1989年 東京大学
(12月) 代数幾何学ミニシンポジウム
pp.94-124

K3曲面のモジュライ空間について

名古屋大学理学部　向井　茂

偏極K3曲面のモジュライ空間の幾何学的コンパクト化について考察する。

非特異K3曲面 S とその上の nef な直線束 L の対(又は、高々有理二重点しか持たない $\bar{S}$ と ample な $\bar{L}$ の対)を偏極K3曲面と言う。次数 $2d>0$ の偏極K3曲面 (S,L), $(L^2)=2d$, のモジュライ空間 $\mathcal{K}_{2d}$ は 19 次元準射影多様体である。

$\boxed{\text{例}}$ 次数4の偏極K3曲面には次の3種がある。

1) 高々有理二重点しか持たない4次曲面 $\bar{S}\subset\mathbf{P}^3$。

2) 4次曲面との交わりで分岐する2次曲面 $Q\subset\mathbf{P}^3$ の二重被覆。

3) $\mathbf{P}^1$ 上の $\mathbf{P}^1$-束 $\Sigma_4=\mathbf{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(4))$ の二重被覆。

1) の全体はモジュライ空間 $\mathcal{K}_4$ の開集合を埋め、2), 3) は各々余次元1の部分多様体をなす。2) は bigonal 又は hyperelliptic と呼ばれる場合。3) は線形系 $|L|$ が固定点をもつ場合で monogonal と呼ばれる。

しかし、$\mathcal{K}_{2d}$ はコンパクトではない。実際、周期写像と Torelli 型定理 [15] により、$\mathcal{K}_{2d}$ は 19 次元 IV 型有界等質領域 $\mathcal{D}$ をそれに作用する数論的離散部分群 Γ_{2d} で割ったものと同型であるが、数論的商空間の一般論により、Satake-Baily-Borel のコンパクト化 $(\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{SBB}$ は $\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D}$ 以外に0次元と1次元の境界成分をもつ。このコンパクト化で周期の極限が1次元成分に向かう退化を II 型と言う(§2 注意2)。

$(\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{SBB}$ も $\mathcal{K}_{2d}$ の一つのコンパクト化ではあるが、その境界に付いているのは楕円曲線のモジュライ空間で、K3曲面が退化した時、特異点集合にどういう楕円曲線が現れるかしか教えてくれない。

$\boxed{\text{例}}$ 4次曲面が平面 P と3次曲面 T の和に退化する場合を考えよう。$(\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{SBB}$ における極限は(3次)楕円曲線 $P\cap T$ のモジュライである。$P\cap T$ が特異な時は0次元境界成分の点が対応する。4次曲面が二つの2次曲面の和に退化する場合も同様である。

偏極を考えないK3曲面の退化に関しては Kulikov [12] による分類(Kulikov K3曲面、§2 で復習)がある。また、Shepherd-Barron [19] により、偏極K3曲面の極限はいつも偏極 Kulikov K3曲面にとれる。しかし、これらを全て考えるとモジュライ空間は Hausdorff 的でない(§2 の例を見よ)。

この論文では，偏極K3曲面の退化の適当な類、即ち、安定偏極K3曲面を定義し、それらが $\mathcal{K}_{2d}$ の II 型境界を Hausdorff 的に埋めることを示す(定理 (3.7))。II 型安定偏極K3曲面 (S,L) は II 型 Kulikov K3曲面 $S=V_0\cup V_1\cup\cdots\cup V_r$ とその上の nef 直線束 L よりなる。両端の V_0 と V_r は反標準因子類 $-K$ が nef な有理曲面、それらをつなぐ $V_1,\cdots,V_{r-1}$ は楕円曲線の上の平坦な $\mathbf{P}^1$-束。さらに、S は半安定性を L はその adjoint に関する或る条件を満たす(定義 (3.1), (3.5))。

II 型安定偏極K3曲面の f-同値類(4.2)を付加した部分コンパクト化 $\mathcal{K}_{2d}{}^s$ は $\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D}$ のトーラス的コンパクト化 [1] の開集合と同型で、II 型境界はどれも余次元1である。次

数を止めたときの安定Ｋ３曲面の種類は容易に数え上げられる（§5）。例えば、次数４の場合は丁度９個のII型境界を持つ（表 (5.6)）。

$n \geq 3$ の時 $|L^{\otimes n}|$ は free で双有理射 $\phi: S \longrightarrow \mathbf{P}^N$ を与える [5]。その像は (S, L) の射影モデルと呼ばれる。しかし、ϕ は第一種例外曲線をつぶすので、異なる安定偏極Ｋ３曲面でも同じ射影モデルを持つことがある。よって、安定偏極Ｋ３曲面の射影モデルを付加することにより、$\mathcal{K}_{2d}{}^s$ より小さい部分コンパクト化 $\mathcal{K}_{2d}{}^\sigma$ が得られる。例えば、$\mathcal{K}_2{}^\sigma$ は余次元１のII型境界を持たない。$\mathcal{K}_4{}^\sigma$ の９個のII型境界の次元は 18, 15, 9, 7, 6, 3, 2, 2, 1 である。この部分コンパクト化 $\mathcal{K}_{2d}{}^\sigma$ は $\mathbf{P}^N$ の Hilbert scheme のある既約成分の射影変換群 $PGL(N+1)$ による商と同型で、$\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D}$ の Satake-Baily-Borel とトーラス的両コンパクト化の中間に位置する。この様に、曲線の場合（§1 で復習）には一つであったコンパクト化はＫ３曲面では二つに分離する。

０次元境界成分の幾何学的コンパクト化（III型安定Ｋ３曲面）と安定Ｋ３曲面の射影モデルの漸近安定性（問題 (4.8)）に関する研究が待たれる。§5 では、安定Ｋ３曲面と或る２次形式（II型Ｋ３格子）の関係についてふれておいた。

§1 背景

複素多様体から円板 $\Delta=\{|z|<1\}$ への固有正則写像 $f: X \to \Delta$ を考える。f が smooth なら複素多様体の変形である。中心 fibre $X_0=\pi^{-1}(0)$ の外側 $f^*: X^* \longrightarrow \Delta^*=\{0<|z|<1\}$ の smoothness のみが仮定されている時、f は複素多様体の退化と呼ばれる。複素多様体のモジュライ問題を考える時、通常、次の2つの操作が許容される。

