Riemann-Roch 公式で，

$$h^0(D) - h^0(K_C - D) = \deg D + 1 - g$$

で与えられる．ただし，$\deg D$ は因子 D の係数の総和である．

曲面の場合，次が成立する．

Riemann-Roch 型不等式

$$h^0(D) + h^0(K_S - D) \geq \frac{1}{2}(D.D - K_S) + \chi(\mathcal{O}_S), \quad \chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g.$$

等式ではないが，不等号の向きが有理関数の存在を保証する方になっているので，利用価値が高い．

本質的ではないが，ベクトル空間 $H^0(D)$ を射影化してえられる射影空間

$$(H^0(D) - \{0\})/\mathbb{C}^* = \{(f) + D \mid f \in \mathbb{C}(S)^\times,\ (f) + D \geq 0\}$$

も便利である．これを D に付随した完備線形系 (complete linear system) と呼び，$|D|$ で表す．$|D|$ は D と線形同値な有効因子の全体をパラメータ付けている．

以下，代数曲面は射影的なもののみを考える．すなわち，ある（複素）射影空間 $\mathbb{P}^N$ に（正則）埋込み $S \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ がある場合である．埋め込まれた $S \subset \mathbb{P}^N$ を一般の超平面で切り取ることにより，S の因子がえられる．これの因子類は超平面の取り方によらない．H で表す．いくつかの有用な性質をもっている．

(A1) S 内の曲線 C との交点数 $(H.C)$ は正である．実際，一般の超平面切断をしてえられる点の個数である．

(A2) 自己交点数 $(H.H)$ も正である．

(A1) より，有効因子 D に対して $(H.D) \geq 0$ が成立する．また，ここで等号が成立するのは $D = 0$ のときに限る．交点数は線形同値類のみによるから，$D \neq 0$ が有効因子と線形同値なときも $(H.D) > 0$ である．よって，対偶をとって，$D \neq 0$ かつ $(H.D) \leq 0$ なら $H^0(D) = 0$，言い換えると $|D| = \emptyset$，をえる．

次は Riemann-Roch 不等式の簡単な演習問題である（[8]).

補題 4 (Grothendieck) 自己交点数が正，$(D^2) > 0$，ならば，十分大きな $n >> 0$ に対して $h^0(nD) > 0$，または，$h^0(-nD) > 0$ が成立する．

豊富因子と nef 因子　S のある射影空間への適当な埋込みの超平面切断に線形同値になるときに因子（類）は非常に豊富 (very ample) という．また，何倍かして非常に豊富になるとき豊富 (ample) という．豊富な因子は上の性質 (A1), (A2) をみたすが，豊富性はこの二つの性質でもって特徴付けられる（中井-Moishezon の判定法，例えば [4, Chpa. 5].）．

有効因子 $D \geq 0$ の双対的な概念として次がある．変わった言葉であるが，便利である．

定義 1 すべての曲線 $C \subset S$ に対して $(N.C) \geq 0$ のとき因子 N は nef という．

豊富な因子は nef である．次は簡単なことであるが有用である．

補題 5 *(useful lemma)* 既約曲線 $C \subset S$ は $(C^2) \geq 0$ のとき，*nef* である．

次はよく知られている．[2]Lemma V.8 の証明の後半は実質的にこれを示している．(別証が [10] 第 D 章にある．また一般次元にも拡張できる．)

補題 6 因子 N が nef なら $(N^2) \geq 0$ である．

証明　対偶を示す．$a := -(N^2) > 0$ とする．豊富な因子 H をとってきて aH を $N^{\perp}$ に直交射影した成分を F とする．$(H^2) > 0$ だから $(F^2) > 0$ である．$H - F$ は N の定数倍だから，$(H.F) = (F^2) > 0$ である．$G_n := nF + N$ とおくとき，n が十分大なら $(G_n^2) > 0$, $(H.G_n) > 0$ が成立する．よって，補題 4 より十分大きな m に対して $|mG_n| \neq \emptyset$ である．$(G_n.N) = (N^2) < 0$ だから N は nef でない．$\diamondsuit$

adjunction　S 内の非特異既約曲線 $C \subset S$ の種数は $g = \frac{1}{2}(C.C + K_S) + 1$ で与えられる．C が（有限個の）特異点をもっていても，非特異モデル（C の正規化）の種数 g に対して，不等式 $g \leq \frac{1}{2}(C.C + K_S) + 1$ が成立する．（等号の成立するのは C が非特異のときに限る．）$0 \leq g$ なので，$(C.C + K_S) \geq -2$ である．ここで等号が成立するのは C が非特異有理曲線のときである．

