直観主義論理への招待

数学基礎論サマースクール 2013　講義資料

照井一成（京都大学）
terui@kurims.kyoto-u.ac.jp

1　はじめに

直観主義論理 (intuitionistic logic) とは、オランダの数学者ブラウワー (1881-1966) が提唱した直観主義数学に由来する論理であり、直観主義数学で認められる推論の様式を弟子のハイティング (1898-1980) が形式化したものである。

数学基礎論上の立場としての直観主義は、廃れて久しい。それはブラウワー個人の特異な信条に由来するものであり、野放図な形式主義に対する批判として一定の歴史的役割を果たしたのは紛れもない事実であるが、それも過去の話である。現代では、生粋のブラウワー的直観主義者にお目にかかることは滅多にないであろう（とはいえ絶滅したわけではないらしい)。

ではなぜ今になって直観主義論理を勉強するのか？一つには、直観主義数学に限らず、様々な構成的数学の論理的基盤になっているという事実がある。直観主義は忘れ去られても、“構成” の重要性は変わらない。構成的な論証によりどこまで数学を展開できるのかは、基礎論的な問題意識を抜きにしても興味のあるところであろう。

もう一つには、“広義の構成主義” とでも呼ぶべき研究運動の原点としての意義がある。これは基礎論的研究に端を発しつつ、計算機科学寄りの論理学の中で発展してきたものである。広義の構成主義者は、哲学思想や基礎論的な立場に縛られず、それどころかいわゆる “構成的証明” にすら縛られず、証明一般に潜む構成的要素を自由に探究する。ある者は証明の分析を通してアルゴリズムを抽出し、有用な計算情報を獲得しようとする（プルーフ・マイニング)。またある者は証明そのものが持つ美しい代数構造に魅せられる。広義の構成主義者は「この論法は構成的ではない」などといって排除しない。むしろ逆転の発想で「この論法を構成的に解釈するとどうなるか」と考える。一言でいって、証明のダイナミズムを追求するのが計算機科学的な意味での “構成主義” である。その出発点にあるのが直観主義論理であり、それとともに考案されたさまざまな道具立てなのである（構造的証明論、実現可能性解釈、関数解釈、カリー・ハワード同型対応、古典論理の直観主義論理への翻訳等)。

本講義の目的は、このように非直観主義的な観点から直観主義論理を導入し、慣れ親しんでもらうことにある。ただし時間の都合上、論理の統語論的側面しか取り上げることができない。具体的には自然演繹証明系を導入し、正規化定理について解説し、少しだけ推件計算に触れた上で、古典論理と直観主義論理の関係を述べる。最後にハイティング算術の証明論に触れて「証明とはプログラムである」という考え方の一端を紹介して終わる。

もっと重要なのは BHK 解釈を代表とする意味論的側面、計算論的側面であり、また構成的解析学や構成的集合論などの内実にあると思うのだが、これらについては他の講義に譲ることにする。

本稿の執筆にあたっては多くの教科書を参考にした。全部を挙げることはとてもできないが、とくに参考にしたのは [10] である。

2　直観主義論理

2.1　論理式

言語　数理論理学で大事なのは、「かつ」「または」「ならば」など、文の論理構造を表す言葉である。これらの言葉を次のような論理記号を用いて表す。

かつ	または	ならば	矛盾	すべて	存在
$\wedge$	$\vee$	$\to$	$\bot$	$\forall$	$\exists$

しかしこれだけでは文を構成することができないので、対象や関数、述語を表す記号も必要である。具体的にどんな記号が必要になるかは文脈に依存するので、まずは一般的な定義を与えておく。

定義 2.1 (言語) 以下二種類の記号の集まりを**言語** *(language)* という。

- **関数記号** *(function symbol)* $f, g, h, \ldots$
- **述語記号** *(predicate symbol)* $p, q, r, \ldots$

ただし各記号には**項数** *(arity)* $n \in \mathbb{N}$ が定められているものとする。f や p が項数 n を持つとき、$f^{(n)}$, $p^{(n)}$ のように書く。とくに項数として $n = 0$ も許す。0 項関数記号のことを**定数記号** *(constant symbol)* といい、0 項述語記号のことを**命題記号** *(propositional symbol)*、あるいは**命題変数** *(propositional variable)* という。

例 2.2 (算術の言語 L_{PA}) 言語 L_{PA} は以下の記号からなる。

- 関数記号： $0^{(0)}, S^{(1)}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}$
- 述語記号： $=^{(2)}$

$+$、$\cdot$ はそれぞれ足し算、掛け算を表す記号であり、二つの引数をとるので二項関数記号である。同様に $=$ は二項述語記号である。0 は引数をとらない表現なので 0 項関数記号（つまり定数記号）である。S は x が与えられたとき $x + 1$ を返す関数を表すので、引数を一つとる。ゆえに一項関数記号である。

