流体運動の Lagrange 的な記述と Lie 群上の力学系としての記述と運動の保存量に関する覚え

あらきけいすけ (岡山理科大, 工)

July 17, 2007

2007 年の流体若手夏の学校のために三松先生のノート [1] に対する流体力学の用語での注釈をつけようとしてノートを書き出したら、収拾がつかなくなった。剛体の運動と流体の運動の間の対応関係については『非圧縮理想流体力学の数学的方法 (仮)』[2] で述べたので、そっちも参考にして欲しい。

ラベル座標 $\vec{a}$ の流体粒子の時刻 t での位置を表す関数 $\vec{X}_t(\vec{a})$ (本稿では position map と呼ぶ、三松ノートでは ϕ) とその逆関数 (back-to-labels map) $\vec{A}_t(\vec{x})$ を導入することで、Lie 群上の力学系の用語と流体力学での記述法との関連の見通しが良くなる。

特に重要なことは position map と back-to-labels map の Jacobi 行列 $\dfrac{\partial X_t^j}{\partial a^i}$, $\dfrac{\partial A_t^j}{\partial x^i}$ が Lie 群的記述における用語、**随伴軌道**、**余随伴軌道**の変換行列となることである。たとえば非圧縮完全流体の初期渦度を $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ と置くと、時刻 t での渦度場 $\boldsymbol{\omega}_t$ は成分 ω_0^i に変換行列 $\dfrac{\partial X_t^j}{\partial a^i}$ を掛けて

$$\omega_t^j(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^j} = \omega_0^i(\vec{A}_t(\vec{x}))\left.\frac{\partial X_t^j}{\partial a^i}\right|_{\vec{A}_t(\vec{x})}\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1}$$

となる。これが**随伴軌道**を成分を用いて具体的に書き下したものである。

それから運動学的保存量を統一的な視点で整理する。その際に back-to-labels map も保存量に含めることで Tur and Yanovsky の議論 [3] を少し拡張することが出来ている。

nomencrature

三松ノート	このノート	意味
M	M	流体の容器
ϕ	$\vec{X}_t$	position map
ϕ^{-1}	$\vec{A}_t$	back-to-labels map
X_t	$\boldsymbol{u}_t$	position map $\phi = \vec{X}_t$ から誘導される Euler 的速度場

流体の容器 M

流体の容器を M とする。M には座標系 $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$ が張ってある[1]。 この座標系とともに Riemann 計量 $g = (g_{ij})$ が定義されていて、点 $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3) \in M$ を始点とするベクトル $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in T_{\vec{p}}M$ の長さは $|\boldsymbol{\xi}| = \sqrt{g_{ij}(\vec{p})\xi^i\xi^j} \in \mathbb{R}$ で与えられる。

対訳: 多様体 $\Longleftrightarrow$ 流体の容器
対訳: Riemann 計量 $\Longleftrightarrow$ 「内積、長さが定義されている」という宣言

[1] これは Euler 的な固定された座標系である。ここでは座標を書いたら、全部、この Euler 的な座標での値を考えているものとする。以下、添え字の上付き (反変成分、ベクトル場)、下付き (共変成分、微分 1-形式) は微分位相幾何学の convention に従う (つもり)。ただし「時間」「摂動パラメーター」も下付きの添え字で書く。

position map $\vec{X}_t$, γ_t: 流体粒子を Lagrange 的に追跡する関数

初期時刻 $(t = 0)$ に位置 $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$ にあった流体の時刻 t での位置を $\vec{X}_t(\vec{a}) = \big(X^1_t(a^1, a^2, a^3), X^2_t(a^1, a^2, a^3), X^3_t(a^1, a^2, a^3)\big)$ とする。ここに現れる関数の三つ組み $\vec{X}_t = \big(X^1_t,\ X^2_t,\ X^3_t\big)$ を position map と呼ぶことにする[2]。

本稿ではこの関数の組 $\vec{X}_t$ を γ_t とも表記する。群論的な表記をしたいときに使う。
この群の座標への演算を $\gamma_t\vec{a}$ と表記する: $\gamma_t\vec{a} := \vec{X}_t(\vec{a})$.
この position map で決まる時刻 t での Euler 的な速度場を $\boldsymbol{u}_t = u^i_t \frac{\partial}{\partial x^i}$ とする。

back-to-labels map $\vec{A}_t$, γ_t^{-1}: 流体粒子のラベル座標を求める関数

次に position map の逆写像を定義する。時刻 t に位置 $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ にあった流体の初期時刻 $t = 0$ での位置を $\vec{A}_t(\vec{x}) = \big(A^1_t(x^1, x^2, x^3), A^2_t(x^1, x^2, x^3), A^3_t(x^1, x^2, x^3)\big)$ とする。この関数の三つ組み $\vec{A}_t = \big(A^1_t, A^2_t, A^3_t\big)$ を position map $\vec{X}_t$ に対応する back-to-labels map と呼ぶことにする[3]。

前項の表記 γ_t に対応して、$\vec{A}_t$ は γ_t^{-1} とも書かれる。
本稿では、初期時刻に流体粒子に割り振ったラベル座標に文字 a, A を、一般の時刻の Euler 的座標に文字 x, X を当てている。

back-to-labels map は次の発展方程式に従う:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) A_t = 0. \tag{2}$$

これは back-to-labels map がパッシブスカラー型 (微分 0-形式) の保存量であることを示している。

これらの map の合成関数 $\vec{X}_t \circ \vec{Y}_s$, $\gamma_t\eta_s$: Lie 群

二つの position/back-to-labels map ($\vec{X}_t$, $\vec{Y}_t$ としよう) があったとき、合成関数 $\vec{X}_t \circ \vec{Y}_s := \vec{X}_t(\vec{Y}_s)$ を考えることが出来る。これは時間 $[0, s]$ は $\vec{Y}_s$ で流し、その後で時間 $[s, s+t]$ では $\vec{X}_t$ で流すことを意味している。

ここで position map の集合は関数の合成 $\circ$ に関して結合法則、逆元、単位元を定義できるので、形式的には**連続群 (Lie 群)** をなしていると言える[4]。 この群を微分同相写像群 Diff$M$ と呼ぶ。

対訳: 微分同相写像群 Diff$M$ $\Longleftrightarrow$ position map の集合
対訳: 体積保存微分同相写像群 Diff(M,dvol), SDiff$M$ $\Longleftrightarrow$ 非圧縮流の position map の集合