爆発　$\mathbb{C}^2$ の原点での爆発が最も基本である．これの座標を (x, y) とする．$(X : Y)$ を斉次座標とする射影直線 $\mathbb{P}^1$ との直積の中で $xY - yX = 0 \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ で定義される曲面 $\tilde{\mathbb{C}}^2$ が $\mathbb{C}^2$ の原点での爆発である．一般の場合は，曲面 S とその点 p に対して，p における局所座標になるような有理関数対 (f, g) をとってきて，$U \times \mathbb{P}^1$ 内で $fY - gX = 0$ で定義される $\tilde{U}$ を考える．ただし，U は f や g の極を取り除いてえられる S の (Zariski) 開部分集合である．S における U を $\tilde{U}$ に置き換えてえられる代数曲面 $\tilde{S}$ を S の点 p を中心とする爆発という．

第 1 種例外曲線　爆発 $\tilde{S}$ においては代数曲面 S の 1 点 p が自己交点数が -1 の $\mathbb{P}^1$ で置き換わる．（位相的には 4-manifold S と向付けをひっくり返した $\mathbb{CP}^2$ の連結和．）これについては，次のように逆の操作が保証されている．

定理 7 (Castelnuovo 収縮) 代数曲面 S が自己交点数 $(E.E) = -1$ の非特異有理曲線 $E \simeq \mathbb{P}^1$ を含むとする．このとき，（非特異）代数曲面 $\bar{S}$ とそこへの射 $cont : S \longrightarrow \bar{S}$ でもって，E を 1 点につぶし，それ以外では同型となるものが存在する．（S は $\bar{S}$ の爆発．）

定理に出てくる曲線 E は伝統的に第 1 種例外曲線と呼ばれる．

§3　定理の証明の方針

代数曲面の教科書 Beauville[2] 第 5 章（もとをたどると Kodaira[6]）を改良しつつ証明する．多くの論法自体はそこにすで紹介されていて目新しくはない．ただ，森 [7] で使われた設定（錐を使うことと相対極小曲面に限定しないこと）と本来の terimination of adjuncton を組み合わせることによって，できるだけ自然な中間結果を経て有理性の判定が得られるように工夫してみる．

示そうとしている定理2は「$g=0 \Rightarrow \mathbb{P}^1$ と同型」の2次元版である．まずこの主張をどう示すかを復習しよう．Riemann-Roch 定理の $D \leftrightarrow K_C - D$ に関する（反）対称性より，標準因子の次数 $\deg K_C = 2g-2$ が求まる．これより，$g=0$ は $\deg K_C < 0$ と同値である．Riemann-Roch 定理を1点 P からなる次数1の因子に適用することにより，$g=0$ の仮定の下で $h^0(P)=2$ をえる．これは P でのみ1位の極をもち，他では正則な非定数有理関数 $f \in \mathbb{C}(C)$ が存在するということである．この有理関数の与える正則射 $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は同型となって証明が終わる．

曲面 S の有理性も，曲線の場合の点 $P \in C$ を非特異曲線 $C \subset S$ で置き換えて，似た方針で示す．（$q=0$ の条件の下で）$C \simeq \mathbb{P}^1, h^0(C) \geq 2$ をみたす曲線 $C \subset S$ を探す．こういう C が見つかれば，やはり C に沿ってのみ1位の極をもち，他では正則な非定数有理関数 $f \in \mathbb{C}(S)$ が存在する．これの定める有理射像 $S \cdots \to \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーが有理曲線となって，S 自身も有理的となる．

問題はこのような有理曲線 $C \subset S$ の存在をどう示すかである．次の定理がその答である．高次元にも拡張可能な形で最初 [7] において述べられた．

定理 8 標準因子 K が *nef* でないとき，非特異有理曲線 $C \subset S$ でもって $(K.C) < 0$ なるものが存在する．

定理2はこれより簡単に従う．以下ではこれを $q=0$ の場合に証明する．

§4 K 方向に終わる曲線

nef は因子の有効性 $D \geq 0$ の双対であったが，（交点数に関して）もう一度双対をとった概念を考えよう．

定義 2 D は S の因子（類）とする．全ての nef 因子 N に対して $(D.N) \geq 0$ をみたす因子 D を pseudo effective という．

注意 1 何倍かして effective な因子は pseudo effective である．しかし，逆は成立しない．例えば，曲線上の階数2の安定なベクトル束 E を射影化してえられる $\mathbf{P}^1$ 束 $\mathbb{P}(E) \longrightarrow C$ の相対反標準因子 $-K_{\mathbb{P}/C}$ は nef だが[7]何倍しても effective でない．