以下では言語 L を一つ固定して話を進める。関数記号や述語記号とは別に**変数** (variable) の集合 $\{x, y, z, \ldots\}$ を用意しておく。これらの記号を用いて文を構成する。

定義 2.3 (L 項, L 論理式) 次のような表現を L **項** *(L-term)* という。

$$x, \qquad f(t_1,\ldots,t_n)$$

ただし x は変数、$f^{(n)} \in L$、$t_1,\ldots,t_n$ はそれ自体項であるものとする。ここで $n=0$ も許す。すなわち定数記号 c はそれ単独で項である。

次のような表現を L **論理式** *(L-formula)* という。

$$p(t_1,\ldots,t_n) \qquad \bot \qquad (\varphi \land \psi) \qquad (\varphi \lor \psi) \qquad (\varphi \to \psi) \qquad \forall x.\varphi \qquad \exists x.\varphi$$

ここで $p^{(n)} \in L$, $t_1,\ldots,t_n$ は項であり、φ,ψ はそれ自体論理式であるものとする。特に命題記号 p は論理式である。

以上が公式的な定義である。これによれば、L_{PA} 項とは $+(S(x),0)$ のような表現であり、L_{PA} 論理式とは

$$\forall x.(=(+(S(x),0),S(y)) \to \bot)$$

のような表現である。しかしこれではあまりにも読みにくいので、次のような非公式の書き方も認めることにする。

- $+(t,u)$ や $\cdot(t,u)$ と書く代わりに $(t+u)$, $(t\cdot u)$ と書く。
- $=(t,u)$ と書く代わりに $t=u$ と書く。
- $\varphi \to \bot$ と書く代わりに $\neg\varphi$ と書く。φ が等式 $t=u$ のときには、$t \neq u$ とも書く。
- $((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi))$ と書く代わりに $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ と書く。
- 不要なカッコは適宜省略する。

すると、上の L_{PA} 論理式は

$$\forall x.S(x)+0 \neq S(y)$$

と書ける。

例 2.4 算術の言語 L_{PA} は自然数についての性質や文を表すための言語である。まず、自然数 $0,1,2,3,\ldots$ は次のように L_{PA} 項を用いて表すことができる。

$$0, \quad S(0), \quad S(S(0)), \quad S(S(S(0))), \quad \ldots$$

このような項を**数項** *(numeral)* とよび、自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対応する数項を n と書く。

論理式 $\exists z.x+z=y$ は “x は y 以下である” ことを表す。この論理式を $x \leq y$ と書く。同様に

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \leq t.\varphi(x) & \equiv & \forall x.(x \leq t \to \varphi(x)) \\
\exists x \leq t.\varphi(x) & \equiv & \exists x.(x \leq t \land \varphi(x)) \\
\exists! x.\varphi(x) & \equiv & \exists x.(\varphi(x) \land \forall y(\varphi(y) \to x=y)) \\
x|y & \equiv & \exists z.x\cdot z=y \\
\mathsf{even}(x) & \equiv & \mathsf{2}|x \\
\mathsf{prime}(x) & \equiv & \mathsf{2} \leq x \land \forall z \leq x(z|x \to (z=\mathsf{1} \lor z=x))
\end{array}$$

このようにして、複雑な概念を表す L_{PA} 論理式を次々に定義していくことができる。これらの派生論理式を用いれば、「6 は素数ではない」ことは $\neg\mathsf{prime}(6)$ と書け、「素数は無限に多く存在する」ことは $\forall x.\exists y(x \leq y \wedge \mathsf{prime}(y))$ と書ける。

これまでの定義を見ればわかる通り、L 項、L 論理式の定義は言語 L に依存する。しかし具体的にどんな L を考えているのかは重要ではないときには、単に項、論理式ということにする。

束縛変数・自由変数　変数には二種類の “状態” がある。例えば論理式 $\forall x.\exists y.x = S(y) + z$ を考えると、この中には 3 つの変数 x, y, z が現れるが、そのうち x と y は、量化子 $\forall x$, $\exists y$ により使われ方がはっきりと定められている。つまり、x, y はそれぞれ「すべての x について $\cdots$」「ある y が存在して $\cdots$」という意味で使われている。このような変数を**束縛変数** (bound variable) という。一方、z はまだ使われ方が定まっていない。後で $\forall z$ や $\exists z$ により量化されたときに初めて使い方が定まるのである。このような状態にある変数を**自由変数** (free variable) という。束縛変数・自由変数については、もっと厳密な定義を与えることはいくらでもできるが、そうすると煩雑になるので、むしろ以下の諸例を通して直感的に理解してもらったほうがよい。大切なのは、論理式を見たら常に “束縛関係” を意識することである。

$$\forall x(p(x, y) \to \exists y.q(x, y))$$

束縛変数について大事な取り決めをしておく。

- 束縛変数の名前は、束縛関係を変えない限り自由に付け替えてよい。

たとえば、左下の論理式は上と同じ論理式を表すが、右下は異なる論理式を表す。

$$\forall x'(p(x', y) \to \exists y'.q(x', y')), \qquad \forall x(p(x, y) \to \exists y.q(y, y))$$