群論型表記 γ_t に対応する、群の積演算の表記は単に「横に並べて書く」ことにする: $\gamma_t\eta_s$ (ここで $\gamma_t = \vec{X}_t$, $\eta_s = \vec{Y}_s \in G$). このとき $\gamma_t\eta_s\vec{a} := \vec{X}_t\big(\vec{Y}_s(\vec{a})\big)$ とする。

これらの map の導関数：Lie 群の (余) 随伴表現の成分行列

position/back-to-labels map の間には関係

$$X^i_t(\vec{A}_t(\vec{x})) = x^i, \qquad A^i_t(\vec{X}_t(\vec{a})) = a^i \tag{3}$$

が成り立っているので、これらを空間変数に関して微分して

$$\left.\frac{\partial X^i_t}{\partial a^k}\right|_{\vec{A}_t(\vec{x})} \left.\frac{\partial A^k_t}{\partial x^j}\right|_{\vec{x}} = \delta^i_j, \qquad \left.\frac{\partial A^i_t}{\partial x^k}\right|_{\vec{X}_t(\vec{a})} \left.\frac{\partial X^k_t}{\partial a^j}\right|_{\vec{a}} = \delta^i_j \tag{4}$$

---

[2] "position map" というのは荒木の造語である。名前が無いと不便なので付けた。Kaneda が LRA の定式化で導入した "the Lagrangian position function" のパロディである [4]。position map の関数空間は線形ではないので、「ベクトル」ではなく「関数の三つ組み」と表現した。流体の容器 M 上に値を取る量は「上付き矢印」で明示する。

[3] "back-to-labels map" の名称は Constantin の論文 [5] から借用した。

[4] Kobayashi and Nomizu の教科書には"pseudo-group" と書かれている。[6]

を得る。あとで見るように position/back-to-labels map の Jacobi 行列 $\dfrac{\partial X_t^i}{\partial a^j}$, $\dfrac{\partial A_t^i}{\partial x^j}$ は Lie 群のベクトル場、微分 1-形式の空間への作用を表す変換行列であり、この式はこれらが互いに逆行列の関係にあることを意味している。Back-to-labels map の余因子を用いて position map の Jacobi 行列を書き下すと

$$\left.\frac{\partial X_t^i}{\partial a^j}\right|_{\vec{A}_t(\vec{x})} = \frac{1}{2!}\epsilon_{jab}\epsilon^{imn}\left.\frac{\partial A_t^a}{\partial x^m}\right|_{\vec{x}}\left.\frac{\partial A_t^b}{\partial x^n}\right|_{\vec{x}} \Bigg/ \det\left(\frac{\partial \vec{A}_t}{\partial \vec{x}}\right)_{\vec{x}} \tag{5}$$

となる。これを用いて (微分 2-形式)/(微分 3-形式) の成分の変換がベクトル場の成分の変換と同じ変換則を満たしていることを示せる。バロトロピック流体では渦度が微分 2-形式の保存量、流体の質量密度が微分 3-形式の保存量であるから、(渦度)/(密度) で与えられる量がベクトル場の保存量すなわち流体に凍結した線要素ベクトルになっている。

Lagrange 的速度の微分位相幾何学的に正しい表記

position map から導かれる速度場を求めよう。流れの履歴 $\vec{X}_t$ の下での初期位置 $\vec{a}$ の流体粒子の時刻 t での速度ベクトルの i-成分の値は

$$\dot{X}_t^i(\vec{a}) := \lim_{\tau\to 0}\frac{X_{t+\tau}^i(\vec{a}) - X_t^i(\vec{a})}{\tau} \tag{6}$$

である。このベクトルの始点は $\vec{X}_t(\vec{a})$ にあるから、関数 $\vec{X}_t(\vec{a})$ の t に関する微分から導かれるベクトル場は[5]

$$\dot{\vec{X}}_t(\vec{a}) := \dot{X}_t^i(\vec{a})\frac{\partial}{\partial X_t^i(\vec{a})} \tag{7}$$

となる。これが微分位相幾何学的に正しい Lagrange 速度場の表式である。重要な点はベクトル場の成分の関数の引数 $\vec{a}$ とベクトルの起点 $\vec{X}_t(\vec{a})$ が食い違っていることである[6]。 したがって引数無しの数式 $\dot{X}_t^i\partial/\partial x^i$ は微分幾何学的にミスリーディングになる。だから Lagrange 的場では引数を必ず書くことにする。

ここで Euler 速度場との関係をきちんと書き出しておこう。position map $\vec{X}_t$ から導かれる時刻 t での Euler 速度場を $\boldsymbol{u}_t = u_t^i\partial/\partial x_i$ と書くとき、Lagrange 速度と Euler 速度の関係は

$$\dot{X}_t^i(\vec{a})\frac{\partial}{\partial X_t^i(\vec{a})} = u_t^i(\vec{X}_t(\vec{a}))\frac{\partial}{\partial X_t^i(\vec{a})} \tag{9}$$

となる。これが通常の文献では $d\boldsymbol{X}/dt = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$ などと無造作に書かれる式の厳密な表現である[7]。

Lie 群の Lie 代数

Lie 群とは「連続性」をもっている群のこと。例えば回転群は回転角を連続的に変化させられるので Lie 群である。「連続性」があるので微分を計算でき、群の「接平面」を考えることができる。Lie 群の原点 e で

---

[5] ここで微分位相幾何学のおやくそく (convention) から逸脱した表記を導入する。微分位相幾何学ではベクトル場を $\boldsymbol{u} = u^i\partial/\partial x^i$ と書く。ここで u^i は座標系 (x^i) でのベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の反変成分といい、$\partial/\partial x^i$ はベクトル場の基底である。このベクトル場の**点 $\vec{p}$ での値**を微分幾何では $\boldsymbol{u}(\vec{p}) = u^i(\vec{p})(\partial/\partial x^i)_{\vec{p}}$ と書くが、本稿ではこれを $\boldsymbol{u}(\vec{p}) = u^i(\vec{p})\partial/\partial p^i$ と横着して書く。基底 $\partial/\partial x^i$ は微分演算子でもある。演算のルールを次のように決める。

$$u^i(\vec{p})\frac{\partial}{\partial p^i}: \qquad f \longrightarrow u^i(\vec{p})\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\vec{p}} \tag{8}$$