[7] nef なら pseudo effecitve であるが，不要なので説明しなかった（演習問題として各自で証明を考えてみて下さい）．

定義 3 D は因子（類）とする．完備線形系 $|C+D|$ が C を固定成分に含む，すなわち，$|D+C|=|D|+C$ となるとき，曲線 C は D 方向に終わるという．

$(C+D.C)<0$ なら C は D 方向に終わる．また，$|C+D|=\emptyset$ のときも C は D 方向に終わる．

補題 9 C は S 上の曲線で因子 D は pseudo effective でないとする．このとき，D 方向に終わる有限個の曲線 $C_1,\ldots,C_m$ と非負整数 $a_1,\ldots,a_m,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して

$$C\sim a_1C_1+\cdots+a_mC_m-bD\quad（線形同値）$$

が成立する．特に，D が Picard 群 $\mathrm{Pic}\,S$ を生成しなければ D 方向に終わる曲線が存在する．

証明　曲線 $C\subset S$ に対して完備線形系の列

$$\emptyset\neq|C|,|C+D|,|C+2D|,|C+3D|,\cdots$$

を考える．pseudo effective でないことより $(D.N)<0$ なる nef 因子 N が存在する．この因子 N と十分大きな自然数 n に対して $(C+nD.N)$ は負になる．よって，$|C+nD|$ は空である．b は $|C+nD|\neq\emptyset$ となる n の最大，C' を $|C+bD|$ の元とするとき，C' は $|C'+D|=\emptyset$ をみたす．有効因子 C' を $a_1C_1+\cdots+a_mC_m$（$a_i\in\mathbb{Z}_{>0}$，C_i は既約）と表したとき，各 C_i は D 方向に終わる．♢

命題 10 D が nef でないなら次のどちらかが成立する．
i) D 方向に終わる曲線 $C\subset S$ でもって $(D.C)<0$ なるものが存在する．
ii) $-D$ は豊富で Picard 群を生成する．

証明　D は nef でないので，$(D.C)<0$ をみたす（既約）曲線 C が存在する．$(C^2)<0$ なら $(C+D.C)=(C^2)+(D.C)<0$ なので，i) が成立する．よって，$(C^2)\geq 0$ としてよい．補題**??**より C は nef だから D は pseudo effective でない．補題 8 を C に適用して

$$C\sim a_1C_1+\cdots+a_mC_m-bD$$

なる D 方向に終わる曲線 $C_1, \ldots, C_m$ が見つかる．$(D.C) < 0$ だから，ある i に対して $(D.C_i) < 0$ か $(D.-D) < 0$ である．前者なら i) が成立するので，$(D^2) > 0$ としてよい．

D が Picard 群を生成すれば，$-D$ は豊富である．($\pm D$ のどちらかは豊富．D は nef でないので，$-D$ の方が豊富．) ii) が成立しないと仮定する．補題 8 より，D 方向に終わる曲線 C_1 が存在する．補題 4 より，十分大きな自然数 n に対して，$|-nD-C_1| \neq \emptyset$ である．線形系の列

$$\emptyset \neq |-nD-C_1|, |-(n-1)D-C_1|, |-(n-2)D-C_1|, \cdots, |-D-C_1|, |-C_1| = \emptyset$$

を考えることにより，

$$-n'D = C_1 + a_2C_2 + \cdots + a_mC_m, \quad a_2, \ldots, a_m \in \mathbf{Z}_{>0}, 1 \leq n' \leq n$$

をみたす D 方向に終わる曲線 $C_2, \ldots, C_m$ が見つかる．$(D.-D) < 0$ なので $(D.C_i) < 0$ となる C_i が存在する．$\diamondsuit$

注意 2 $(D^2) < 0$ のとき，ii) はおきないので，$(D.C) < 0$ なる D 方向に終わる曲線 C が存在する．(補題 5 を参照．)

因子 D として標準因子 $K = K_S$ をとる．色々と特別なことがおきる．[2]V.9 d_2)（さかのぼると Kodaira[6]）で示されているように ii) は不可．よって，次をえる．

命題 11 標準因子 K が nef でないなら，K 方向に終わる曲線 C で $(K.C) < 0$ なるものが存在する．

$C \subset S$ は K 方向に終わる曲線とする．抽象的な定義 3 や命題 9 は一気に幾何的になる．

まず，$C \simeq \mathbf{P}^1$ なら，adjunction 公式 $(K + C.C) = -2$ により，K 方向に終わる．また，C が K 方向に終わることは線形写像 $H^0(\mathcal{O}_S(K)) \to H^0(\mathcal{O}_S(K+C))$ の全射性に他ならないが，これはその写像の Serre 双対 $H^2(\mathcal{O}_S(-C)) \to H^2(\mathcal{O}_S)$ の単射性に同値である．層の完全列

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0$$

からえられるコホモロジー長完全列より，$H^1(\mathcal{O}_S) \to H^1(\mathcal{O}_C)$ の全射性とも同値である．よって次をえる．

命題 12 (1) K 方向に終わる曲線 C の算術種数は S の不正則数以下である：$p_a(C) \leq q = h^1(\mathcal{O}_S)$.

