π の超越性

大浦拓哉

1 はじめに

まず最初に超越数とは何かということからはじめよう．整数係数の多項式による方程式の根 (解) となる複素数を**代数的数**という．そして，それ以外の代数的数ではない複素数が**超越数**である．具体的には，$\sqrt{2}$ は方程式 $x^2-2=0$ の根であるので代数的数となり，$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\sqrt[3]{2}$ も同様に代数的数となる．一方，超越数の代表例としては π や自然対数の底 e がある．

では π の超越性の証明はどのようにすればよいのだろうか．本稿では，リンデマン (F. Lindemann, 1852-1939) による証明 (1882 年) をさまざまな人によって単純化したものを紹介する．その証明の手法は，エルミート (C. Hermite, 1822-1901) による e の超越性の証明を基本にして，オイラー (L. Euler, 1707-1783) による有名な関係式 $e^{i\pi}+1=0$ $(i=\sqrt{-1})$ を用いてなされるものである．現在，この証明がもっとも理解しやすいと思われるが，いくつかの補題を必要とするので，多少複雑になってしまうことは承知しておいてほしい．

本稿での解説の流れは，まず概略をつかむため e の超越性を証明し，次に補題となる対称式の基本定理を理解した上で，π の超越性を証明する．

2 e の超越性

まず最初に，$f(x)$ を m 次の多項式として，

$$I(t)=\int_0^1 te^{t-tx}f(tx)dx$$

とおく．次に，部分積分を用いて，

$$\begin{aligned}I(t) &= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(-e^{t-tx}\right)f(tx)dx \\ &= e^t f(0)-f(t)+\int_0^1 te^{t-tx}f'(tx)dx\end{aligned}$$

と表せることに注意すると，

$$I(t)=e^t\sum_{j=0}^{m}f^{(j)}(0)-\sum_{j=0}^{m}f^{(j)}(t) \tag{1}$$

が得られる．ここで，$f^{(j)}(t)$ は $f(t)$ の j 次導関数である．一方，$f(x)$ の係数を絶対値で置き換えた多項式を $f^*(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}|I(t)| &= \left|\int_0^1 te^{t-tx}f(tx)dx\right| \\ &\le \max_{0\le x\le 1}\left|te^{t-tx}f(tx)\right| \\ &\le |t|e^{|t|}f^*(|t|) \qquad (2)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここでは t は実数であると考えているが，π の超越性の証明では t を複素数へと拡張する．t を複素数としても (1) 式，(2) 式が成り立つことは容易にわかる (付録 1, 2 を参照)．

この $I(t)$ の値をうまく評価することによって e の超越性が証明できる．

定理　e は超越数である．

[証明]　背理法による．e が代数的数であると仮定する．すなわちある整数 $n, a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n\ge 1, a_0\ne 0)$ が存在して

$$a_0+a_1e+\cdots+a_ne^n=0 \tag{3}$$

が成り立つと仮定する．次に，十分大きな素数を p として，多項式

$$f(x)=x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-n)^p$$

に関する $I(t)$ を考える．

$$J=a_0I(0)+a_1I(1)+\cdots+a_nI(n)$$

とおくと，(1) 式と (3) 式から，

$$J=-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_kf^{(j)}(k)$$

が得られる．ここで，m は $f(x)$ の次数なので $m=(n+1)p-1$ である．この J を 2 通りに評価することで矛盾を導く．

まず，$f(x)$ の係数は整数なので，$f^{(j)}(k)$ は整数であり J も整数である．さらに，$f(x)$ の形から以下のことがわかる．

- $j < p,\ 1 \leq k \leq n$ のとき $f^{(j)}(k) = 0$,
- $j < p-1$ のとき $f^{(j)}(0) = 0$,
- $j \geq p$ のとき $f^{(j)}(k)$ は $p!$ の整数倍 (なぜならば x^r の j 次導関数の係数は $\binom{r}{j} j!$ であり $j!$ の整数倍).