でもしばらくはそのことを気にせずに**ベクトル場を構成するおのおのの矢印ベクトルの生えている場所**と成分の番号を明示するための記号だと思ってくれ。

この横着な表記法には利点が無いわけではない。ベクトル場の**左**移動が形式的な連鎖律で書けるからである:

$$(L_{\gamma_t})_*: \ u^i(\vec{a})\frac{\partial}{\partial a^i} \ \longrightarrow \ u^i(\vec{a})\left.\frac{\partial X_t^j}{\partial a^i}\right|_{\vec{a}}\frac{\partial}{\partial X_t^j(\vec{a})}.$$

[6] このことを「場が Lagrange 的である」ことの定義とする。

[7] ベクトル場 $\dot{X}_t^i(\vec{a})\frac{\partial}{\partial a^i}$ を定義することはできなくもないが有意義とは思えない。

の接平面 T_eG とするとき、Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とは接平面 T_eG の元の左 (右) 移動で構成される左 (右) 不変ベクトル場の集合のこと。

まず T_eG の元を考える。前節の Lagrange 速度の表記を $t=0$ で考えると

$$\left(\dot{X}_t^i(\vec{a})\frac{\partial}{\partial X_t^i(\vec{a})}\right)_{t=0} = u_0^i(\vec{a})\frac{\partial}{\partial a^i} \tag{10}$$

となり、成分の引数と基底の起点が一致する場、すなわち Euler 的な場が得られる。これの「右移動」は Lagrange 的な場

$$(R_{\gamma_t})_*\boldsymbol{u} = u^i(\vec{X}_t(\vec{a}))\frac{\partial}{\partial X_t^i(\vec{a})} \tag{11}$$

なのだが、なぜこれが「**右**移動」なのかは後述する。

> **対訳: 接平面 T_eG, $\Longleftrightarrow$ Euler 的な場の集合**

一方で Lie 代数とは「交換子積の定義された線形空間」のことでもあるのだが、「交換子」がどのように定義されるかについては『Hausdorff の公式』節で議論しよう。

G 上の右不変ベクトル場

$\boldsymbol{u} \in T_eG$ の右移動で得られる G 上の右不変ベクトル場 ($\vec{\boldsymbol{u}}$ と表記する) とは、その $\gamma = \vec{X} \in G$ での値が $\vec{\boldsymbol{u}}(\gamma) = (R_\gamma)_*\boldsymbol{u} = u^i(\vec{X}(\vec{a}))\partial/\partial X^i(\vec{a})$ で与えられるもの、すなわち「任意のラベル配位に対する Lagrange 的な場の集合」のことである。

> **対訳: Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ $\Longleftrightarrow$ Lagrange 的な場の集合。**

自分でもかなり乱暴な『対訳』だと思う。Arnold の『数学的方法』では「右不変ベクトル場」と「ベクトル場 (本稿では Euler 的な場)」に同じフォントを当てているのでややこしくてかなわない。

Lie 群の Riemann 計量

Lie 群 $G = \mathrm{Diff}M$ の Riemann 計量の点 $\gamma = \vec{X} \in G$ での値を次式で与える:

$$\left\langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \right\rangle_\gamma := \int_{\vec{a}\in M} \left(g_{ij}\, u^i\, v^i\, \sqrt{|g|}\right)_{\vec{X}(\vec{a})} dX^1(\vec{a}) \wedge dX^2(\vec{a}) \wedge dX^3(\vec{a}) \tag{12}$$

ここで $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に G を作用させて得られる右不変ベクトル場、g_{ij} は M の Riemann 計量、$\sqrt{|g|} = \sqrt{\det(g_{ij})}$ である[8]。この式を見て積分変数を Euler 的な座標に換えても値が同じではないか

$$\int_{\vec{a}\in M} \left(g_{ij}\, u^i\, v^i\, \sqrt{|g|}\right)_{\vec{X}_t(\vec{a})} dX^1(\vec{a}) \wedge dX^2(\vec{a}) \wedge dX^3(\vec{a}) = \int_{\vec{x}\in M} \left(g_{ij}\, u^i\, v^i\, \sqrt{|g|}\right)_{\vec{x}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{13}$$

と思われるであろう。そのとおりだ。このことを**計量 $\langle *, * \rangle$ は右不変である**と呼ぶ。

> **対訳:** G 上の Riemann 計量 $\Longleftrightarrow$ Lagrange 的なベクトル場の内積。
> **対訳:** G 上の Riemann 計量が**右不変** $\Longleftrightarrow$ 非圧縮完全流体のベクトル場の内積 ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ なら Lagrangian) が**ラベルの付け替えに対して不変**。

非圧縮性流体の Lagrangian はこの計量を用いて $L(\gamma_t, \dot{\gamma}_t) = \left\langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}} \right\rangle_{\gamma_t}/2$ と表される。この Lagrangian の不変性が、非圧縮完全流体の運動を Noether の定理を用いて議論する際の出発点となる。**このとき Noether の定理から導かれる保存則の式は非圧縮完全流体の運動方程式 (Euler 方程式) である。**

注意:剛体の運動 (Lie 群 $SO(3)$ 上の力学系) の場合、Noether の定理は実験室系 (というか空間に固定された座標系) での角運動量の保存の式を導く。はっきりいって、剛体がどのような姿勢にあるかについての情報は得られないので、あまり有り難味を感じない。剛体に固定された座標系での運動を解かないと姿勢は分らない。多分、流体の運動の場合もこれと理論的に似たような状況になっているんだと思う。

[8] M 上の点 $\vec{x}$ の近傍の体積要素は $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ ではなく $\sqrt{|g|}(\vec{x})\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ である。

「測地線」についてのコメント

完全流体の運動方程式 (Euler 方程式) は配位空間 (G=Diff$M$) 上の作用積分の第 1 変分として導かれる。Arnold が『数学的方法』で言っていることは、この変分の停留曲線の方程式が**たまたま** G 上の Riemann 計量から誘導される Levi-Civita 接続に関する測地線**にも**なっているということだ。流体の Lagrange 力学の観点から見ると、接続と曲率に関する議論の部分は**かなり浮いている**ように思える。というのも、この Levi-Civita 接続に伴う「平行移動」が一般には群の表現になっていないし、この接続を導入しなくても力学系の議論ができるからである。

指数写像

指数写像は連続群の Lie 代数にとって基本的な計算ツールなのだが、「微分幾何学的流体力学」のレビュー、教科書でこの事項が丁寧に書かれたものがあまり無いような気がする (寡聞でゴメン)。