1) X_0 内にのみ不確定点をもち、X_0 内の部分多様体のみをつぶす双有理的改変を行なうこと。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & \Delta & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varphi^*: X^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y^* \arrow[dl] \\ & \Delta^* & \end{tikzcd} \text{ は同型}$$

2) n乗写像 $\Delta \longrightarrow \Delta$, $t \longmapsto t^n$, でもって $f: X \to \Delta$ を引戻すこと。新しい射 $f_{(n)}: X_{(n)} \longrightarrow \Delta$ を f の n乗根と呼ぶ。（全空間 $X_{(n)}$ はたいてい特異なので 1) の操作が必要になる。）

次の定理は Mumford の半安定化定理と呼ばれ、たいていの退化問題の出発点となる。

$\boxed{\text{定理}}$ (Mumford - Knudsen - Waterman [9]) どんな退化 $f: X \to \Delta$ も適当な巾根と双有理的改変を施すことに

より、全空間が非特異で中心 fibre が被約かつ正規交叉なものにできる。

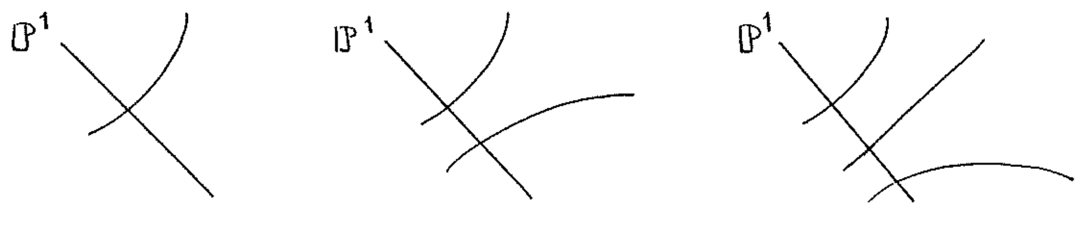
注意　被約性を除けば Hironaka の定理である。被約を得るためにトーラス埋込論と組合せ論が投入される。

曲線の退化，即ち，$\dim f = 1$ の場合を復習しよう．([2])

定義　被約連結曲線　C　は次の２条件をみたす時，D-M 安定（または，半安定）と言う．

i)　C の特異点は結節点 (node) のみである。

ii)　C の非特異有理成分 $R \cong \mathbb{P}^1$ は他の成分の和 $\overline{C \setminus R}$ と３点（または，２点）以上で交わる。



不安定　　　半安定　　　安定

$f: X \longrightarrow \Delta$ は曲線の退化で中心 fibre は被約かつ正規交叉とする。中心 fibre 内の第１種例外曲線を全てつぶしたものを $f_{ss}: X_{ss} \longrightarrow \Delta$ とする。更に，$E \cong \mathbb{P}^1$

で $(E^2)=-2$ なるものを全てつぶしたものを $f_\Delta : X_\Delta \to \Delta$ とする。 次の性質が容易に確められる。

	$f_{\Delta\Delta}$	f_Δ
中心 fibre	D-M 半安定	D-M 安定
全空間	非特異	有理2重点のみ
標準束 K	$g \geq 1$ の時、(relatively) nef	$g \geq 2$ の時、relatively ample

標準直線束 K が nef な曲面の間の双有理写像は双正則である。 このことと上の定理より次が得られる。

$\boxed{系}$ 種数 g の D-M 安定曲線のモジュライ空間 $\overline{M}_g$ はコンパクトかつ Hausdorff である。

$\boxed{注意}$ $\overline{M}_g$ の境界 $\overline{M}_g \setminus M_g$ は $[g/2]+1$ 個の因子よりなる。

さらに、安定曲線の多重標準モデルの安定性により、$\overline{M}_g$ の射影性も示されている (Mumford [13], Gieseker [7], [8])。 これには Knudsen [11] の証明や 小平の Hodge 多様体論を使う別証もある ([9])。

§2 K3曲面の退化

標準束が自明 $K_S \equiv 0$ で正則 $q=0$ な曲面をK3曲面と言う。 K3曲面の退化 $f': X' \longrightarrow \Delta$ を考える。前節の半安定化定理より，中心fibreは被約かつ正規交叉としてそれほど一般性を失わない。次の定理は3次元極小モデルの構成に関する最初の結果であろう。

$\boxed{\text{定理}}$ (Kulikov [12]) 中心fibreの各既約成分は代数的と仮定する。この時，双有理改変 $X' \dashrightarrow X$ でもって $f: X \longrightarrow \Delta$ が次の条件を

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f'"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & \Delta & \end{tikzcd}$$

みたすようにできる。

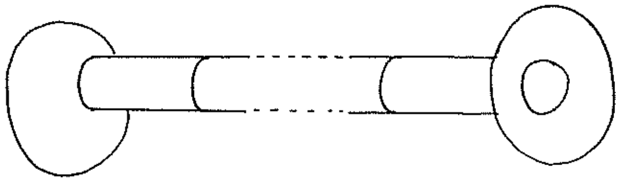
i) f の中心fibreも被約かつ正規交叉。

ii) X は非特異でその標準束は自明，$K_X \equiv 0$。

また，i), ii) をみたすK3曲面の退化の中心fibre X_0 は次のいずれかをみたす。

Type I: X_0 は非特異K3曲面.

