ＤＥ公式と同じ漸近性能を持つ
ＩＭＴ型積分公式

大浦拓哉

京都大学数理解析研究所

目次

はじめに

1. DE公式： 分点数 N に対する精度

DE(高橋，森 1974): $\exp\left(-cN/\log N\right)$

2. IMT型公式： 分点数 N に対する精度

IMT(伊理，森口，高澤 1970): $\exp\left(-c\sqrt{N}\right)$

IMT型DE(森 1978): $\exp\left(-cN/(\log N)^2\right)$

IMT-Double(室田，伊理 1982): $\exp\left(-cN/(\log N)^2\right)$

IMT-Triple: $\exp\left(-cN/\left((\log N)(\log\log N)^2\right)\right)$

IMT-Quadruple: $\exp\left(\dfrac{-cN}{(\log N)(\log\log N)(\log\log\log N)^2}\right)$

変数変換型公式(復習)

変数変換型公式: 変数変換＆台形則

台形則が高性能な場合:

1．滑らかな周期関数の１周積分

2．滑らかな関数の全無限区間積分

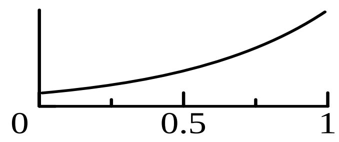
変数変換の例:

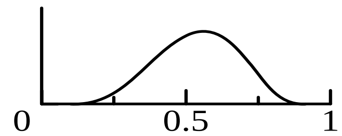
1．ＩＭＴ変換

2．ＤＥ変換

IMT公式(復習)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, \\
&\Downarrow \quad x = \phi(t) \\
I &= \int_0^1 f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t, \\
&\Downarrow \quad \text{台形則} \\
I_h &= h \sum_{n=1}^{N-1} f(\phi(nh))\phi'(nh), \quad h = 1/N
\end{aligned}
$$





$$
\phi(t) = \frac{1}{Q}\int_0^t \exp\left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)\mathrm{d}s, \quad Q = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)\mathrm{d}s
$$

IMT公式の性能とこれまでの改良(復習)

IMT公式(オリジナル):

$$|I - I_h| = O\left(\exp\left(-c\sqrt{N}\right)\right)$$

IMT型DE変換 $x = \tanh\left(A\sinh\left(B\left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}\right)\right)\right)$, (森 1978) and
IMT-Double変換 $x = \phi(\phi(t))$, (室田，伊理 1982):

$$|I - I_h| = O\left(\exp\left(-cN/(\log N)^2\right)\right)$$

IMT-Triple変換 $x = \phi(\phi(\phi(t)))$, (室田，伊理 1982):

$$|I - I_h| = O\left(\exp\left(-cN/\left((\log N)(\log\log N)^2\right)\right)\right)$$

提案するIMT型公式

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\Downarrow \quad x = \phi_{m,k}(t)\ \&\text{台形則} \\
I_h &= h \sum_{n=1}^{N-1} f(\phi_{m,k}(-1+nh))\phi'_{m,k}(-1+nh), \quad h = 2/N
\end{aligned}
$$

$$
\phi_{m,k}(t) = \operatorname{erf}\left(\frac{k}{(1-t)^m} - \frac{k}{(1+t)^m}\right), \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t
$$

パラメータ m, k を N に応じて最適に決める！

パラメータの決め方１

提案するIMT型公式の誤差：$|I - I_h| \sim E_1 + E_2$

$$
\begin{aligned}
E_1 &= A_1 \exp\left(-\left(\alpha' k^2\right)^{1/(2m+1)} \left(\frac{\pi N}{2m}\right)^{2m/(2m+1)} \right. \\
&\qquad \left. \cdot (2m+1) \sin \frac{\pi/2}{2m+1}\right) \\
E_2 &= A_2 \exp\left(-\frac{\pi^{3/2} \beta N}{4km}\right), \quad A_1, A_2, \alpha', \beta > 0
\end{aligned}
$$