これは量子力学でエルミート作用素 (運動方程式＝無限小時間の推移) からユニタリー作用素 (有限時間の推移) を形式的に書き下すときの手法と同じである。つまり Lie 代数の元であるエルミート行列を H からユニタリー行列 $U = \exp(tH) = E + tH + t^2H^2/2! + \cdots$ を作る手続きである。

Lie 代数 (Euler 的ベクトル場) は Lie 群 (position map) の微分で出来る。逆に Euler 的なベクトル場 (Lie 代数) から position map (Lie 群) を求めるための「積分」はどのようなものか。ここで時間的に変化しない速度場 $\boldsymbol{u} = u^i\partial/\partial x^i$ による有限時間の移流をあらわす position map を**指数写像**と呼び、記号 $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{u}}$ あるいは $\exp(t\boldsymbol{u})$ で表そう。

Euler 的な速度場 $\boldsymbol{u} = u^i\partial/\partial x^i$ の指数写像の点 $\vec{a}$ での値は形式的に次式で与えられる:

$$(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{u}}\vec{a})^i = a^i + tu^i(\vec{a}) + \frac{t^2}{2!}u^k(\vec{a})\left.\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\right|_{\vec{a}} + \cdots. \tag{14}$$

指数写像と position map の近似

指数写像は position map γ_t を近似するために使う。十分に小さい時間 τ に対して、時間 $[t, t+\tau]$ の間の移流を時刻 t での速度場 $\boldsymbol{u}_t$ による移流で近似する[9]:

$$\gamma_{t+\tau} = \mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{u}_t}\gamma_t + o(\tau) \tag{15}$$

これの両辺を τ で微分すると Lagrange 的速度場を得る。この式より「Lagrange 速度場は Euler 速度場の右移動で得られる」と言える。

時間 $[0, t]$ の分割を Δ: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t$, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ とすると、position map は指数写像の積の分割無限大の極限としてかける (… はずである):

$$\gamma_t = \lim_{N\to\infty} \exp(\tau_N \boldsymbol{u}_{t_N})\cdots\exp(\tau_1\boldsymbol{u}_{t_1}). \tag{16}$$

Hausdorff の公式

ここで指数写像の積を計算するための基本である Hausdorff の公式の最低次の表式を導こう:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{s\boldsymbol{\xi}}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{\eta}}\vec{a} &= \mathrm{e}^{s\boldsymbol{\xi}}(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{\eta}}\vec{a}) && (17)\\
&= (\mathrm{e}^{t\boldsymbol{\eta}}\vec{a})^i + s\xi^i(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{\eta}}\vec{a}) + \frac{s^2}{2}\left(\xi^k\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\right)_{\mathrm{e}^{t\eta}\vec{a}} + o(s^2) && (18)\\
&= \left(a^i + t\eta^i(\vec{a}) + \frac{t^2}{2}\eta^i(\vec{a})\left.\frac{\partial\eta^i}{\partial x^k}\right|_{\vec{a}} + o(t^2)\right)\\
&\quad + s\left(\xi^i + t\eta^k\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k} + o(t)\right)_{\vec{a}} + \frac{s^2}{2}\left(\xi^k\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\right)_{\vec{a}+o(t)} + o(s^2) && (19)\\
&= a^i + \left(s\xi^i + t\eta^i + \frac{ts}{2}\left(\eta^k\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k} - \xi^k\frac{\partial\eta^i}{\partial x^k}\right) + \cdots\right)_{\vec{a}}\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(s\xi^k + t\eta^k + \cdots\right)_{\vec{a}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(s\xi^i + t\eta^i + \cdots\right)\Big|_{\vec{a}} + \cdots && (20)
\end{aligned}$$

[9] $\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{u}_t}$ の右に γ_t が来ている。これを $R_{\gamma_t}\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{u}_t}$ と書く。R は “right” の意味だ。これの τ に関する微分は Lie 代数への Lie 群の作用であり、$(R_{\gamma_t})_*\boldsymbol{u}_t$ と書く。表記がめんどくさいので、本稿では $\boldsymbol{u}_t\gamma_t$ と表記する。

ここで Lie 代数の交換子 $[*, *]$ を「行列の指数写像の場合と形式的に同じ式」

$$\mathrm{e}^{s\boldsymbol{\xi}}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{\eta}} = \exp\left(s\boldsymbol{\xi} + t\boldsymbol{\eta} + \frac{st}{2}[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] + \cdots\right) \tag{21}$$

で定義すると、交換子の成分表示は次のようになる (通常と逆だ)[10]:

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] = \left(\eta^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \xi^k \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{22}$$

position map と左／右移動と随伴表現

指数写像と position map の「関数表記」「群演算ぽい表記」を駆使して、Lie 代数の元の右移動と左移動を具体的に計算しよう。まず**右**移動だが position map $\vec{X}_t$ で流される流体の **Lagrange 速度場**を得る[11]:

$$(R_{\gamma_t})_* : \quad u^i(\vec{a})\frac{\partial}{\partial a^i} \;\longrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e^{\tau \boldsymbol{u}}\gamma_t \vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e^{\tau \boldsymbol{u}}(\vec{X}_t(\vec{a})) = u^i(\vec{X}_t(\vec{a}))\frac{\partial}{\partial X_t^i(\vec{a})}. \tag{23}$$

左移動の表式を定義に従って求めると、物理学的には何を表しているのかイマイチ分らない Lagrange 的なベクトル場を得る:

$$(L_{\gamma_t})_* : \quad u^i(\vec{a})\frac{\partial}{\partial a^i} \;\longrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\gamma_t e^{\tau \boldsymbol{u}}\vec{a} = \lim_{\tau\to 0}\frac{\vec{X}_t(\vec{a} + \tau \boldsymbol{u}(\vec{a})) - \vec{X}_t(\vec{a})}{\tau} = u^k(\vec{a}) \left.\frac{\partial X_t^i}{\partial a^k}\right|_{\vec{a}} \frac{\partial}{\partial X_t^i(\vec{a})}. \tag{24}$$

しかし、この左移動の式に $\vec{a} = \gamma_t^{-1}\vec{x}$ を代入したものは、**随伴表現**と呼ばれる重要な式である:

$$\mathrm{Ad}_{\gamma_t} : \; u^i(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^i} \;\longrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\gamma_t e^{\tau \boldsymbol{u}}\gamma_t^{-1}\vec{x} \;=\; \lim_{\tau\to 0}\frac{\vec{X}_t(\vec{A}_t(\vec{x}) + \tau \boldsymbol{u}(\vec{A}_t(\vec{a}))) - \vec{X}_t(\vec{A}_t(\vec{x}))}{\tau} \tag{25}$$

$$= u^k(\vec{A}_t(\vec{x})) \left.\frac{\partial X_t^i}{\partial a^k}\right|_{\vec{A}_t(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{26}$$