束縛変数について大切なのは束縛関係であり、その関係さえ保たれていれば、x だろうが w だろうが、どんな名前を付けても構わないのである。このあたりの事情は積分をするときに $\int g(x)dx \equiv \int g(y)dy$ としてよいのと同様である。一方、自由変数についてはそのような名前の付け替えをしてはならない。

項の代入　論理式 φ と自由変数 x の関係に着目するとき、φ を $\varphi(x)$ のように書くことがある。そして x に項 t を代入した結果を $\varphi(t)$ のように書く。例えば $\varphi(x) \equiv p(x, x, y) \wedge \forall x.q(x)$ で $t \equiv f(x)$ のとき、$\varphi(t) \equiv p(f(x), f(x), y) \wedge \forall x.q(x)$ である。

ただし代入を行う際には、**変数の衝突** (variable clash) に注意しなければならない。たとえば $\varphi(x) \equiv \exists y.x \leq y$ は、自然数の世界では x にどんな数を代入しても成り立つ。それゆえ 0 や $z + 5$ を代入しても、結果として得られる論理式はやはり成り立つはずである。しかし変数 y を含む項、たとえば $1 + y$ を不用意に代入すると、結果は $\exists y.1 + y \leq y$ となるが、これは成り立たない。この問題の原因は、$1 + y$ を代入することにより新たな束縛関係が発生してしまったことにある。

$$\exists y.\ x \leq y \qquad \mapsto \qquad \exists y.\ 1 + y \leq y$$

このような事態を避けるため、次の約束をしておく。

- 項を論理式に代入するときには、新たな束縛関係が生じないよう、事前に束縛変数の名前を付け替えておく。

たとえば $\varphi(x)$ に $1+y$ を代入するときには、事前に束縛変数 y を新しい変数 z に名前換えし、$\varphi(x) \equiv \exists z.x \leq z$ としておいてから $1+y$ を代入するのである。結果としてえられる論理式は $\varphi(y+1) \equiv \exists z.1+y \leq z$ である。

定義 2.5 (命題論理式、閉論理式)

- 命題記号と $\perp$ から $\wedge, \vee, \to$ のみを用いて組み立てられる論理式を**命題論理式** *(propositional formula)* という。

- 自由変数を含まない論理式を**閉論理式** *(closed formula)* または**文** *(sentence)* という。文の集合を**理論** *(theory)* という。

2.2 自然演繹証明系

直観主義論理 **IL** では、どのような推論が許されてどのような推論はダメなのだろうか？このことを明確にするために、ここで直観主義論理の**証明系** (proof system) を導入する。証明系にはいろいろな流儀があるのだが、ここではゲンツェンの**自然演繹** (natural deduction)**NJ** を紹介する [1]。自然演繹の思想は、我々が人間が行う推論のやり方を可能な限り "自然に" 写し取ることにある。そうやって自然に写し取ってみたら、論理推論のうち直観主義論理で認められる部分は美しい構造を持っていた！というのが驚きである。

まずは推論の基本単位を導入しよう。

定義 2.6 (推件) 論理式の有限集合を表すのに $\Gamma, \Delta, \cdots$ などの記号を用いる。**推件** *(sequent)* とは $\Gamma \Rightarrow \varphi$ の形の表現である。

直感的にいえば、推件 $\Gamma \Rightarrow \varphi$ は「仮定 Γ のもとで φ が成り立つ」ことを表す。つまり論理式 φ に加えてそれが依って立つ仮定 Γ も明記したのが推件である。もちろん推件の中には正しい仮定–結論関係を表すものもあれば、そうでないものもある。正しい仮定–結論関係のみを、有限個の規則を用いて導出したい。そのために図 1 の**推論規則** (inference rule) を考える。

以下では、有限集合 $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ のことを単に $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ と書くことがある。また、集合 Γ に要素 ψ を加えるときには、$\Gamma \cup \{\psi\}$ と書く代わりに単に Γ, ψ と書くことにする。ただし $\psi \in \Gamma$ の可能性もあることに注意。この場合 $\Gamma, \psi \equiv \Gamma$ となる。

各規則の基本的な読み方は、「横線の上に書いてある事柄が全て成り立てば、下に書いてある事柄も成り立つ」である。多くの規則があって煩雑だが、以下の点に注意すれば、多少は整理して理解することができるだろう。