Type II: $X_0 = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1} \cup V_n$



両端の V_0 と V_n は有理曲面でそれらをつなぐ $V_1, \cdots, V_{n-1}$

は楕円線織面（elliptic ruled surface）。

Type III： X_0 の各既約成分は有理曲面。それらの配置の双対グラフは球面の三角形分割を与える。

$\boxed{\text{注意 1.}}$ Type I, II, III のいずれになるかは中心 fibre の外側 $f^*: X^* \longrightarrow \Delta^*$ のモノドロミーで決定される。中心 fibre が被約かつ正規交叉なので $H^2(X_t)$, $t \in \Delta^*$, への Picard-Lefschetz 変換 T は巾単（unipotent）である。T の対数を N とする時，Type I, II, III に従って $N=0$, $N^2=0$, $N^3=0$ となる。

$\boxed{\text{注意 2.}}$ 全空間 X が非特異なことより，X_0 の double curves の法線束の間の関係が得られる。Type II の場合，$D_i = V_i \cap V_{i+1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ とする時，

$$N_{D_i/V_i} \otimes N_{D_i/V_{i+1}} \cong \mathcal{O}_{D_i}$$

が成立する。これは，[ ] において X_0 の d-半安定性と呼ばれている。X_0 が全空間を非特異とする様な変形をもつ，即ち，強い意味で smoothable な為の必要充分条件である。

定理前半の i) と ii) をみたす K3 曲面の退化 $f: X \to \Delta$ を Kulikov（の極小）モデルと呼ぶ。また，後半の

Type II, III をみたす（可約）曲面を II, III 型の Kulikov K3 曲面と呼ぶ。

さて、偏極K3曲面の退化とは、K3曲面の退化 $f: X \longrightarrow \Delta$ と Δ^* 上 nef な X 上の直線束 $\mathcal{L}$ の対のことを言う。偏極K3曲面のモジュライ空間のコンパクト性は次から従う。

$\boxed{\text{定理}}$ （Shepherd-Barron [19]） 偏極K3曲面の退化 $(f: X \longrightarrow \Delta, \mathcal{L})$ に対して $(\tilde{f}: \tilde{X} \longrightarrow \Delta, \tilde{\mathcal{L}})$ で次の条件をみたすものが存在する。

i) f と $\tilde{f}$, $\mathcal{L}$ と $\tilde{\mathcal{L}}$ は各々中心 fibre の外では同じ。

ii) $\tilde{f}: \tilde{X} \longrightarrow \Delta$ は Kulikov モデル。

iii) $\tilde{\mathcal{L}}$ は nef。

言換ると、どんな偏極K3曲面の族 $\{(X_t, \mathcal{L}_t)\}_{t \in \Delta^*}$ に対しても極限 $\lim_{t \to 0} (X_t, \mathcal{L}_t)$ が Kulikov K3曲面とその上の nef な直線束の対として存在する。しかし、問題はその極限が一意的でないことである。実際、Kulikov モデル $f: X \longrightarrow \Delta$ とその上の nef な直線束 $\mathcal{L}$ が与えられた時、$K \equiv 0$ と $\mathcal{L}$ が nef なことを保ったまま中心 fibre だけを取替ることができる。これには次の2つの方法（F）と

(T) がある。

(F) 中心 fibre X_0 は $(\mathcal{L}.C)=0$ なる非特異有理曲線 $C\cong\mathbb{P}^1$ を含み、C は X 内で動けないとする。この時、C を中心とする flop ができる。([16])
flop によって生じた新しい $f':X'\longrightarrow\Delta'$ と $\mathcal{L}$ の固有変換 (proper transform) $\mathcal{L}'$ の対はもとの $(f,\mathcal{L})$ と異なるが、中心 fibre の外では一致している。

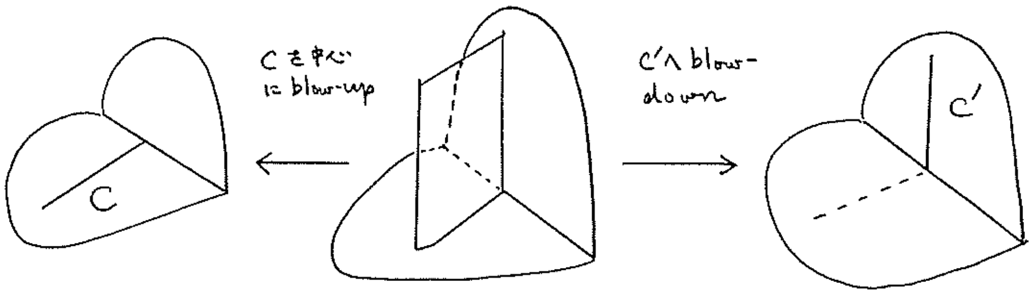
この (F) には3つの場合がある。

(F1) C は X_0 の特異点集合 Sing X_0 と disjoint で $(C^2)=-2$。

(F2) C は第1種例外曲線で Sing X_0 に含まれない。

(F3) C は Sing X_0 の既約成分。C はそれを含む2つの既約成分のどちらの中でも第1種例外曲線。

(F1) の場合 flop は新しい退化を与えるが、中心 fibre 同志は互いに同型である。モジュライを単に集合と思う分にはいいが、関手を(近似)表現するものと思う時やはり Hausdorff 性を壊す。(F2) と (F3) の場合は、中心 fibre X_0 は別のものに替る。(F2) の場合、flop の中心 C は X_0 の別の成分へ引越しをする。



(F3) は X_0 が III型 の時にのみ起こる。

もう一つの方法 (T) は上と違い、$f : X \longrightarrow \Delta$ はそのままにして直線束 $\mathcal{L}$ だけを替る。

(T) 中心 fibre X_0 は可約 $A \cup B$、全空間 X は非特異とする。$\mathcal{L}$ を直線束 $\mathcal{O}(\pm A) \cong \mathcal{O}(\mp B)$ で換っても中心 fibre の外では変化しない。しかし、$\mathcal{L}$ の中心 fibre への制限 $L_A = \mathcal{L}|_A$, $L_B = \mathcal{L}|_B$ は次の様に変化する。

$$
\begin{aligned}
L_A &\rightsquigarrow \mathcal{L}(\pm A)|_A \cong \mathcal{L}(\mp B) \cong L_A(\mp D) \\
L_B &\rightsquigarrow \mathcal{L}(\pm A)|_B \cong L_B(\pm D)
\end{aligned}
$$

但し、D は A と B との交わり。($K_X \equiv 0$ だから $\mathcal{O}_A(D)$, $\mathcal{O}_B(D)$ は A, B の反標準直線束と同型である。)