これは物理的には流体に凍りついた (frozen-in) **線要素ベクトル場の position map $\vec{X}_t$ に伴う時間発展の式 (Cauchy の公式 [7])** である (このことは『移流と Lie 微分』節で見よう)。$\mathrm{Ad}_{\gamma_t}\boldsymbol{u} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ と書くことにすると、初期条件 u^k と時刻 t での値 v^i との間に流体粒子毎に関係式

$$v^i(\vec{x}) = u^k(\vec{A}_t(\vec{x})) \left.\frac{\partial X_t^i}{\partial a^k}\right|_{\vec{A}_t(\vec{x})} \tag{27}$$

が成り立つことがわかる。これより position map の Jacobi 行列が随伴表現の変換行列をラベル座標毎に与えていることがわかる。

Back-to-labels map $\vec{A}_t$ を導入したことで、一気に微分幾何学、Lie 群上の力学系の用語との関連が見やすくなったことに注意せよ。

移流と Lie 微分

本稿では「移流」という言葉に特別な意味を持たせている。position map γ_t は流体粒子を Lagrange 的に追いかける関数だから、これを利用して流体に “frozen-in” な (あるいは『パッシブな』) 物理量の移流を定義することができる。この物理量の移流は γ_t から誘導されたものなので $\tilde{\gamma}_t$ と記そう。

これから微分幾何学の標準的な教科書の定義を離れて、流体屋に分りやすいようにラベル座標を追跡する形で定義を書いていく。

1. 関数 (微分 0-形式, パッシブスカラー) の移流は次式で定義する;

$$\tilde{\gamma}_t : \qquad (\tilde{\gamma}_t f)_{\gamma_t \vec{a}} = f(\vec{a}). \tag{28}$$

[10] この定義が公式の次の次数の表式を、行列の場合と同じ形で与えるかどうかは、未だ確かめていない。ゴメン。

[11] したがって $\mathrm{Diff}(M)$ の**右不変ベクトル場**とは、任意の流体の配位 $\vec{X}_t$ に対する Lagrange 速度場の全体のことである。

2. ベクトル場 (反変ベクトル, 線要素ベクトル場) の移流は「2 点の移流」を用いて定義する。
   $\tilde{\gamma}_t\boldsymbol{\xi}$ はその $\gamma_t\vec{a}$ での値が次式で与えられるような Euler 的なベクトル場である;

$$\tilde{\gamma}_t: \qquad (\tilde{\gamma}_t\boldsymbol{\xi})_{\gamma_t\vec{a}} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\gamma_t\vec{b}-\gamma_t\vec{a}}{\epsilon} \tag{29}$$

   ここで $\vec{b} := \vec{a}+\epsilon\boldsymbol{\xi}(\vec{a})+o(\epsilon) = \mathrm{e}^{\epsilon\boldsymbol{\xi}}\vec{a}+o(\epsilon)$ とする。これは**随伴表現 (adjoint representation)** に他ならない。というのもこの定義式に $\gamma_t\vec{a}=\vec{x}$ を代入して点 $\vec{x}$ での値を考えれば Euler 的な場の値を評価する次式を得るから:

$$(\tilde{\gamma}_t\boldsymbol{\xi})_{\vec{x}} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\gamma_t\mathrm{e}^{\epsilon\boldsymbol{\xi}}\gamma^{-1}\vec{x}-\vec{x}}{\epsilon} = (\mathrm{Ad}_{\gamma_t}\boldsymbol{\xi})_{\vec{x}} \tag{30}$$

3. $\tilde{\gamma}_t$ は共変、反変ベクトル、一般のテンソル場の任意のテンソル積と可換である。

4. $\tilde{\gamma}_t$ は任意のテンソル場の縮約と可換である。

この定義に従えば、例えば、微分 1-形式 (共変ベクトル) の移流は $\underline{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\xi}) = \omega_i\xi^i$ が全体としてパッシブスカラーの移流の式 Eq.(28) を満たす移流と定義される。詳しい計算は『微分 1-形式の移流: Weber 変換』の節で述べる。

Lie 微分とは次式で定義される「$\tilde{\gamma}_t$ の微分」である;

$$L: \qquad (L_{\boldsymbol{u}}Q)_{\vec{p}} := \lim_{t\to 0}\frac{Q(\vec{p})-(\tilde{\gamma}_tQ)_{\vec{p}}}{t} \tag{31}$$

ここで Q は任意のテンソル場、$\boldsymbol{u} = \dot{\tilde{\gamma}}_t|_{t=0}$. したがって **Lie 微分の具体的な表式はテンソル場の型毎に異なっている**[12]。移流 $\tilde{\gamma}_t$ の定義に応じた Lie 微分の特徴を挙げる;

1. 関数 (微分 0-形式) の Lie 微分は

$$(L_{\boldsymbol{u}}f)_{\vec{p}} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{p})-(\tilde{\gamma}_tf)_{\vec{p}}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{p})-f(\gamma_t^{-1}\vec{p})}{t} = u^i(\vec{p})\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\vec{p}}. \tag{32}$$

2. ベクトル場 (反変ベクトル) の Lie 微分は

$$\begin{aligned}(L_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\xi})_{\vec{p}} &= \lim_{t\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\vec{p}-\gamma_t e^{\epsilon\boldsymbol{\xi}}\gamma_t^{-1}\vec{p}}{\epsilon t} = \lim_{t\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\vec{p}-\exp(t\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{\xi}+\epsilon t[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi}]+\cdots)\vec{p}}{\epsilon t} &(33)\\ &= -[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi}]_{\vec{p}} = \left(u^k\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}-\xi^k\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\right)_{\vec{p}}\frac{\partial}{\partial p^k}. &(34)\end{aligned}$$

   本稿の交換子の符号の定義は Hausdorff の公式との一貫性で決めていることに注意 (Eq.(22) 参照)。

3. Lie 微分はテンソル積に対し derivation になる: $L_{\boldsymbol{u}}(Q_1\otimes Q_2) = L_{\boldsymbol{u}}Q_1\otimes Q_2 + Q_1\otimes L_{\boldsymbol{u}}Q_2$