したがって，$j = p-1$, $k = 0$ のときを除いて，$f^{(j)}(k)$ は $p!$ で割り切れることがわかる．しかし，

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$$

であるので，$p > n$ のとき $f^{(p-1)}(0)$ は $(p-1)!$ では割り切れるが $p!$ では割り切れない整数となる．

したがって，$p > n$ かつ $p > |a_0|$ ならば，J は $(p-1)!$ では割り切れるが $p!$ では割り切れない整数であり，このとき

$$|J| \geq (p-1)!$$

を得る．

一方，$f(x)$ の形から $f^*(k) \leq (2n)^{np+p-1}$ であるので，(2) 式より，

$$|J| \leq |a_1| e f^*(1) + \cdots + |a_n| n e^n f^*(n) \leq c^p$$

と評価できる．ここで，c は

$$c = (|a_1| + \cdots + |a_n|)\, e^n (2n)^{n+1}$$

であり，p には依存しない正の数である．このとき，十分大きい p，例えば $\dfrac{p-1}{2} > c^2$ を満たすような p を選べば，

$$\begin{aligned} (p-1)! &\geq \frac{p-1}{2}\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\cdots(p-1) \\ &> \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{p+1}{2}} > c^p \end{aligned}$$

であるので，$|J|$ に関する 2 つの不等式は両立しない．これは矛盾である．(証明終)

3　対称式の基本定理

π の超越性の証明には，対称式の基本定理を用いる．そこで，少し話題を変えて対称式の基本定理について考えてみよう．

n 変数の多項式 $F(x_1, \ldots, x_n)$ が，任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対して

$$F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

を満たすとき，すなわち変数 $x_1, \ldots, x_n$ の順序の置き換えに対して不変であるとき，その F を**対称式**という．例えば $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $x_1 x_2 x_3 + 1$ は x_1, x_2, x_3 の対称式である．対称式は，多項式による方程式の根と係数の関係と深い関係がある．方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

の根を $x_1, \ldots, x_n$ とすれば，この方程式は

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0$$

であり，展開係数を比較すれば

$$\begin{aligned} -a_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s_1 \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = s_2 \\ &\cdots \\ (-1)^n a_n &= x_1 x_2 \cdots x_n = s_n \end{aligned}$$

となることががわかる．s_k は $x_1, \ldots, x_n$ の中から k 個取り出した積を，すべての組み合わせにわたって足したものである．これらは $x_1, \ldots, x_n$ の対称式であり，$s_1, \ldots, s_n$ を**基本対称式**という．基本と呼ぶ理由は，すべての対称式は基本対称式の多項式で表せるからである．これを**対称式の基本定理**という．一般的な証明法は，対称式の各項を辞書式順序に並べ替える方法であるが，ここでは二重帰納法を用いた証明を紹介しよう．

定理　対称式 $F(x_1, \ldots, x_n)$ は基本対称式の多項式 $G(s_1, \ldots, s_n)$ で表すことができ，G の係数は F の係数の加減算と整数倍で表される．

[証明]　多項式 $F(x_1, \ldots, x_n)$ の変数の数 n と，x_1 に関する次数 d についての帰納法を用いる．

まず最初に，$n = 1$ とすると基本対称式は $s_1 = x_1$ のみであり，明らかに定理は成り立つ．また，$d = 0$ とすると対称式 $F(x_1, \ldots, x_n)$ は，対称性からすべての x_j に関して定数となるので，明らかに定理は成り立つ．

次に，$n-1$ 変数の $x_1, \ldots, x_{n-1}$ の対称式について定理は成り立つと仮定する．さらに，n 変数の対

称式に関して，x_1 に関する次数が $d-1$ 以下のときも定理は成り立つと仮定する．この 2 つの仮定のもとで，n 変数の次数 d の対称式について定理が成り立つことを示して証明する．この証明は，通常の帰納法を二回繰り返して用いることでも証明できることから，正しいと確認できる (二重帰納法という).