E_1 と E_2 を等しくし，そのオーダーを最小にする

パラメータの決め方２

最適なパラメータ： $m = \dfrac{1}{2}\log N, \quad k = \dfrac{\mathrm{e}\beta}{\sqrt{\pi}}$

$$\Downarrow$$

$$\log E_1 \sim \log E_2 \sim -\frac{\pi^2 N}{2\mathrm{e}\log N}, \quad N \to \infty$$

$$\Downarrow$$

$$|I - I_h| = O\left(\exp\left(-cN/\log N\right)\right)$$

誤差評価概略

- **仮定1.** $f(z) = a(1-z^2)^\alpha + o(|1-z^2|^\alpha), \quad z \to \pm 1, \quad \alpha > -1;$

- **仮定2.** $f(z) = b(z-z_p)^{-1}(z-\bar{z}_p)^{-1} + O(1), \quad z \to z_p, \ \mathrm{Im}\, z_p > 0,$ $|z_p| \approx 0.$

誤差： $I - I_h = -\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{jN}(C_{jN} + C_{-jN}),$

$$C_n = \int_{-1}^{1} g(x) \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} n x}\, \mathrm{d}x, \quad g(x) = f(\phi_{m,k}(x))\phi'_{m,k}(x)$$

C_N を鞍点法で評価する$\Rightarrow E_1, E_2$ の評価が得られる

提案するIMT型公式(まとめ)

積分 $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ を計算：

$$\boxed{\begin{gathered} I_h = h \sum_{n=1}^{N-1} f(\phi_{m,k}(-1+nh))\phi'_{m,k}(-1+nh),\ h = 2/N, \\ \phi_{m,k}(t) = \mathrm{erf}\left(\frac{k}{(1-t)^m} - \frac{k}{(1+t)^m}\right), \\ m = \frac{1}{2}\log N,\ k = \mathrm{const.} \end{gathered}}$$

誤差：$|I - I_h| = O\left(\exp\left(-cN/\log N\right)\right)$

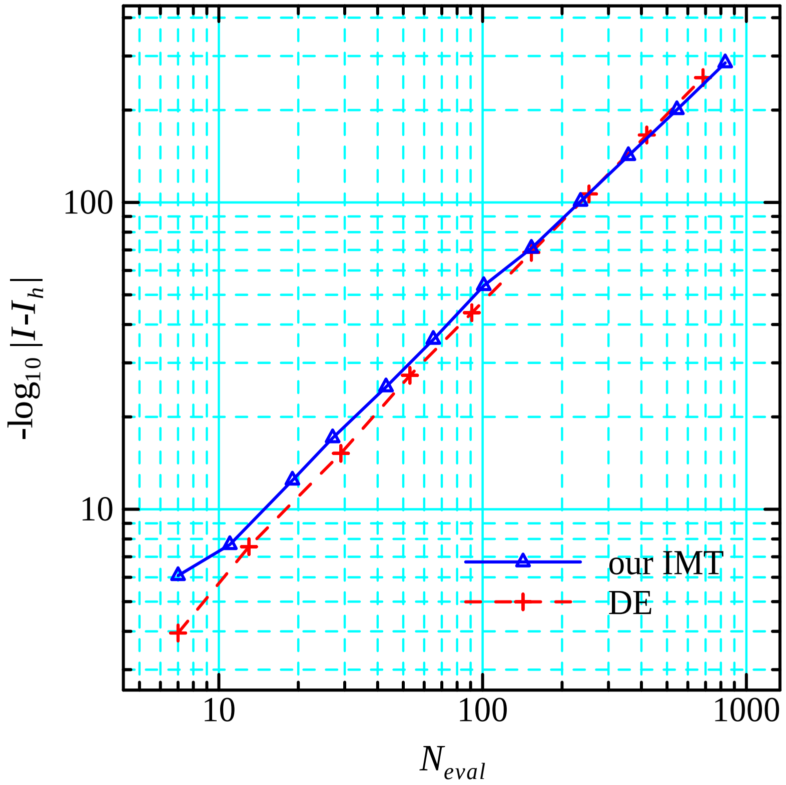
計算例

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \\
I_2 &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, \\
I_3 &= \int_{-1}^{1} \log(1+x)\,\mathrm{d}x, \\
I_4 &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)(1-x)^{3/4}(1+x)^{1/4}}
\end{aligned}
$$