4. Lie 微分はテンソル場の縮約と可換である。

この特徴を用いて一般のテンソル場の Lie 微分の式が求められる。例えば、微分 1-形式 (共変ベクトル) $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i dx^i$ の Lie 微分は成分を用いて次式で与えられる:

$$L_{\boldsymbol{u}}\underline{\boldsymbol{\omega}} = \left(u^k\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}+\omega_k\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)dx^i. \tag{35}$$

[12] だからボクは実質微分を安直に $\partial_t + u^i\partial_i$ と置く平均的流体屋は神経がガサツなのではないかと感じることがある。

微分 1-形式の移流: Weber 変換, 余随伴軌道

微分 1-形式 $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i dx^i$ の移流は任意のベクトル場を $\boldsymbol{\xi}$ に対して、$\underline{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\xi}) = \omega_i \xi^i$ がパッシブスカラーの移流ルール Eq.(28) に従うことより求められる。$\boldsymbol{\xi}$, $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ の移流をおのおの $\widetilde{\gamma}_t \boldsymbol{\xi} = \xi_t^i \partial_i$, $\widetilde{\gamma}_t \underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_{t,i}\, dx^i$ と書くことにして

$$\omega_{t,i}(\vec{x})\, \xi_t^i(\vec{x}) = \omega_{0,k}(\vec{A}_t(\vec{x}))\, \xi_0^k(\vec{A}_t(\vec{x})). \tag{36}$$

ここでベクトル場の移流 $\widetilde{\gamma}_t \boldsymbol{\xi} = \xi_t^i \partial / \partial x^i$ における時刻 t での値と初期条件との関係は Eq.(26) より

$$\xi_t^i(\vec{x}) = \xi_0^k(\vec{A}_t(\vec{x}))\, \left.\frac{\partial X_t^i}{\partial a^k}\right|_{\vec{A}_t(\vec{x})} \tag{37}$$

であるから、これを代入すると

$$\omega_{t,i}(\vec{x})\, \xi_0^k(\vec{A}_t(\vec{x}))\, \left.\frac{\partial X_t^i}{\partial a^k}\right|_{\vec{A}_t(\vec{x})} = \omega_{0,k}(\vec{A}_t(\vec{x}))\, \xi_0^k(\vec{A}_t(\vec{x})) \tag{38}$$

となる。これより微分 1-形式の移流は成分毎に次式で与えられる:

$$\omega_{t,i}(\vec{x})\, \left.\frac{\partial X_t^i}{\partial a^k}\right|_{\vec{A}_t(\vec{x})} = \omega_{0,k}(\vec{A}_t(\vec{x})) \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_{t,i}(\vec{x}) = \omega_{0,k}(\vec{A}_t(\vec{x}))\, \left.\frac{\partial A_t^k}{\partial x^i}\right|_{\vec{x}}. \tag{39}$$

この式はこの微分 1-形式が速度場である場合に **Weber 変換**と呼ばれる [7][13]。結局、微分 1-形式の移流の式は初期条件 $\omega_i dx^i$ と back-to-labels map $\vec{A}_t$ を用いて次式で与えられる:

$$\widetilde{\gamma}_t \underline{\boldsymbol{\omega}}: \qquad (\widetilde{\gamma}_t \underline{\boldsymbol{\omega}})_{\vec{p}} = \omega_k(\vec{A}_t(\vec{p}))\, dA_t^k(\vec{p}). \tag{40}$$

釣り合いの式の形式的な積分

ここでは局所的な釣り合いの式の一般論を書く[14]。釣り合いの式とは、流体内の Euler 的に固定されているある領域の内部の物理量 (たとえばエントロピーとか) の時間変化の式で、境界を通過するフラックスと境界内部での生成の寄与をからなる。釣り合いの式を一般的に記述する数学的枠組みは群 G とそれが作用する線形空間 V の半直積群 $G \ltimes V$ である: $(g,a) \circ (h,b) = (gh, a + \tilde{g}b)$ $g,\, h \in G,\, a\ b \in V$, チルダ˜は G の V への作用.

物理量を Euler 的な場で考えると、十分に小さい時間 [0,t] における物理量 Q の変化は「移流」「生成・消滅」の二つの過程の和である:

(物理量 Q の時刻 t での値) = (時間 [0,t] の移流) + (時間 [0,t] の生成・消滅)

「時間 [0,t] の移流」は時刻 $t=0$ での物理量 Q_t を流れ $\boldsymbol{u}$ で流すことだから $\widetilde{\exp}(t\boldsymbol{u})Q_0$ で与えられる。「時間 [0,t] の生成・消滅」は時刻 $t=0$ での物理量 Q_t の生成率 $\sigma_0^{(Q)}$ を用いて $t\sigma_0^{(Q)}$ で与えられる。従って十分に短い時間ならば Q_t の値は次の式で与えられる:

$$Q_t = \widetilde{\exp}(t\boldsymbol{u})Q_0 + t\sigma_0^{(Q)} + o(\tau) \tag{42}$$

---

[13] **余随伴軌道 (coadjoint orbit)** と呼ばれる変換は、式 $(\mathrm{Ad}^*_{\gamma_t}\underline{\boldsymbol{\omega}})(\boldsymbol{\xi}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(\mathrm{Ad}_{\gamma_t}\boldsymbol{\xi})$ で定義される演算で、物理的には**時刻 t から時刻 0 への微分 1-形式の移流**のことである:

$$\mathrm{Ad}^*_{\gamma_t}: \qquad (\mathrm{Ad}^*_{\gamma_t}\underline{\boldsymbol{\omega}})_{\vec{a}} = \omega_k(\vec{X}_t(\vec{a}))\, dX_t^i(\vec{a}) \tag{41}$$

ここで $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i dx^i$. 移流と余随伴軌道の関係は $\mathrm{Ad}^*_{\gamma_t^{-1}}\underline{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\gamma}_t \underline{\boldsymbol{\omega}}$ である。

[14] 釣り合いの式は連続体力学の基本的な方程式である。半直積群は連続体力学の解析力学の基本ツールである。でも、釣り合いの式を半直積群で議論したものは見たことがない (寡聞でゴメン)。

グランスドルフ、プリゴジンの教科書 [8] では局所的な釣り合いの式を $\partial_t f = \sigma[I] - \mathrm{div}\boldsymbol{j}[I]$ と表記し、$I = \int f \mathrm{d}V$ を示量変数、$\sigma[I]$ を単位体積・単位時間あたりの湧き出し、$\boldsymbol{j}[I]$ を I に関する流れ密度と呼んでいる。