$\mathcal{L}$ とそのひねり $\mathcal{L}(A)$ が共に nef になることは少しも珍しくない。

$\boxed{\text{例}}$ 射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の非特異4次曲面は次数4の偏極K3曲面である。これが、平面 P と非特異3次曲面 T の和に退化する場合を考えよう。退化 $f: X \longrightarrow \Delta$ の全空間は P と T の交わり $P \cap T$ の上の12点 $p_1, \cdots, p_{12}$ で通常2重点をもつ。各 p_i は2通りの小さな特異点解消をもつが、どこでも T が変化をうけない様に選んだものを $\pi: X' \longrightarrow X$ とする。T が不変なかわりに、$P' = \pi^{-1}(P)$ は P を12点で blow-up したものになっている。$f' = f \circ \pi: X' \longrightarrow \Delta$ の中心 fibre は P' と T の和である。$\mathbb{P}^3$ の tautological 直線束の引戻しとして得られる X' 上の偏極は P' の上では P の直線の引戻し $\pi^* l$, T の上では反標準束 $\mathcal{O}(-K_T)$ と同型である。$\mathcal{L}$ を $\mathcal{O}(T)$ で捩ると偏極は次の様に変化する。

	$\otimes\, \mathcal{O}(T)$	次数の変化
P' の上	$\pi^* l \longmapsto \pi^* l + D$ $= 4\pi^* l - E_1 - \cdots - E_{12}$	$1 \longmapsto 4$
T の上	$-K_T \longmapsto -K_T + D = 0$	$3 \longmapsto 0$

但し、$D = P' \cap T$。また、$E_1, \cdots, E_{12}$ は blow up $P' \longrightarrow P$ の例外曲線。

新しい偏極 $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(T)$ も $X_0' = P' \cup T$ を $\mathbb{P}^3$ 内の

4次曲面に写す。しかし、もとの式と異なり、その像は既約。その替り、T' が1点につぶれるために新しい4次曲面は $\tilde{E}_6$-型の単純楕円特異点をもつ。

この様に偏極 Kulikov K3 曲面のモジュライ空間(又は、関手)はコンパクトではあるが、その Hausdorff 性は上の(F)と(T)とによって妨害されている。(F)の方法による妨害にはそれの前提となる曲線 $C \cong \mathbb{P}^1$, $(Z.C)=0$, を全てつぶして対抗するか、あるいは、モジュライを同型類でなく flop を法とする同値類で考えればよい。(T)の方法による妨害をなくすには考えるべき偏極K3曲面のクラスを制限しなければならない。次節ではモジュライ空間のII型境界を Hausdorff 的に埋めるクラスを一つ与える。

§3 安定偏極K3曲面

(3.1) $\boxed{\text{定義}}$ Kulikov K3曲面 $\mathcal{S}$ とその上の nef な直線束 L の対 $(\mathcal{S}, L)$ で次の三条件をみたすものを半安定(偏極 Kulikov) K3曲面と言う。

i) $\mathcal{S}$ の既約成分 V はどれも非特異でその反標準束 $\mathcal{O}_V(-K_V)$ は nef。

ii) どの既約成分 V に対しても L の制限 $L|_V$ の adjoint $L|_V + K_V$ は nef でない。

iii) $\mathcal{S}$ は [4] の意味で d-半安定(前節の注意2を参照せよ)。

前節で (T) の方法として説明したように、中心 fibre の既約成分 V によるひねり $\otimes \mathcal{O}_X(V)$ は V 上での偏極 $L|_V$ を $L|_V + K_V$ にかえる。上の条件 ii) はこれを禁止するためのものである。Ⅲ型の時はまだ分らないが、$\mathcal{S} = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1} \cup V_n$ がⅡ型の時、これは我々の要求を満足させるいい定義である(定理(3.7))。

各既約成分 V_i とそこへの L の制限についてより具体的な記述を与えよう。中間成分 $V_1, \cdots, V_{n-1}$ は楕円線織面なので $(K_{V_i}^2) \leq 0$。よって、条件 i) よりそれらは極小.

即ち、楕円曲線 E 上の $\mathbb{P}^1$-束である。$D_{i-1} = V_{i-1} \cap V_i$ と $D_i = V_i \cap V_{i+1}$ は共に $\mathbb{P}^1$束 $V_i \longrightarrow E$ の切断 (section) で両者の和 $D_{i-1} + D_i$ は反標準線型系 $|-K_{V_i}|$ に属する。$D_{i-1} \cap D_i = \phi$ なので、再び条件 i) を使うことにより、

$$(3.2) \qquad (D_{i-1}^2)_{V_i} = (D_i^2)_{V_i} = 0$$

を得る。よって

(3.3) V_i は楕円曲線 E 上の平坦な $\mathbb{P}^1$束で $\pi_1(E) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の $\mathbb{C}^*$ への表現から得られる。

D_{i-1} と D_i は V_i の中で代数的に同値なので $(L . D_{i-1})$ と $(L . D_i)$ は等しい。これを II 型半安定曲面 (S, L) の楕円次数 (elliptic degree) と呼ぶ。

(3.4) $\boxed{\text{命題}}$ 楕円次数 $e = (L . D_i)$ は i のとり方によらない。

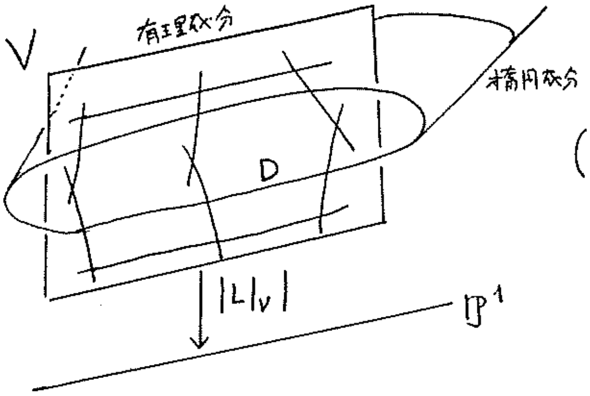
(S, L) の次数 $2d = (L^2)$ が正な時、ある既約成分 V_i の上で $(L|_{V_i})^2 > 0$。(3.2) と V_i 上での Hodge 指数定理より、次を得る。