1. 提案するIMT変換: $\phi_{m,k}(t) = \mathrm{erf}(k(1-t)^{-m} - k(1+t)^{-m})$, $m = (1/2)\log N$, $k = 2.2$

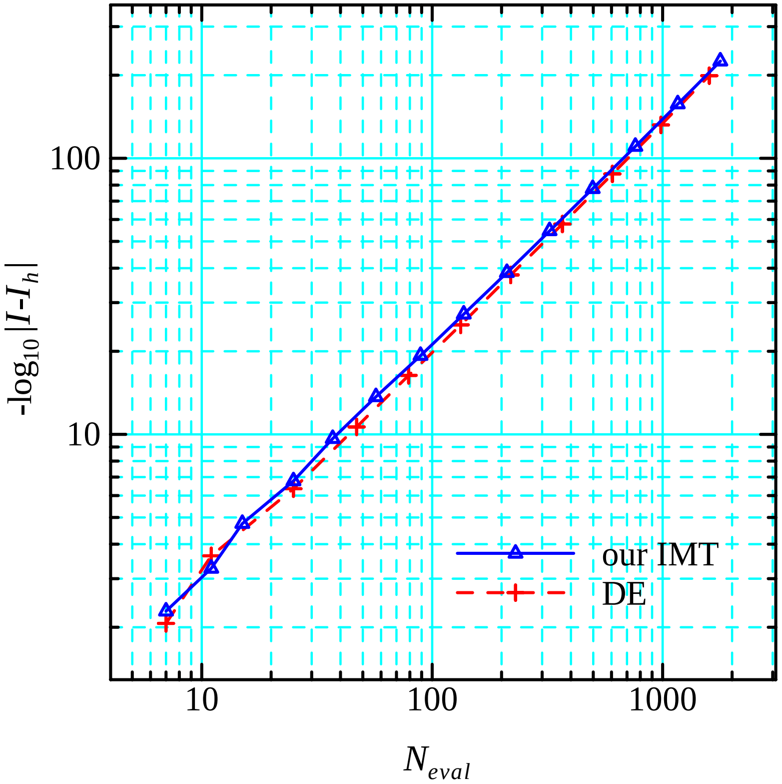
2. DE変換：$\phi_{\mathrm{DE}}(t) = \tanh((\pi/2)\sinh t)$.

提案するIMT型公式とDE公式の比較１



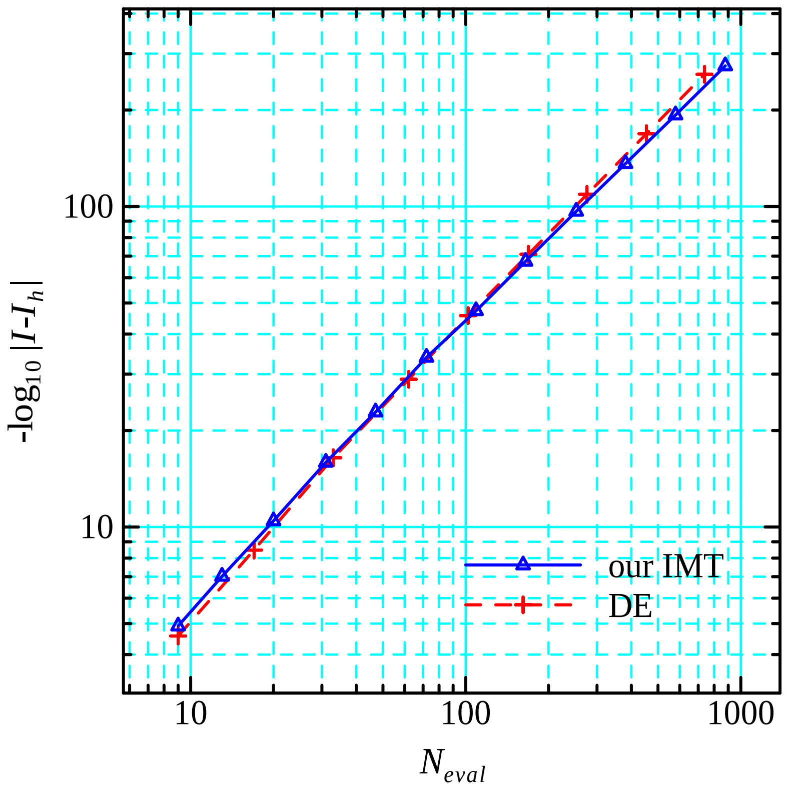
$I_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$ の計算精度