(2) $q = 0$ のとき曲線 C が K 方向に終わることは $C \simeq \mathbf{P}^1$ と同値である．

§5　Castelnuovo の有理性判定法の証明

この節では，S は正則 $(q=0)$ とする．この場合，命題 10 と 11 より定理 7 は証明できている．定理のような曲線のなかで次数最小なものを C とする．$|C|$ の元は全て $\mathbf{P}^1$ と同型である．よって，$\dim|C| \le 2$ でなければならない．実際，$\dim|C| \ge 3$ とすると 1 点 $p \in S$ を通りそこで特異な元が $|C|$ に存在してしまう．これより $(C^2) \le 1$ をえる．[2]Theorem V.10 の証明で説明されているように，次の 3 つの場合に分類される．

1. $(C^2) = 1$ で，S は射影平面 $\mathbf{P}^2$ と同型で C はその中の直線．
2. $(C^2) = 0$ で，S は射影直線 $\mathbf{P}^1$ 上の $\mathbf{P}^1$ 束（Hirzebruch 曲面）と同型で C はその fiber．
3. C は S の第 1 種例外曲線．

第 1 種例外曲線があれば，それらをつぶせるだけつぶしてえられる曲面を S_0 とする（定理 6）．上の結果より，S_0 は次のいずれかをみたす．

i) S_0 は射影平面か Hirzebruch 曲面と同型である．

ii) S_0 の標準因子は nef である．

前者なら S は有理曲面（K_S が pseudo effective でないことにより特徴付けられる）．後者のとき，S_0 は S の極小モデルという．

定理 2 を証明しよう．

命題 13　（[7]）$q = P_2 = 0$ なら K は nef でない．

証明　仮定 $q = P_2 = 0$ と Riemann-Roch 定理より $\dim|-K| \ge (K^2)$ である．よって，$(K^2) \ge 0$ なら $-K$ は effective である．$-K \not\sim 0$ だから nef ではない．$(K^2) < 0$ なら補題 5 より K は nef でない．◇

$q = P_2 = 0$ とすると上の二つの可能性のうちの ii) はおきない．よって S は有理的である．

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

§6 Castelnuovo-Enriquesの定理

関数体 $\mathbb{C}(S)$ がある体 K 上の 1 次元純超越拡大 $K(x)$ になっているとき，S は線織的 (ruled) であるという．これは S が直積 $\mathbb{P}^1 \times C$（C は曲線）と双有理同値であることと同値である．線織的なら，標準因子は K_S は pseudo-effective ではない．K_S が pseudo-effective でないことより，すべての $n \geq 1$ に対して $P_n = 0$ が従う．次の定理も代数幾何学において名高い．

定理 14 (Castelnuovo-Enriques, 1901) $P_4 = P_6 = 0$ なら代数曲面は線織的である．

これの証明は簡単ではない．仮定を「$P_n = 0, \forall n \geq 1$」（すなわち，小平次元 $\kappa = -\infty$）としても簡単ではない．しかし，次の弱形は代数幾何の進歩に伴って証明が簡易化できるようになった．

定理 15 標準因子 K_S が *pseudo-effective* でない代数曲面は線織的である．

本来このことを紹介したかったが，時間切れとなってしまった．ここで筆をおく．

参考文献

[1] 秋月康夫，中井喜和，永田雅宜：代数幾何学，岩波書店，1987 年．

[2] Beauville, A.: *Surfaces Algébriques Complexes, Asterisque*, **54**(1978), Soc. Math. France, Paris, 1978.

[3] Griffiths, P.A. and Harris, J. : *Principles of Algebraic Geometry*, 1978, John Wiley & Sons, Inc.

[4] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977.（和訳あり）

[5] Kempf, G.: *Algebraic Varieties*, Cambridge University Press, 1993.

[6] Kodaira, K.: On the structure of complex analytic surfaces IV, Amer, J. Math. **90**(1968), 1048-1066.

[7] Mori, S.: Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math. 116(1982), 138–176.

[8] Mumford, D.: *Lectures on curves on algebraic surfaces*, Princeton Univ. Press, 1966.

[9] 永田雅宜：可換体論，掌華房, 1967.

[10] Reid, R.: Chapters on algebraic surfaces, IAS/Park City Math. Series, **3**(1997), 5–159.

Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University
Kyoto 606-8502, Japan
e-mail address : mukai@kurims.kyoto-u.ac.jp