[1] ここでは直観主義論理 **IL** とその証明系の一つである **NJ** を区別して話す。

$$\frac{\varphi \in \Gamma}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (init) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\bot)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi_1 \quad \Gamma \Rightarrow \varphi_2}{\Gamma \Rightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \Rightarrow \varphi_i}\ (\wedge E)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi_i}{\Gamma \Rightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_1 \Rightarrow \xi \quad \Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \xi}{\Gamma \Rightarrow \xi}\ (\vee E)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi}\ (\to I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi \quad \Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow \psi}\ (\to E)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi(y)}{\Gamma \Rightarrow \forall x.\varphi(x)}\ (\forall I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \forall x.\varphi(x)}{\Gamma \Rightarrow \varphi(t)}\ (\forall E)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x.\varphi(x)}\ (\exists I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \exists x.\varphi(x) \quad \Gamma, \varphi(y) \Rightarrow \xi}{\Gamma \Rightarrow \xi}\ (\exists E)$$

ただし $i = 1, 2$ であり、$(\forall I)$, $(\exists E)$ は次の**固有変数条件** (eigenvariable condition) を満たすものとする: 仮定 Γ（および $(\exists E)$ の結論 ξ）は**固有変数** y を自由変数として含まない。

図 1: 自然演繹 **NJ** の推論規則

- 論理記号 $\wedge, \vee, \to, \forall, \exists$ それぞれについて**導入規則**（I 規則）と**除去規則**（E 規則）が一つずつある。
- $(\wedge E)$ と $(\vee I)$、$(\forall E)$ と $(\exists I)$ は上下さかさまの関係にある。

各規則について説明を加えていこう。

- $(init)$: $\varphi \in \Gamma$ ならば、もちろん仮定 Γ のもとで φ が成り立つ。
- $(\wedge I)$: 仮定 Γ のもとで $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ が成り立つことを示すには、同じ仮定のもとで φ_1 と φ_2 が両方とも成り立つことを示せばよい [2]。（以下では、Γ を仮定することをいちいち断らない。）
- $(\wedge E)$: $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ が成り立つならば、$\wedge$ の "定義" より φ_1 も φ_2 も成り立つ。
- $(\vee I)$: $\varphi_1 \vee \varphi_2$ が成り立つことを示すには、φ_1 か φ_2 の少なくともどちらか一方が成り立つことを示せばよい。
- $(\vee E)$: これはいわゆる場合分け論法である。$\varphi_1 \vee \varphi_2$ が成り立つとする。φ_1 を仮定しても φ_2 を仮定しても同じ結論 ξ が出てくるならば、どちらにせよ ξ が成り立つと言える。

[2] このように導入規則は記号を導入するための条件として、下から上に読むと意味が通りやすい。ゲンツェン曰く、導入規則は記号の定義を与え、除去規則は定義からの帰結だからである。

- $(\to I)$: $\varphi \to \psi$ が成り立つことを示すには、φ を仮定に加えた上で ψ が成り立つことを示せばよい。これは数学で条件文を証明するときに普通に行われていることである。

- $(\to E)$: これは Modus Ponens と呼ばれる最も基本的な論理推論である。$\varphi \to \psi$ と φ が成り立つならば ψ が成り立つ。

なお、$\neg\varphi \equiv \varphi \to \bot$ と定義したことを思い出せば、$(\to I)$, $(\to E)$ の特別な場合として以下の規則が導かれる。

$$\dfrac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \neg\varphi}\,(\neg I) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \neg\varphi \quad \Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow \bot}\,(\neg E)$$

その他の推論規則を説明する前に、いくつか例を挙げよう。論理推論は、推論規則を組み合わせることにより行うことができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi\land\psi \Rightarrow \varphi\land\psi}\,(init)}{\varphi\land\psi \Rightarrow \psi}\,(\land E) \quad \dfrac{\dfrac{}{\varphi\land\psi \Rightarrow \varphi\land\psi}\,(init)}{\varphi\land\psi \Rightarrow \varphi}\,(\land E)}{\varphi\land\psi \Rightarrow \psi\land\varphi}\,(\land I)}{\Rightarrow \varphi\land\psi \to \psi\land\varphi}\,(\to I) \tag{1}$$

このように推論規則を組み合わせてできる木構造を**証明図** (proof figure) あるいは単に**証明** (proof) と呼ぶ。ただし葉の部分（上端）に来てよいのは $(init)$ 規則のみである。根の部分（下端）には証明されるべき推件がくる。ゆえにより詳しくいえば、上の証明図は推件 $\Rightarrow \varphi\land\psi \to \psi\land\varphi$ **の証明図**である。ところで、この最後の推件は仮定を含まない（$\Rightarrow$ の左側が空っぽである）。こういうときには $\Rightarrow$ は無視して、上の証明図は $\varphi\land\psi \to \psi\land\varphi$ の証明図であるともいう。