(3.5) $\boxed{\text{命題}}$ 次数 $2d$ が正なら楕円次数 e も正。特に、どの既約成分の上でも $L|_{V_i}$ は数値的に自明ではない。

定義の条件 ii) より、L と $\mathbb{P}^1$-束 $V_i \longrightarrow E$ の fibre F との交点数 $(L.F)$ は 1 以下である。$(L.F)=1$ の時、$L|_{V_i}$ は tautological 直線束で $(L|_{V_i}^2)$ は $2e$ に等しい。$(L.F)=0$ の時、$L|_{V_i}$ は E 上の直線束の引戻しで $(L|_{V_i}^2)=0$ である。

次に両端の有理曲面 $V=V_0$, V_n を調べよう。条件 iii) の小半安定性と (3.2) より、$(K_V^2)=0$。よって、V は $\mathbb{P}^2$ の 9 点 blow-up と同型である。L の V への制限は nef であるが、禁則条件 ii) より $(L.C)=0$ なる第1種例外曲線 $C\subset V$ が必ず存在する。(3.5) よりこの様な C は有限個しかない。$(L|_V^2)>0$ の時は、それらを一斉につぶすことができる。こうして得られる曲面 $\overline{V}$ の反標準直線束は nef かつ big。$\overline{V}$ は弱 Del Pezzo 曲面である。$L|_V$ は $\overline{V}$ 上の直線束 $\overline{L}$ の引戻しで、$\overline{L}+K_{\overline{V}}$ は nef である。$(L|_V^2)=0$ の時、線型系 $|L|_V|$ は free で V から $\mathbb{P}^1$ への写像を与える。その一般 fibre は $\mathbb{P}^1$ と同型。V とその隣り V' との交わり D は $\mathbb{P}^1$ に 2:1 に写され、4個の分岐点を

もつ。



$((L|_V^2)=0$ かつ $n\geq 2$ の図$)$

(3.6) $\boxed{\text{定義}}$ 半安定II型K3曲面 (S, L) は $(L|_{V_i}^2)=0$ なる楕円線織面 V_i, $1\leq i\leq n-1$, を含まない時安定と言う。

条件 iii) の d-半安定性より、半安定II型K3曲面の楕円成分 $V_1, \cdots, V_{n-1}$ は全て同型である。よって $(L|_{V_i}^2)=0$ なる楕円線織面 V_i を取り去って両隣の V_{i-1} と V_{i+1} を $V_{i-1}\cap V_i \cong V_i \cap V_{i+1}$ で貼り合せることにより新しい半安定K3曲面が得られる。これをくり返して、$(L|_{V_i}^2)=0$ なる楕円成分をなくしたものを (S, L) の安定化と呼ぶ。

Kulikov K3曲面の上の線型系についてはK3曲面の上の線型系と平行な議論ができ、同様の結果が成立する（[5]を参照）。monogonal であれば $|L|$ は free, bigonal であれば $|L|$ は very ample 等々。特に、$|L^{\otimes 3}|$ は very ample である。安定II型K3曲面 (S, L) の射影モデルを考察しよう。

偏極 L は楕円部分 $V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}$ の上では ample であるが、有理曲面の上には $(L.C)=0$ なる曲線 $C \simeq \mathbb{P}^1$ が残っている。 $C \subset V = V_0$ 又は V_n の自己交点数 $(C^2)_V$ は $0, -1, -2$ のいずれかである。$(L|_V^2)$ が正の時、$(C^2)_V = 0$ は起こらず、V 内の有限個の $C \simeq \mathbb{P}^1$, $(C^2) = -1, -2$ がつぶれて、射影モデル $\overline{\overline{V}}$ は有理2重点をもつ Del Pezzo 曲面 ($-K_{\overline{\overline{V}}}$ は ample) である。$(L|_V^2) = 0$ の時、L は C の自然数倍と線型同値。$\Phi_{|L|_V|}$ は V を $\mathbb{P}^1$ にうつすので、射影モデルでは V に対応する成分はない。V の隣りの楕円線織面、又は、有理曲面 V' の射影モデル $\overline{\overline{V'}}$ はその $\mathbb{P}^1$ に沿って特異点をもつ。$D = V \cap V' \longrightarrow \mathbb{P}^1$ の4個の分岐点で $\overline{\overline{V'}}$ は pinch point $y^2 = x^2 z$、それ以外の $\mathbb{P}^1$ の点では結節点 $y^2 = x^2$ を特異点としてもつ。

次が主結果である。

(3.7) $\boxed{\text{定理}}$ $(f : X \longrightarrow \Delta, \mathcal{L})$ を偏極K3曲面のII型退化とする。巾根、多有理改変、そして、$\mathcal{L}$ を中心 fibre に台をもつ $\mathcal{O}_X(A)$ で捩ることをくり返すことにより、全空間は非特異で中心 fibre が (3.1) の意味

で半安定であるようにできる。 また, 中心 fibre の安定化は flop (前節の(F1)と(F2)) を法として一意的に定まる。 特に射影モデルは同型類が一意的に定まる。

§4 安定K3曲面のモジュライ空間

前節の定理(3.7)より、偏極K3曲面のモジュライ空間 $\mathcal{K}_{2d}$ の Hausdorff 的部分コンパクト化が二つ得られる。一つは安定なもの全体を flop を法として考えた

(4.1) $$\mathcal{K}_{2d}^{s} := \{\text{II型安定K3曲面 } (S, L),\ (L^2)=2d\} \big/ f\text{-同値} \supset \mathcal{K}_{2d}$$

と、安定なものの射影モデルの同型類の全体

(4.2) $$\mathcal{K}_{2d}^{\sigma} := \left\{\begin{array}{l}\text{II型安定K3曲面 } (S, L) \\ (L^2)=2d \text{ の射影モデル} \\ \operatorname{Proj} \bigoplus_{n\geq 0} H^0(S, L^{\otimes n})\end{array}\right\} \Big/ \text{同型} \supset \mathcal{K}_{2d}$$