ここでは熱力学的には示強性、示量性変数と呼ばれている変数を一般的に扱う枠組みを考える。数学的には関数 (スカラー)、ベクトル場、微分 n-形式、これらのテンソル積一般を対象とする。

この式の時間微分より、一般の時刻 t での釣り合いの式は Lie 微分を用いた実質微分の式となることがわかる:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+L_{\boldsymbol{u}_t}\right)Q_t=\sigma_t^{(Q)} \tag{43}$$

移流の式の形式的な積分を書こう。流体の配位と物理量 Q の組の時間 $[t,t+\tau]$ での変化を考えよう。これらの時間発展は Eq.(15), Eq.(42) で与えられるのだが、半直積群の演算を用いて次のように書ける:

$$\Big(\gamma_{t+\tau},Q_{t+\tau}\Big)=\Big(\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{u}_t}\gamma_t,\widetilde{\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{u}_t}}Q_t+\tau\sigma_t^{(Q)}\Big)=\Big(\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{u}_t},\tau\sigma_t^{(Q)}\Big)\circ\Big(\gamma_t,Q_t\Big)+o(\tau) \tag{44}$$

これより時間 [0,t] を N 個に分割して ($\tau=t/N$ とおく) 移流の式を指数写像の形式的な積で近似し、分割の極限をとって:

$$\begin{aligned}\Big(\gamma_t,Q_t\Big) &= \lim_{N\to\infty}\Big(\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{u}_{N\tau}},\,\tau\sigma_{N\tau}^{(Q)}\Big)\circ\cdots\circ\Big(\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{u}_{j\tau}},\,\tau\sigma_{j\tau}^{(Q)}\Big)\circ\cdots\circ\Big(\gamma_0,Q_0\Big) && (45)\\ &= \Big(\gamma_t,\,\widetilde{\gamma}_tQ_0+\int_0^t\widetilde{\gamma}_{t:s}\sigma_s^{(Q)}ds\Big) && (46)\end{aligned}$$

ここで $\gamma_{t:s}=\gamma_t\gamma_s^{-1}$ は時刻 s から時刻 t の間の移流。この式が流体粒子の Lagrangian history に沿った積分であることに注意。

この形式的な計算群は Q が単一の物理量の場合のみならず、**複数の物理量、あるいはそれらのテンソル積やその縮約に対し可換な操作**になっている。

釣り合いの式の積分の応用

バロトロピックな圧縮性流体の速度場の発展方程式は微分 1 形式の釣り合いの式として書ける[15]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+L_{\boldsymbol{u}_t}\right)\underline{\boldsymbol{u}}_t=-dq_t \tag{47}$$

ここで $\boldsymbol{u}_t=u_t^i\partial_i$, $\underline{\boldsymbol{u}}_t=g_{ij}u_t^idx^i$, q_t は $\nabla q_t=\rho_t^{-1}\nabla p_t-\nabla|\boldsymbol{u}_t|^2/2$ となる関数。これを形式的に積分して[16]

$$\underline{\boldsymbol{u}}_t=\widetilde{\gamma}_t\underline{\boldsymbol{u}}_0-\int_0^t\widetilde{\gamma}_{t:s}(dq_s)ds=\widetilde{\gamma}_t\underline{\boldsymbol{u}}_0-d\int_0^t\widetilde{\gamma}_{t:s}q_sds \tag{50}$$

を得る。これよりインパルスの “frozen-in” 則の式を得る[17]:

$$\underline{\boldsymbol{u}}_t+dn_t=\widetilde{\gamma}_t(\underline{\boldsymbol{u}}_0+dn_0),\qquad n_t(\vec{x})=\int_0^t(\widetilde{\gamma}_{t:s}q_s)_{\vec{x}}ds=\int_0^tq_s(\gamma_{s:t}\vec{x})ds. \tag{51}$$

この式は形式的には微分 1-形式の移流となっているので、このことを「流体の運動は Lie 群の余随伴軌道である」と言っているようだ。でも n_t が流体の運動の履歴を全部、引きずっているよなあ。Eq.(51) を成分で書いておくと次のようになる (これを **Weber 変換, Weber’s transformation** という):

$$\left(u_{t,i}+\frac{\partial n_t}{\partial x^i}\right)_{\vec{x}}dx^i=u_{0,j}(\vec{A}_t(\vec{x}))\left.\frac{\partial A_t^j}{\partial x^i}\right|_{\vec{x}}dx^i. \tag{52}$$

---

[15]圧縮性のある完全流体の運動方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+L_{\boldsymbol{u}_t}\right)\underline{\boldsymbol{u}}_t=-\frac{dp_t}{\rho}+\frac{1}{2}d|\boldsymbol{u}|^2 \tag{48}$$

である。これは作用積分 $S=\int_0^tLdt$ (ここで L は Lagrangian $L=\int(\frac{1}{2}M_t|\boldsymbol{u}_t|^2-U_t)$, M_t は質量分布の微分 3 形式、U_t は流体の体積の変化に応答する流体内部のポテンシャル) の変分から導出できる。その際に流体にバロトロピックであるという条件は課さなくてもよい。その代わりに「$\delta U=-p\delta V$ が任意の仮想変位に対し成り立つ (すなわち**流体の体積を変化させた際に流体になされた力学的仕事は、流体からいつでも全量取りだせる**)」ことを仮定する。

バロトロピック流体の運動方程式を Hodge 分解すると次のようになる:

$$(\partial_t+L_{\boldsymbol{u}_t})\phi+\triangle^{-1}\delta(L_{\boldsymbol{u}_t}\underline{\boldsymbol{u}}_t^{(S)})^{(D)}=-q_t\qquad\partial_t\underline{\boldsymbol{u}}_t^{(S)}+(L_{\boldsymbol{u}_t}\underline{\boldsymbol{u}}_t^{(S)})^{(S)}=0 \tag{49}$$

(S) はソレノイダル成分 (Ker(δ))、(D) は圧縮性成分 (Ker(d)) を表すとする。ϕ は $\underline{\boldsymbol{u}}_t^{(D)}$ のポテンシャル: $d\phi=\underline{\boldsymbol{u}}_t^{(D)}$. これより圧縮性成分が小さい極限 ($|\phi|\ll|\boldsymbol{u}_t^{(S)}|$) で圧力が非線形項の圧縮性成分との釣り合いに漸近していくことがわかる。

[16]外微分演算と γ_t から誘導された移流 $\widetilde{\gamma}_t$ は可換なはずだが、すっきりした証明を思いつかない。

[17]Constantin の論文 [5] にならって q, n の文字を用いた。

実質微分と可換な操作

Tur and Yanovsky の論文では Lie 微分を用いた実質微分 $d/dt := \partial_t + L_{\boldsymbol{u}_t}$ と**微分形式**に対する次の操作が可換であることが提示されている [3];

1. 外微分演算子 d;
2. ウェッジ積 $\wedge$;
3. frozen-in なベクトル場 $\boldsymbol{\xi}_t$ との ι 積;
4. frozen-in なベクトル場 $\boldsymbol{\xi}_t$ による Lie 微分。

さらに次の二つの操作が任意のテンソル場に対して可換である:

1. テンソル積;
2. テンソルの縮約.