もう一つの例として、次の証明図を挙げておく。ただし $\Gamma = \{\neg\varphi\land\neg\psi, \varphi\lor\psi\}$ である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \Rightarrow \varphi\lor\psi}\,(init) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\varphi \Rightarrow \neg\varphi\land\neg\psi}\,(init)}{\Gamma,\varphi \Rightarrow \neg\varphi}\,(\land E) \quad \dfrac{}{\Gamma,\varphi \Rightarrow \varphi}\,(init)}{\Gamma,\varphi \Rightarrow \bot}\,(\neg E) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\psi \Rightarrow \neg\varphi\land\neg\psi}\,(init)}{\Gamma,\psi \Rightarrow \neg\psi}\,(\land E) \quad \dfrac{}{\Gamma,\psi \Rightarrow \psi}\,(init)}{\Gamma,\psi \Rightarrow \bot}\,(\neg E)}{\Gamma \Rightarrow \bot}\,(\lor E)}{\neg\varphi\land\neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi\lor\psi)}\,(\to I)}{\Rightarrow \neg\varphi\land\neg\psi \to \neg(\varphi\lor\psi)}\,(\to I) \tag{2}$$

次に量化子に関わる推論規則について説明する。

- $(\forall I)$: $\forall x.\varphi(x)$ が成り立つことを示すには、任意の y について $\varphi(y)$ が成り立つことを示せばよい。つまりこれは

$$\text{任意} \quad \Longrightarrow \quad \text{全て}$$

  を示す論法である [3]。このとき y は任意の対象でなければならず、余計な条件がついていてはならない。たとえば「全ての三角形は内角の和が 180 度である」というこ

[3] この論法の発見により、人類は有限の論証で無限に多くの対象についての結論を出す手段を手に入れたといってよい。

とを示すには、任意の三角形 y をとってきて、その内角の和が 180 度であることを証明すればよいのだが、このときとってくる y はあくまでも “任意の” 三角形でなければならない（正三角形や直角三角形などの特別な三角形を念頭に置いてはいけない）。これが固有変数条件の意味である。

- $(\forall E)$, $(\exists I)$ の意味は明らかだろう。

- $(\exists E)$: 論証の過程で $\exists x.\varphi(x)$、つまり性質 φ を満たす対象の存在が明らかになったとする。このとき、そのような対象に仮に y と名前をつけて論証を続けることができる。ただし y について仮定してよいのは、それが $\varphi(y)$ を満たすということのみであり、それ以外に余計なことを仮定してはいけない。また、y というのは一時的な仮の名前にすぎないから、論証の結論 ξ に出てきてはいけない。これがここでの固有変数条件の意味である。

これらの規則を用いると、たとえば次のような証明図が書ける。ただし $\Gamma = \{\neg\exists x.\varphi(x), \varphi(x)\}$ とする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \Rightarrow \neg\exists x.\varphi(x)}\,(\mathit{init}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \Rightarrow \varphi(x)}\,(\mathit{init})}{\Gamma \Rightarrow \exists x.\varphi(x)}\,(\exists I)}{\Gamma \Rightarrow \bot}\,(\neg E)}{\neg\exists x.\varphi(x) \Rightarrow \neg\varphi(x)}\,(\neg I)}{\neg\exists x.\varphi(x) \Rightarrow \forall x.\neg\varphi(x)}\,(\forall I)}{\Rightarrow \neg\exists x.\varphi(x) \to \forall x.\neg\varphi(x)}\,(\to I) \tag{3}$$

ここで $(\forall I)$ 規則を使う際に、確かに固有変数条件が満たされていることを確認してほしい。もしも固有変数条件がなかったら、次のような推論が出来てしまう。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x.\varphi(x) \Rightarrow \exists x.\varphi(x)}\,(\mathit{init}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\exists x.\varphi(x), \varphi(y) \Rightarrow \varphi(y)}\,(\mathit{init})}{\exists x.\varphi(x), \varphi(y) \Rightarrow \forall x.\varphi(x)}\,(\forall I)}{\exists x.\varphi(x) \Rightarrow \forall x.\varphi(x)}\,(\exists E)}{\Rightarrow \exists x.\varphi(x) \to \forall x.\varphi(x)}\,(\to I) \tag{4}$$

しかしこの結論は明らかに不合理である。こうなってしまった原因は、$(\forall I)$ 規則を使用する際に固有変数条件を守らなかったことにある。

- $(\bot)$: これは仮定 Γ のもとで矛盾が生じたなら、同じ仮定のもとで何でも成り立つことを表す。実際の論証では、場合分け論法などと組み合わせることにより効力を発揮する。たとえば $\Gamma = \{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\}$ として

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi}\,(\mathit{init}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \neg\varphi}\,(\mathit{init}) \quad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi}\,(\mathit{init})}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \bot}\,(\neg E)}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}\,(\bot) \qquad \dfrac{}{\Gamma, \psi \Rightarrow \psi}\,(\mathit{init})}{\Gamma \Rightarrow \psi}\,(\vee E) \tag{5}$$

ゆえに $\varphi \vee \psi$、$\neg\varphi$ という仮定のもとで ψ が成り立つ。

以上の準備により、**IL** の証明能力を表す論理的帰結関係 $\vdash_{\mathbf{IL}}$ を次のように定義することができる。

定義 2.7 (IL の証明能力) T を文の集合とする（有限集合でなくてもよい)。ある有限部分集合 $\Gamma \subseteq T$ について $\Gamma \Rightarrow \varphi$ の証明図が存在するとき、φ は T から**直観主義的に導出できる** *(intuitionistically derivable)* といい、$T \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi$ と書く。とくに $T = \emptyset$ のときには φ は**直観主義的に証明可能である** *(intuitionistically provable)* といい、$\vdash_{\mathbf{IL}} \varphi$ と書く。