である。但し、2つの安定K3曲面は§2の(F2)の方法のくり返しで移り合う時に f-同値であるとする。射影モデルをとることにより自然な射

(4.3) $$\Phi : \mathcal{K}_{2d}^{s} \longrightarrow \mathcal{K}_{2d}^{\sigma}$$

が得られる。

$\mathcal{K}_{2d}^{s}$ の方は周期写像と相性がよい。K3曲面の周期領域 $\mathcal{D}$ は19次元IV型有界対称領域 $SO(2,19)/SO(2)\times SO(19)$ と同型である。次数 $2d$

毎に数論的離散部分群 $\Gamma_{2d} \subset SO(2,19)$ が定まり、周期写像

$$(4.4) \qquad \pi : \mathcal{K}_{2d} \longrightarrow \Gamma_{2d} \backslash \mathcal{D}$$

が定義される。[15] よりこれは同型である。$\Gamma_{2d} \backslash \mathcal{D}$ は準射影的で、Satake-Baily-Borel のコンパクト化 $(\Gamma_{2d} \backslash \mathcal{D})^{SBB}$ の境界は有限個の曲線の和集合である。

$$(4.5) \qquad (\Gamma_{2d} \backslash \mathcal{D})^{SBB} = \Gamma_{2d} \backslash \mathcal{D} \amalg \left\{ \begin{matrix} 1\text{次元} \\ \text{境界成分} \end{matrix} \right\} \amalg \left\{ \begin{matrix} 0\text{次元} \\ \text{境界成分} \end{matrix} \right\}$$

SBBコンパクト化から0次元境界（dが平方因子をもたない時は1点しかない）を取り除いたものを $(\Gamma_{2d} \backslash \mathcal{D})_0^{SBB}$ で表わす。周期写像 π は $\mathcal{K}_{2d}^{s}$, $\mathcal{K}_{2d}^{\sigma}$ に拡張される。これは安定II型K3曲面に対してその特異点集合の成分として現われる楕円曲線のモジュライを対応させる写像である。しかし、II型偏極K3曲面に対しては $\Gamma_{2d} \backslash \mathcal{D}$ のトーラス的コンパクト化に値をとる、より精密な周期が定義され、次の可換図式を得る。

$$(4.6) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{K}_{2d}^{s} & \xrightarrow{\pi^{s}} & (\Gamma_{2d} \backslash \mathcal{D})_0^{toroidal} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}_{2d}^{\sigma} & \xrightarrow{\pi^{\sigma}} & (\Gamma_{2d} \backslash \mathcal{D})_0^{SBB} \end{array}$$

但し、$(\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{\mathrm{troidal}}_{0}$ は $(\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{\mathrm{troidal}} \longrightarrow (\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{\mathrm{SBB}}$ による $(\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{\mathrm{SBB}}_{0}$ の引戻しである。トーラス的コンパクト化は $\mathcal{D}$ に対応する錐の多角形分割のとり方によるのでいくつもあるが、$(\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{\mathrm{troidal}}_{0}$ はそのとり方によらず一意的に定まる。

(4.7) $\boxed{\text{定理}}$ 周期写像（の拡張）$\pi^{\wedge} : \mathcal{K}^{\wedge}_{2d} \longrightarrow (\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{\mathrm{troidal}}_{0}$ は全単射。

証明に必要な道具は[6]に出揃っている。

(4.6) と上の定理より，もう一方のコンパクト化 $\mathcal{K}^{\sim}_{2d}$ は SBB と troidal の中間にある。$n \geq 3$ を一つ固定して n-射影モデル，即ち、

$$\Phi_{|L^{\otimes n}|} : S \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(S, L^{\otimes n})) = \mathbb{P}^N$$
$$N = n^2 d + 1$$

の像を考える。$\mathcal{K}^{\sim}_{2d}$ は $\mathbb{P}^N$ の Hilbert 概型 $\mathrm{Hilb}\,\mathbb{P}^N$ の開集合 $\mathcal{U}$ を $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^N = PGL(N+1)$ で割ったものと同型である。

$$\mathcal{K}^{\sim}_{2d} \cong \mathcal{U}/PGL(N+1) \subset \mathrm{Hilb}\,\mathbb{P}^N/PGL(N+1)$$

曲線の場合、安定曲線の n-標準モデルは $n \geq 5$ の

時、その Chow 座標, Hilbert 座標共に幾何学的不変式論の意味で安定である。(Mumford [13], Gieseker [7][8])

(4.8) $\boxed{\text{問題}}$ n が充分大きい時、安定 K3 曲面の n-射影モデルの Chow 座標 (又は、Hilbert 座標) は幾何学的不変式論の意味で (半) 安定か？

§5 安定K3曲面の数え上げ

次数 $2d$ を止めた時、安定Ⅱ型K3曲面が何種類あるかを調べる。[4] における結果より、これは $(\Gamma_{2d}\backslash\mathcal{D})^{SBB}$ の1次元境界成分の数を計算していることになる。Ⅱ型安定曲面 (S, L), $S = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1} \cup V_n$ には次の4つの不変量がある。

i) 楕円成分の個数 $a = n-1$。

ii) 楕円次数 $e = (L.D_i)$。§3 でみた様に i によらない正整数。

iii) 偏極次数 $2d$ がどう分配されているか。

$$2d = d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1} + d_n \quad , \quad d_i = (L|_{V_i}^2)$$

iv) 有理曲面上の偏極 $L|_{V_0}$ と $L|_{V_n}$ の型。

楕円線織面 $V_1, \cdots, V_{n-1}$ は全て極小かつ平坦。そして $L|_{V_i}$, $1 \le i \le n-1$, は tautological。よって、$d_1, \cdots, d_{n-1}$ は全て $2e$ に等しい。よって iii) は残りの次数

iii′) 残りの次数 $d-2ae$ が V_0 と V_n にどう分配されるか。 $d-2ae = d_0 + d_n$

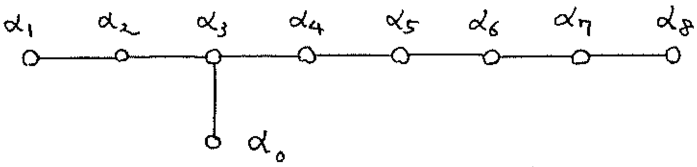
に還元される。最後の iv) は $\mathbb{P}^2$ の9点 blow-up V_0 と