提案するIMT型公式とDE公式の比較2



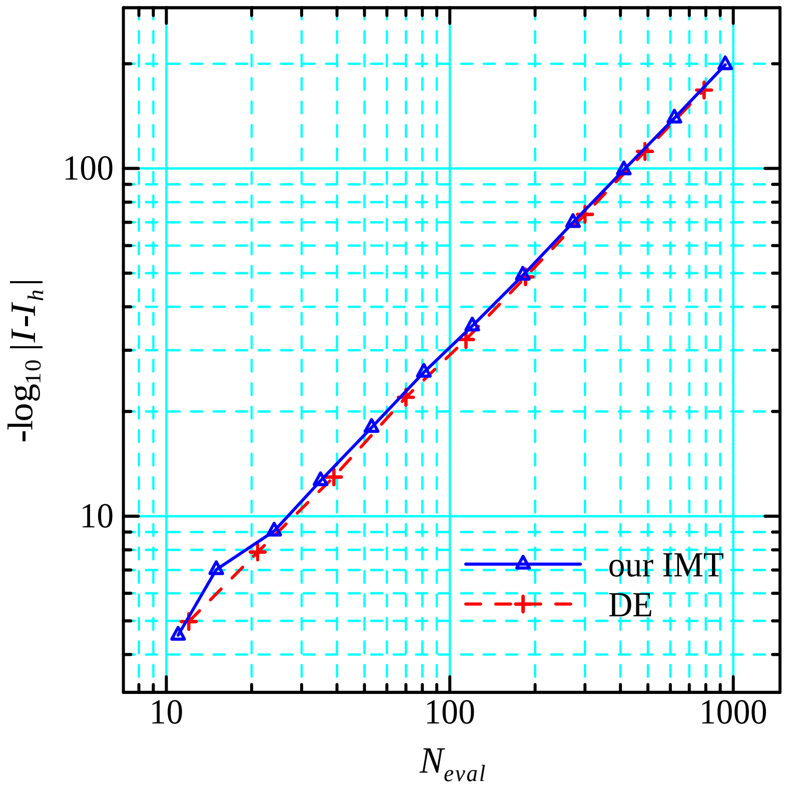
$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ の計算精度

提案するIMT型公式とDE公式の比較3



$I_3 = \int_{-1}^{1} \log(1+x)\,\mathrm{d}x$ の計算精度

提案するIMT型公式とDE公式の比較4



$I_4 = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)(1-x)^{3/4}(1+x)^{1/4}}$ の計算精度

提案するIMＴ型公式の極限

座標変換：$t = \tau/m$, $t \in (-1,1)$, $\tau \in (-m,m)$

提案するIMＴ型変換：

$$
\begin{aligned}
\phi_{m,k}(\tau/m) &= \mathrm{erf}\left(\frac{k}{(1-\tau/m)^m} - \frac{k}{(1+\tau/m)^m}\right) \\
&\sim \mathrm{erf}\,(2k\sinh\tau) = \phi_{*,k}(\tau) \quad \textbf{:DE変換} \\
&\qquad \text{as } m = \tfrac{1}{2}\log N \to \infty
\end{aligned}
$$

提案するIMＴ型公式の極限:

$$
I_h \sim h' \sum_{n=-N/2}^{N/2} f(\phi_{*,k}(nh'))\phi'_{*,k}(nh'), \quad h' = mh = \frac{\log N}{N}
$$

$\to$ **DE公式**

まとめ

- DE公式と同じ漸近性能を持つIMT型積分公式を提案した.
- 数値例より，提案するIMT型公式はDE公式と同程度の性能を持つことがわかった．特に単精度から倍精度付近では，提案するIMT型公式のほうが高性能である.
- 提案するIMT型型公式は，標本点数が無限大の極限でDE公式に近づく.