記号の準備として，$x_1, \ldots, x_{n-1}$ の基本対称式を $s'_1, \ldots, s'_{n-1}$ と書き，$x_1, \ldots, x_n$ の基本対称式を $s_1, \ldots, s_n$ と書くことにする．このとき，$x_n = 0$ とおくと $s'_j = s_j$ となることに注意する．

次に，対称式 $F(x_1, \ldots, x_n)$ の x_1 に関する次数を d として，x_n に 0 を代入したものを考えよう．これは，$x_1, \ldots, x_{n-1}$ の対称式であり，帰納法の仮定からある多項式 H により

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = H(s'_1, \ldots, s'_{n-1})$$

と書ける．ここで，$H(s'_1, \ldots, s'_{n-1})$ の x_1 に関する次数は d 以下である．次に，$s'_1, \ldots, s'_{n-1}$ を $s_1, \ldots, s_{n-1}$ に置き換えた $H(s_1, \ldots, s_{n-1})$ を考え，

$$T(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) - H(s_1, \ldots, s_{n-1})$$

とおく．ここで，$H(s_1, \ldots, s_{n-1})$ の x_1 に関する次数は d 以下であり $T(x_1, \ldots, x_n)$ の次数も d 以下である．また，$x_n = 0$ を代入すると，

$$T(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$$

であるので，$T(x_1, \ldots, x_n)$ は x_n で割り切れ，さらに対称性を考慮すると $x_1, \ldots, x_n$ のどれでも割り切れることがわかる．したがって，

$$T(x_1, \ldots, x_n) = s_n U(x_1, \ldots, x_n)$$

となる．ここで，$U(x_1, \ldots, x_n)$ は次数 $d-1$ 以下の対称式であり，帰納法の仮定からある多項式 V により

$$T(x_1, \ldots, x_n) = s_n V(s_1, \ldots, s_n)$$

と書ける．以上をまとめると

$$\begin{aligned} &F(x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad = H(s_1, \ldots, s_{n-1}) + s_n V(s_1, \ldots, s_n) \end{aligned}$$

となり，$F(x_1, \ldots, x_n)$ は $s_1, \ldots, s_n$ の多項式で表される．(証明終)

4　π の超越性

証明の前に準備をしよう．α を代数的数とすると，整数係数の多項式

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad (4)$$

$n \geq 1$, $a_0 \neq 0$ が存在して $P(\alpha) = 0$ となる．このような多項式の中で次数 n がもっとも小さくかつ，$a_0 > 0$, $a_1, \ldots, a_n$ が互いに素となるものを α の**最小多項式**といい，整数係数の多項式上で既約 (因数分解不可能) の性質を持つ．また，代数学の基本定理より，α の最小多項式は n 個の根を持ち，それらを α の**共役**という．

補題 1　代数的数 α の共役を $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ とし，最小多項式の最高次の係数を a_0 として $l \geq 1$ を a_0 の整数倍とする．このとき，$l\alpha_1, \ldots, l\alpha_n$ の整数係数の対称式 $F(l\alpha_1, \ldots, l\alpha_n)$ は整数となる．

[証明]　α の最小多項式を (4) 式とするとき，

$$\begin{aligned} \frac{l^n}{a_0} P(x/l) &= (x - l\alpha_1)(x - l\alpha_2) \cdots (x - l\alpha_n) \\ &= x^n - s_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n \end{aligned}$$

と表される．ここで，$l\alpha_1, \ldots, l\alpha_n$ の基本対称式 $s_1, \ldots, s_n$ は $a_1(-l)/a_0, \ldots, a_n(-l)^n/a_0$ に等しく整数であるので，対称式の基本定理により $F(l\alpha_1, \ldots, l\alpha_n)$ は整数となる．(証明終)

補題 2　α, β を代数的数とすると，$\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$, α/β $(\beta \neq 0)$ も代数的数である．

[証明]　α, β の最小多項式をそれぞれ $P_\alpha(x)$, $P_\beta(x)$ とし，α, β の共役をそれぞれ $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ とする．さらに，$P_\alpha(x)$ の最高次の係数を a_0，$P_\beta(x)$ の最高次の係数を b_0 として，その積を $l = a_0 b_0$ とする．次に，

$$\begin{aligned} P_{\alpha+\beta}(x) &= \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} (lx - (l\alpha_j + l\beta_k)) \\ &= (lx)^{nm} + d_1 (lx)^{nm-1} + \cdots + d_{nm} \end{aligned}$$