V_π の上の nef な直線束の分類を必要とするが、これは次の命題より簡単な計算に帰着される。

(5.1) $\boxed{\text{命題}}$ V は $\mathbb{P}^2$ の 9 回 blow-up, $-K_V$ は nef とする。$\mathbb{P}^2$ の直線の引戻しを l、9 個の例外曲線（の引戻し）を $e_1, \cdots, e_9$ とする。$\mathrm{Pic}\, V \cong H^2(S, \mathbb{Z})$ には 9 個の (-2) 因子

$$\alpha_0 = l - e_1 - e_2 - e_3, \quad \alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad (1 \le i \le 8)$$

による鏡映で生成される群 $W \doteq W(\tilde{E}_8)$ が作用



している。この (affine Weyl) 群 W の作用を法とすれば、V 上の nef 因子は次の 10 個の因子の非負整数係数 1 次結合として一意的に表わされる。

$$\begin{cases} w_0 = l \\ w_1 = l - e_1 \\ w_2 = 2l - e_1 - e_2 \\ w_j = 3l - e_1 - e_2 - e_3 - \cdots - e_j \quad 3 \le j \le 9 \end{cases}$$

安定 K3 曲面の有理成分 $V = V_0, V_\pi$ の場合, adjoint $L|_V + K_V$ は nef でないという条件がある。よって, w_9

$= -K_V$ の係数は零。即ち、次を得る。

(5.2) 安定II型K3曲面の有理成分における偏極は上の8個の因子 $w_0, w_1, \cdots, w_8$ の非負整数係数1次結合である。

これで準備が完了した。次数2の安定偏極K3曲面は次の4種類しかない。

(5.3) 次数2の安定偏極K3曲面は楕円線織面を含まない。即ち、$a = 0$。

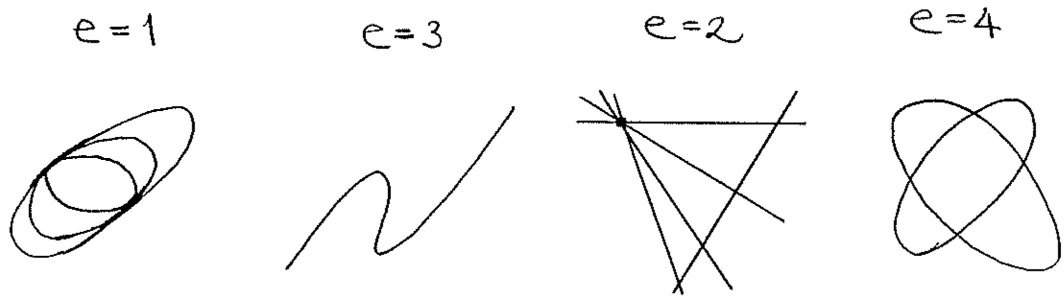
偏極の配分	楕円次数 e	両端の偏極の型
$2 = 1 + 1$	1	w_8, w_8
	3	w_0, w_0
$2 = 2 + 0$	2	w_7, w_1
	4	$w_2, 2w_1$

楕円次数 $1 \leq e \leq 4$ の値に応じて一種類づつある。

次数2の時の $\mathcal{K}_2$ のII型境界の分類は Friedman [6] と北岡-浪川両氏によってなされた。ここでの方法は前者に沿っている。次数2のK3曲面は monogonal でなければ6次曲線で分岐する $\mathbb{P}^2$ の2重被覆である。よって、

次数2のK3曲面のモジュライ空間 $\mathcal{K}_2$ は6次平面曲線のモジュライ空間と双有理同値である。後者は幾何学的不変式論により射影的にコンパクト化されるが、Shah [17] により境界に現われる6次曲線が分類されている。上の4個の $\mathcal{K}_2$ のIII型境界には次の平面6次曲線が対応する。

(5.4)



2点で相接する3つのconicの和　　2重3次曲線　　共点な4直線と2重直線の和　　conicと2重conicの和

$e=3,4$ の場合は、安定K3曲面の射影モデルが上の6次曲線で分岐する $\mathbb{P}^2$ の2重被覆になっているので対応は明らか。$e=1,2$ に対応する6次曲線の場合、それを分岐にして $\mathbb{P}^2$ の2重被覆 $S'\longrightarrow\mathbb{P}^2$ を作ると、$e=1$ の場合は2つの $\tilde{E}_8$ 型、$e=2$ の場合は1つの $\tilde{E}_7$ 型単純楕円特異点が現われる。対応する安定K3曲面の射影モデルは §2 の例を反対に辿る様にして各単純楕円特異点を次数1, 2のDel Pezzo曲面に置換えたものである。

(4.3) の射 亜: $\mathcal{K}_{2d}^{\wedge} \longrightarrow \mathcal{K}_{2d}^{\sigma}$ の境界での振舞については次が成立する。

(5.5) $\boxed{\text{命題}}$ 次数 2d の安定 K3 曲面 (S, L) の2つの有理成分での偏極の型が $\sum_{i=0}^{8} a_i w_i$, $\sum_{i=0}^{8} b_i w_i$ であるとする。((5.1) と (5.2) を参照) 点 $(S, L) \in \mathcal{K}_{2d}^{\wedge}$ において上の射 亜 が同型であるには S が楕円成分をもち、かつ、$a_8 b_8 \neq 0$ となることが必要充分である。また、同型でない時は (S, L) を通る正次元の部分多様体がつぶれる。

これより $\mathcal{K}_{2d}^{\sigma}$ の II型境界には余次元の高いものが沢山現われる。例えば、$\mathcal{K}_{2}^{\sigma}$ の場合、全て余次元2え。次に述べる $\mathcal{K}_{4}^{\sigma}$ の場合は最初の1つだけが余次元1である。

次数 2d=4 の場合、II型安定 K3 曲面は丁度9種類ある。モジュライ空間 $\mathcal{K}_4$ は $\mathbb{P}^3$ 内の4次曲面のモジュライ空間と双有理同値である。幾何学的不変式論による後者のコンパクト化の境界もやはり Shah により [18] において分類されている。(但し、[17] ほど完全ではないようにみえる。) Shahの分類と下の分類表