これらの性質を使って、完全流体の運動の運動学的保存量を議論する。

保存量の構成

バロトロピックな完全流体の運動における基本的な保存量は次のものである:

- 微分 0-形式の保存量は (1) 単位質量あたりのエントロピー s, (2)back-to-labels map の各成分 A_t^m.
- 微分 1-形式の「保存量」はインパルス $\underline{\boldsymbol{u}}_t + dn_t$.
- 微分 2-形式の保存量は無い。
- 微分 3-形式の保存量は質量。$M_t := \rho_t\sqrt{|g|}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$
- ベクトル場の保存量は流体に frozen-in した (マテリアルな) 線要素の接ベクトル。(これは Kelvin の循環定理に現れる。)

保存量作成の基本方針は次の二つである。

1. これら微分形式を組み合わせて微分 3-形式の保存量を作り、それを質量 3-形式で割り算することで、パッシブスカラー (微分 0-形式) 型の保存量を構成する。(主だった保存量はこれ。)
2. 微分 1-形式とベクトル場の縮約を取ってパッシブスカラー (微分 0-形式) 型の保存量を構成する。(Kelvin の循環定理)

まず微分 1 形式の 3 個のウェッジ積の保存量は以下のものがあるが、いずれも無名の保存量であり、必ず back-to-labels map $\vec{A}_t$ が絡むので物理的な保存量と言うには苦しい:

$$\frac{(\underline{\boldsymbol{u}}_t + dn_t)\wedge ds_t \wedge dA_t^m}{M_t},\ \frac{(\underline{\boldsymbol{u}}_t + dn_t)\wedge dA_t^m \wedge dA_t^n}{M_t},\ \frac{ds_t \wedge dA_t^m \wedge dA_t^n}{M_t},\ \frac{dA_t^1 \wedge dA_t^2 \wedge dA_t^3}{M_t}. \tag{53}$$

ちょっとだけ面白いかもしれないのは、1 番目の保存量から $\boldsymbol{\xi}_t := ((\boldsymbol{u}_t + \nabla n_t)\times\nabla s_t)/\rho_t$ で定義される場が流体に frozen-in なベクトル場になっていることがわかること。

次に、微分 2-形式と微分 1-形式のウェッジ積の保存量は、渦度が微分 2-形式の保存量であることを利用して、次の 3 種が考えられる。いずれも良く知られた保存量である [7]。

$$\text{Ertel の定理}:\quad \frac{d\underline{\boldsymbol{u}}_t \wedge ds_t}{M_t} = \frac{(\nabla\times\boldsymbol{u}_t)\cdot\nabla s_t}{\rho_t}; \tag{54}$$

$$\text{Cauchy の公式}:\quad \frac{d\underline{\boldsymbol{u}}_t \wedge dA_t^m}{M_t} = \frac{(\nabla\times\boldsymbol{u}_t)^i}{\rho_t}\frac{\partial A_t^m}{\partial x^i}; \tag{55}$$

$$\text{Ertel-Rossby の定理}:\quad \frac{d\underline{\boldsymbol{u}}_t \wedge (\underline{\boldsymbol{u}}_t + dn_t)}{M_t} = \frac{(\nabla\times\boldsymbol{u}_t)\cdot(\boldsymbol{u}_t + \nabla n_t)}{\rho_t}. \tag{56}$$

最後に**上記のすべての保存量を** s_t **の部分に再帰的に代入したものはすべて運動学的保存量である。**

Kelvin の循環定理は次の二つの事実の複合体である:

1. 流体に凍りついた「ひも」 $(c^i(t))$, $t \in [0,1]$ の接ベクトル (dc^i) は、ベクトル場の保存量である。したがって微分 1-形式 $\boldsymbol{u}_t + \nabla n_t$ との縮約 $(u_{t,i} + \partial_i n_t)dc^i$ はパッシブスカラー型の保存量である。

2. 「ひも」がループ状、すなわち $c^i(0) = c^i(1)$ のとき、Stokes の定理より c に沿った積分のうち $\partial_i n_t dc^i$ の寄与は恒等的にゼロとなる。

References

[1] 三松,『多様体上の流体力学への幾何学的アプローチ、時系列バージョン』,

[2] あらきけいすけ,『非圧縮理想流体力学の数学的方法 (仮)』, 九大応用力学研究所 研究集会報告 12ME-S3「流体力学の新しい視点」, pp.63-95 (九大応力研, 2001 May); http://ud037.are.ous.ac.jp/2001P.pdf

[3] Tur, A. V. and Yanovsky, V. V., “Invariants in dissipationless hydrodynamic media”, J. Fluid Mech., Vol.248, pp.67-106 (1993).

[4] Kaneda, Y., “Renormalized expansions in the theory of turbulence with the use of the Lagrangian position function”, Journal of Fluid Mechanics (1981), 107: 131-145.

http://www.math.tohoku.ac.jp/coeharu/2006/LN_mitsumatsu.pdf

[5] Constantin, P. “An Eulerian-Lagrangian approach for incompressible fluids: Local theory”, J. American Math. Soc., Volume 14, Number 2, Pages 263-278.

[6] Kobayashi, Sh., Nomizu, K., “Foundations of differential geometry. I.”, John Wiley and Sons. XI, 329 p. (1963), New York-London.

[7] Serrin, J. “Mathematical principles of classical fluid mechanics”, Handbuch der Physik Vol.8 “Strömungsmechanik I” (ed. Flügge, S. and Truesdell, C.), pp.125-263 (Springer, 1959, Berlin).

[8] グランスドルフ, プリゴジン著, 松本, 竹山訳, 『構造・安定性・ゆらぎ—その熱力学的理論』, (みすず,1977).