を考える．ここで，$\displaystyle\prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n}$ は j を 1 から m まで，k を 1 から n まで代入した，mn 個の項に対して積をとることを意味する．このとき，展開係数 d_j は $l\alpha_1, \ldots, l\alpha_m$ と $l\beta_1, \ldots, l\beta_n$ の対称式であり，対称式

の基本定理により $(l^m/a_0)P_\alpha(x/l)$ と $(l^n/b_0)P_\beta(x/l)$ の係数で表される．したがって，d_j は整数である．$\alpha-\beta, \alpha\beta$ についても同様である．

α/β に関しては β^{-1} についてのみ示せばよい．β の最小多項式を (4) 式とすると

$$\beta^{-n}P(\beta)=a_0+a_1\beta^{-1}+\cdots+a_n\beta^{-n}=0$$

となり，明らかである．(証明終)

定理　π は超越数である．

[証明]　π が代数的数であると仮定すると，補題 2 から $\theta=i\pi$ $(i=\sqrt{-1})$ も代数的数である．ここで，$\theta_1=\theta,\theta_2,\ldots,\theta_d$ を θ の共役とすると，関係式 $e^{i\pi}+1=0$ より

$$(1+e^{\theta_1})(1+e^{\theta_2})\cdots(1+e^{\theta_d})=0$$

が成り立つ．左辺を展開したものは，2^d 個の e^φ という項の和で，$\varphi=\delta_1\theta_1+\cdots+\delta_d\theta_d$, $\delta_j=0,1$ という形をしている．φ の中で 0 でないものが n 個あったとして，それらを $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ とおくと

$$q+e^{\alpha_1}+\cdots+e^{\alpha_n}=0 \tag{5}$$

が得られる．ここで，$q=2^d-n$ は正の整数である．次に，p を十分大きい素数，l を θ の最小多項式の最高次の係数として，

$$f(x)=l^{np}x^{p-1}(x-\alpha_1)^p\cdots(x-\alpha_n)^p$$

とおいて，e の超越性のところで定義した積分 $I(t)$ を考える．

$$J=I(\alpha_1)+\cdots+I(\alpha_n)$$

とおくと，(1) 式と (5) 式から，

$$J=-q\sum_{j=0}^{m}f^{(j)}(0)-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}f^{(j)}(\alpha_k)$$

が得られる．ここで，$m=(n+1)p-1$ である．この J を 2 通りに評価することで矛盾を導く．

まず，多項式 $f(x)$ の係数は $l\alpha_1,\ldots,l\alpha_n$ の整数係数の対称式である．$l\alpha_1,\ldots,l\alpha_n$ の対称式は $l\theta_1,\ldots,l\theta_d$ の置換に対して不変であるので，$f(x)$ の係数は $l\theta_1,\ldots,l\theta_d$ の整数係数の対称式でもある．したがって，補題 1 より多項式 $f(x)$ の係数は整数であり，$f^{(j)}(0)$ も整数である．また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f^{(j)}(\alpha_k)$ が整数となることも同様にして補題 1 よりわかる．さらに，$f(x)$ の形から以下のことがわかる．

- $j<p$, $1\le k\le n$ のとき $f^{(j)}(\alpha_k)=0$,
- $j<p-1$ のとき $f^{(j)}(0)=0$,
- $j\ge p$ のとき $f^{(j)}(0)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f^{(j)}(\alpha_k)$ はともに $p!$ で割り切れる (x^r の j 次導関数の係数は $j!$ の整数倍になることと，補題 1 よりわかる)．

しかし，

$$f^{(p-1)}(0)=(p-1)!(-1)^{np}(l\alpha_1\cdots l\alpha_n)^p$$

であるので，十分大きい p に対して $f^{(p-1)}(0)$ は $(p-1)!$ では割り切れるが $p!$ では割り切れない整数となる．したがって，

$$|J|\ge(p-1)!$$

という評価を得る．

一方，(2) 式から，e の超越性の証明と同様にして，

$$|J|\le\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|e^{|\alpha_k|}f^*(|\alpha_k|)\le c_1^p$$