最後に一つ簡単な補題を述べておく。

補題 2.8 $(\bot)$ 規則

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\;(\bot)$$

の結論 φ を原子論理式 $p(t_1, \ldots, t_n)$ のみに制限しても **IL** の証明能力は変わらない。

ゆえに今後 $(\bot)$ 規則の結論は原子論理式に制限する。

2.3 簡略記法

すでに述べたとおり、推件 $\Gamma \Rightarrow \varphi$ とは論理式 φ にそれが依って立つ仮定 Γ を併記したものである。しかし図 1 の推論規則を眺めてみると、推論を上から下へと進めるに連れて Γ は減ることはあっても、決して増えはしないことがわかる。減るのは $(\to I)$、$(\vee E)$、$(\exists E)$ 規則を用いる場合である。しかも、必要な Γ は $(init)$ 規則の右側の論理式を見れば復元できる。ゆえに推論規則を使うたびに毎回律儀に Γ を書く必要はなく、“どこで Γ が減ったか” を明記すればそれで済む。

たとえば証明図 (1) は次のようにも書ける。まず部分証明図

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,(\wedge E)}{\psi \wedge \varphi}\,(\wedge I)$$

を作る。ここで上端の二つの $\varphi \wedge \psi$ が結論 $\psi \wedge \varphi$ を導くのに必要な仮定 Γ である。証明図 (1) では最後に $(\to I)$ 規則が使われている。このとき仮定 $\varphi \wedge \psi$ が “消去” されるわけだが、ここではそれに対応して $\varphi \wedge \psi$ を [ ] でくくることにする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\,(\wedge E)}{\psi \wedge \varphi}\,(\wedge I)}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\,(\to I)_1$$

ここで番号 1 は、仮定が消去された場所を表している。

同様に、証明図 (2) と (5) はそれぞれ次のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \vee \psi]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]_3}{\neg\varphi}\,(\wedge E) \qquad [\varphi]_1}{\bot}\,(\neg E) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]_3}{\neg\psi}\,(\wedge E) \qquad [\psi]_1}{\bot}\,(\neg E)}{\bot}\,(\vee E)_1}{\neg(\varphi \vee \psi)}\,(\neg I)_2}{\neg\varphi \wedge \neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi)}\,(\to I)_3$$

$$\dfrac{\varphi \lor \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\varphi \quad [\varphi]_1}{\bot}\,(\neg E)}{\psi}\,(\bot) \qquad [\psi]_1}{\psi}\,(\lor E)_1$$

この最後の証明図には二種類の仮定が現れていることに注意してほしい。

- **閉じた仮定** : $[\varphi]_1, [\psi]_1$。これは $(\lor E)$ 規則が用いられたときに消去されたものである。
- **開いた仮定** : $\varphi \lor \psi$, $\neg\varphi$。これらは他の規則により消去されずに最後まで残った仮定である。

ゆえに上の証明図は $\varphi \lor \psi, \neg\varphi \vdash_{\mathbf{IL}} \psi$ ということを表している。

以上の考え方にのっとると、自然演繹 **NJ** の推論規則は次のように表すことができる[4]。

$$\dfrac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \land \varphi_2}\,(\land I) \qquad \dfrac{\varphi_1 \land \varphi_2}{\varphi_i}\,(\land E) \qquad \dfrac{\varphi_i}{\varphi_1 \lor \varphi_2}\,(\lor I) \qquad \dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}\,(\to E)$$

$$\dfrac{\forall x.\varphi(x)}{\varphi(t)}\,(\forall E) \qquad \dfrac{\varphi(t)}{\exists x.\varphi(x)}\,(\exists I) \qquad \dfrac{\bot}{\varphi}\,(\bot)$$

また次のように左側の証明図を材料として右側の証明図を作り出すことができる。

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots\;\mathsf{p} \\ \psi \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\begin{array}{c} [\varphi]_k \\ \vdots\;\mathsf{p} \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}\,(\to I)_k$$

$$\begin{array}{c} \vdots\;\mathsf{q}(x) \\ \varphi(x) \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\;\mathsf{q}(x) \\ \varphi(x) \end{array}}{\forall x.\varphi(x)}\,(\forall I)$$

$$\begin{array}{c} \vdots\;\mathsf{r}_0 \\ \varphi_1 \lor \varphi_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \vdots\;\mathsf{r}_1 \\ \xi \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi_2 \\ \vdots\;\mathsf{r}_2 \\ \xi \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\;\mathsf{r}_0 \\ \varphi_1 \lor \varphi_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi_1]_k \\ \vdots\;\mathsf{r}_1 \\ \xi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi_2]_k \\ \vdots\;\mathsf{r}_2 \\ \xi \end{array}}{\xi}\,(\lor E)_k$$

$$\begin{array}{c} \vdots\;\mathsf{s}_0 \\ \exists x.\varphi(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi(x) \\ \vdots\;\mathsf{s}_1(x) \\ \xi \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\;\mathsf{s}_0 \\ \exists x.\varphi(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi(x) \\ \vdots\;\mathsf{s}_1(x) \\ \xi \end{array}}{\xi}\,(\exists E)_k$$