を対応づけるのは4次曲面(の退化)の幾何のいい演習問題であるので興味ある読者は試してみられたい。

(5.6) 次数4のII型安定偏極K3曲面の表

楕円成分の個数	偏極の配分	楕円次数	両端の偏極の型		射影モデルのモジュライ数
1	1+2+1	1	ω_8	ω_8	18
	0+4+0	2	ω_1	ω_1	2
0	2+2	2	ω_7	ω_7	3
		4	ω_2	ω_2	15
	3+1	3	ω_6	ω_0	7
	4+0	2	$2\omega_8$	ω_1	9
		4	ω_5	$2\omega_1$	6
		6	$\omega_1+\omega_2$	$3\omega_1$	2
		6	$2\omega_0$	$3\omega_1$	1

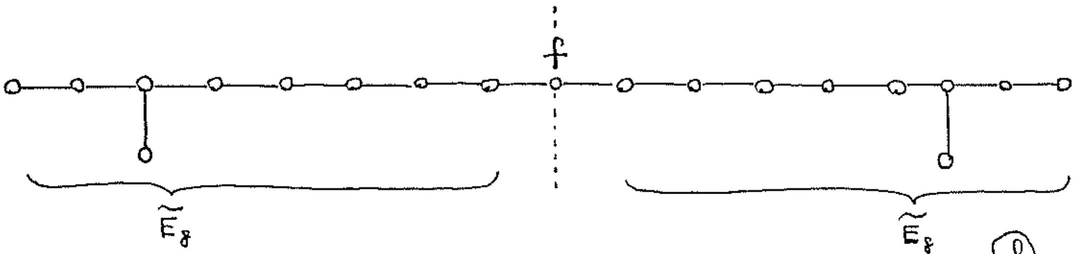
次数 $2d \geqq 6$ の時には、もはや Shah の次数 2, 4 の時に対応する結果はない。しかし、II型安定K3曲面の種類は(時間さえあれば)簡単に数え上げられる。次数10までのII型境界の数は次の通りである。

(5.7)

$2d$	2	4	6	8	10
II型安定K3曲面の種類	4	9	10	16	20

この節で述べたことから幾何的部分を取除いて格子論的にII型境界の数を数え上げることもできる。それは、II型K3格子 $\Lambda_{II} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \perp (-E_8) \perp (-E_8)$ の基本領域を求めることと同等である。これは Vinberg [ ] により得られていて19個の頂点よりなる次のΠ図形

(5.8)



から基本領域が定まる。これは2つの $\widetilde{E}_8$ を1頂点(f)を介してつないだもので、2つの $\widetilde{E}_8$ が安定K3曲面の有理成分、仲介の頂点 f が楕円成分を代表している。よって、我々の主定理(3.6)と命題(5.1)は数論なしで幾何的に Λ_{II} の基本領域を求めたことになっている。

なお、$2d \le 6$ の時のII型境界の個数は北岡-浪川両氏の方法とKneser氏の正定値格子の分類から既に得られていたことを浪川氏から教えていただいた。

参考文献

[1] Ash, A., D. Mumford, M. Rapoport and Y. Tai.: Smooth compactification of locally symmetric varieties, Math.-Sci. Press, 1975

[2] Deligne, P. and D. Mumford: The irreducibility of the space of curves of givem genus, Publ. Math. I.H.E.S. 36 (1970), 75-109.

[3] Friedman, R. and F. Scatonne: Type III degenerations of K3 surfaces, Invent. Math. 83 (1986), 1-39.

[4] Friedman, R.: Global smoothing of varieties with normal crossings, Ann. Math. 115 (1983), 75-114.

[5] Friedman, R.: Linear systems on anticanonical pairs, Appendix to [19].

[6] Friedman, R.: A new proof of the global Torelli theorem for K3 surfaces, Ann. Math. 120 (1984), 237-269.

[7] Gieseker, D.: Geometric invariant theory and applications to moduli problems, in 'Invariant Theory, Montecatini, 1982' Lecture Notes in Math. n^o 996, Springer, 1983, pp. 45-73.

[8] Gieseker, D.: Lectures on moduli of curves, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1982.

[9] Harrer, J.: The cohomology of moduli space of curves, in 'Theory of Moduli, Montecatini, 1985', Lecture Notes in Math. n^o 1337, Springer, 1988, pp. 138-221.

[10] Kempf, G., F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat: Troidal embeddings I, Lecture Notes in Math. n^o 339, Springer, 1973.

[11] Knudsen, F.: The projectivity of the moduli space of stable curves I, Math. Scand. 39 (1979).

[12] Kulikov, V.: Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces, Izv. Akad. Nauk SSSR 41 (1977), 1008-1042.

[13] Mumford, D.: Stability of projective varieties, (Lectures at I.H.E.S. 1976, Notes by I. Morrison) L'Ens. Math. 24 (1977).

[14] Perrson, U. and H. Pinkham: Degeneration of manifolds with trivial canonical bundles, Ann. Math. 113 (1981), 45-66.

[15] Piatečkii-Shapiro, I. and I.R. Shafarevic: A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Izv. Akad. Nauk. SSSR 35 (1971), 530-572.

[16] Reid, M.: Canonical 3-folds, Algebraic Geometry, Angers, 1979, pp. 273-310, 1980.

[17] Shah, J.: A complete moduli space for K3 surfaces of degree 2, Ann. Math. 112(1980), 485-510.

[18] Shah, J.: Degenerations of K3 surfaces of degree 4, Trans. Amer. Math. Soc. 26 (1981), 271-308.

[19] Shepherd-Barron, N.I.: Extending polarizations on families of K3 surfaces, in 'The Birational Geometry of Degenerations', Progress in Math. vol. 29, Birkhauser, 1983, pp. 135-171.

[20] Vinberg, E.B.: Some arithmetic discrete groups in Lobachevskii spaces, in 'Discrete subgoups of Lie groups', Oxford, 1975, pp. 323-348.

[21] Artin, M. and G. Winter: Degenerate fibres and stable reduction of curves, Topology 10 (1971), 373-383.