が得られる．ここで，c_1 は p には依存しない正の数である．したがって，十分大きい p に対して，$|J|$ に関するこれらの不等式は両立しない．(証明終)

5　終わりに

ギリシャの三大作図問題の一つである円積問題「与えられた円と同じ面積をもつ正方形を定規とコンパスのみで作図せよ」は 19 世紀まで多くの人たちを悩ませ続けてきた．定規とコンパスで作図できる数は，四則演算と平方根を有限回用いて得られる数であり，代数的数である．したがって，π の超越性の証明により $\sqrt{\pi}$ も超越数になることから，円積問題に決着がついて不可能であることが証明されたのである．

π の超越性の証明は，整数と四則演算を用いた有限の手続きでは π が定義できないことを主張するものである．誰もが最初に教わる数学定数 π が，このような性質を持つことはたいへん興味深いことであると私は考える．

付録 1　オイラーの関係式の導出

(1) 式において，t を実数，$f(x) = x^m/m!$ とすると，

$$I(t) = e^t - \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^m}{m!}\right)$$

となる．このとき，(2) 式より，

$$|I(t)| \leq |t|e^{|t|}\frac{|t|^m}{m!}$$

となり，$k = \lfloor 2|t| \rfloor$ とおいて ($\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数)，$m > k$ となる m に対して，

$$\frac{|t|^m}{m!} = \frac{|t|^k}{k!} \cdot \frac{|t|}{k+1} \cdots \frac{|t|}{m} < \frac{|t|^k}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}$$

と評価できるので，t を固定して m を大きくすると $|I(t)|$ は 0 に収束する．したがって，

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \qquad (6)$$

を得る．(6) 式の右辺は t が複素数でも収束するので，e^t を t が複素数の場合にも拡張できる．

また，t を実数，$f(x)$ を m 次の多項式として，

$$I_{\mathrm{c}}(t) = \int_0^1 t\cos(t - tx)f(tx)dx$$

とおくと，部分積分を繰り返し用いることで，

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{c}}(t) &= \sin t \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor}(-1)^j f^{(2j)}(0) \\ &\quad - \cos t \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor}(-1)^j f^{(2j+1)}(0) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor}(-1)^j f^{(2j+1)}(t) \end{aligned}$$

が成り立ち，絶対値を取ることで，

$$|I_{\mathrm{c}}(t)| \leq |t|f^*(|t|)$$

という評価が成り立つ．$f(x) = x^{2n+1}/(2n+1)!$ または $f(x) = x^{2n}/(2n)!$ とおいて，t を固定して n を大きくすることで，

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots \qquad (7)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \qquad (8)$$

が得られる．(6) 式と (7) 式と (8) 式を比較することで，関係式

$$e^{it} = \cos t + i\sin t, \quad i = \sqrt{-1}$$

が成り立つことがわかる．この関係式の特殊な場合として，$e^{i\pi} = -1$ が得られる．

付録 2　複素変数での $I(t)$ の評価

x を実数，t を複素数とし，t の実部，虚部をそれぞれ u，v とおくと，(6) 式，(7) 式，(8) 式から，

$$e^{t-tx} = e^{u-ux}\left(\cos(v - vx) + i\sin(v - vx)\right)$$

であり，これの実部と虚部をそれぞれ x で微分して整理すると，

$$\frac{d}{dx}e^{t-tx} = -te^{t-tx}$$

が成り立つ．したがって，複素数 t に対しても $I(t)$ の部分積分が成り立ち，(1) 式が成り立つ．

また，$t = u + iv$ として，$0 \leq x \leq 1$ となる x に対して，

$$\begin{aligned} |e^{t-tx}| &= e^{u-ux}|\cos(v - vx) + i\sin(v - vx)| \\ &= e^{u-ux} \leq e^{|t|} \end{aligned}$$

なので，複素数 t に対しても (2) 式が成り立つ．