ここで $k \in \mathbb{N}$ は仮定が消去された場所を記すための数である。証明図 p の中には仮定 φ が複数個現れていることがある（0 個の場合もある）。その場合いくつ φ を消去してもよい（0 個でもよい）。その他の規則についても同様である。固有変数条件は次のようになる。

[4] 実際にはこちらがゲンツェン [4] のオリジナルの記法である。

- $(\forall I)$ 規則を使うときには、部分証明図 $\mathsf{q}(x)$ の開いた仮定の中で x が自由変数として用いられていてはならない。

- $(\exists E)$ 規則を使うときには、部分証明図 $\mathsf{s}_1(x)$ の開いた仮定、および結論 ξ の中で x が自由変数として用いられていてはならない。

部分証明図 q, s_1 を $\mathsf{q}(x)$, $\mathsf{s}_1(x)$ と書くのは、固有変数 x を明記するためである。

最後に、次章のために用語を導入しておく。上に挙げた各除去規則の中に現れる論理式のうち、次のものを**主前提** (principal premise) という : $(\wedge E)$ の $\varphi_1 \wedge \varphi_2$、$(\to E)$ の $\varphi \to \psi$、$(\forall E)$ の $\forall x.\varphi(x)$、$(\vee E)$ の $\varphi_1 \vee \varphi_2$、$(\exists E)$ の $\exists x.\varphi(x)$。

2.4 直観主義論理の諸法則

次に **IL** ではどんな法則が成り立つのかを見ていくことにする。この節では $\vdash_{\mathbf{IL}}$ を簡単に $\vdash$ と書く。また $\varphi \vdash \psi$ かつ $\psi \vdash \varphi$ （つまり $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$）のときには $\varphi \sim \psi$ と書く。

T を項全体の集合とし、F を論理式全体の集合とする。$\vdash$ を F 上の二項関係とみなすと次のことが成り立つ。

命題 2.9 $\vdash$ は F 上の**前順序** *(preorder)* である。すなわち

- $\varphi \vdash \varphi$.

- $\varphi \vdash \psi, \quad \psi \vdash \xi \quad \Longrightarrow \quad \varphi \vdash \xi$.

証明 上は明らか。下を示すには、二つの証明図

$$\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\ \mathsf{p}\\ \psi\end{array} \quad と \quad \begin{array}{c}\psi\\ \vdots\ \mathsf{q}\\ \xi\end{array} \quad をつなげて \quad \begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\ \mathsf{p}\\ \psi\\ \vdots\ \mathsf{q}\\ \xi\end{array} \quad をつくればよい。$$

■

F を同値関係 $\sim$ で割って集合 $F/{\sim}$ を考えれば、$\vdash$ は $F/{\sim}$ 上の**半順序** (partial order) になる。

命題 2.10 $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ はそれぞれ $\{\varphi, \psi\}$ の**下限** *(infimum, meet)*、**上限** *(supremum, join)* である。すなわち

$$\frac{\xi \vdash \varphi \quad かつ \quad \xi \vdash \psi}{\xi \vdash \varphi \wedge \psi} \qquad \frac{\varphi \vdash \xi \quad かつ \quad \psi \vdash \xi}{\varphi \vee \psi \vdash \xi}$$

ただし二重線は「上が成り立つことと下が成り立つことは同値」であることを表す。

同様に、$\forall x.\varphi(x)$, $\exists x.\varphi(x)$ はそれぞれ $\{\varphi(t) : t \in T\}$ の下限、上限である。すなわち

$$\frac{\xi \vdash \varphi(t) \quad (\forall t \in T)}{\xi \vdash \forall x.\varphi(x)} \qquad \frac{\varphi(t) \vdash \xi \quad (\forall t \in T)}{\exists x.\varphi(x) \vdash \xi}$$

証明　たとえば∀の場合について見てみる。下に相当する証明図 p から上に相当する証明図を作るには $(\forall E)$ 規則を使って

$$\begin{array}{c} \xi \\ \vdots\ \mathsf{p} \\ \forall x.\varphi(x) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \xi \\ \vdots\ \mathsf{p} \\ \dfrac{\forall x.\varphi(x)}{\varphi(t)}\ (\forall E) \end{array}$$

とすればよい。上に相当する証明図 q から下に相当する証明図を作るには、t として ξ に含まれない自由変数 x をとれば固有変数条件が満たされるから

$$\begin{array}{c} \xi \\ \vdots\ \mathsf{q} \\ \varphi(x) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \xi \\ \vdots\ \mathsf{q} \\ \dfrac{\varphi(x)}{\forall x.\varphi(x)}\ (\forall I) \end{array}$$

とできる。 ■

この命題の前半により、$(F/{\sim}, \vdash, \wedge, \vee)$ は**束** (lattice) の構造を持つことがわかる。$\perp$, $\top := \perp \to \perp$ がそれぞれ最小元、最大元となる。

命題 2.11 $\wedge$ と $\to$ は**随伴関係** *(adjunction)* にある。すなわち

$$\begin{array}{c} \xi \wedge \varphi \vdash \psi \\ \hline\hline \xi \vdash \varphi \to \psi \end{array}$$

証明　上の帰結関係に相当する証明図を p、下の帰結関係に相当する証明図を q とすると、下の証明図、上の証明図をそれぞれ次のようにして作ることができる。

$$\begin{array}{c} \dfrac{\xi \quad [\varphi]_1}{\xi \wedge \varphi}\ (\wedge I) \\ \vdots\ \mathsf{p} \\ \dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\ (\to I)_1 \end{array} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{\xi \wedge \varphi}{\xi}\ (\wedge E) \\ \vdots\ \mathsf{q} \\ \varphi \to \psi \end{array} \qquad \dfrac{\xi \wedge \varphi}{\varphi}\ (\wedge E)}{\psi}\ (\to E)$$

■

命題 2.12 次の**分配則** *(distributivity)* が成り立つ。

$$\xi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim (\xi \wedge \varphi) \vee (\xi \wedge \psi), \qquad \xi \wedge \exists x.\varphi(x) \sim \exists x(\xi \wedge \varphi(x)).$$

ただし ξ は自由変数 x を含まないものとする。

証明　右を示す。命題 2.10 と 2.11 を用いれば、任意の論理式 θ について

$$\begin{array}{c} \xi \wedge \exists x.\varphi(x) \vdash \theta \\ \hline\hline \exists x.\varphi(x) \vdash \xi \to \theta \\ \hline\hline \varphi(t) \vdash \xi \to \theta \qquad (\forall t \in T) \\ \hline\hline \xi \wedge \varphi(t) \vdash \theta \qquad (\forall t \in T) \\ \hline\hline \exists x(\xi \wedge \varphi(x)) \vdash \theta \end{array}$$

ここで $\theta \equiv \xi \wedge \exists x.\varphi(x)$ として上から下にたどれば $\exists x(\xi \wedge \varphi(x)) \vdash \xi \wedge \exists x.\varphi(x)$ が帰結し、$\theta \equiv \exists x(\xi \wedge \varphi(x))$ として下から上にたどれば $\xi \wedge \exists x.\varphi(x) \vdash \exists x(\xi \wedge \varphi(x))$ が帰結する。 ■

さらに

$$\xi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim (\xi \vee \varphi) \wedge (\xi \vee \varphi)$$

の形の分配則も成り立つ。ところがこの無限版

$$\xi \vee \forall x.\varphi(x) \sim \forall x(\xi \vee \varphi(x))$$

は成り立たない。後者はしばしば**定領域公理** (constant domain axiom) と呼ばれる。これを **IL** に加えると、可能世界意味論において、可能世界が変わっても個体領域が不変であるようなクリプキモデルについて完全性定理が成り立つようになる。ただし証明論的には非常に取り扱いが難しい公理である。

他にも古典論理では成り立つが直観主義論理では一般には成り立たない法則がある。

- **排中律** (excluded middle) : $\varphi \vee \neg\varphi$
- **二重否定則** (law of double negation) : $\neg\neg\varphi \to \varphi$
- **ドモルガンの法則** (law of de Morgan): $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\neg\forall x.\varphi(x) \leftrightarrow \exists x.\neg\varphi(x)$.
- **ダメットの法則** (**前線形性**, prelinearity) : $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$
- **酒場の法則** (drinker's formula) : $\exists x(\varphi(x) \to \forall y.\varphi(y))$

これらの法則を証明するには、背理法の推論規則

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (abs) \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]_k \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (abs)_k$$

が必要である。この規則を **NJ** に追加して得られるのが古典論理の自然演繹証明系 **NK** である [5]。しかしこの規則を加えると、「一つの論理記号につき、一つの導入規則と一つの除去規則」という原理原則が崩れてしまう。自然演繹に基づいて古典論理の証明論を展開しようとすると、この点が深刻な問題となって現れる。

一般に代数構造 $(A, \wedge, \vee, \to, \bot)$ で、$(A, \wedge, \vee)$ は束、$\bot$ は最小元、$\to$ と $\wedge$ は随伴関係にあるようなものを**ハイティング代数** (Heyting algebra) という。上では論理式集合 F と帰結関係 $\vdash$ からハイティング代数を作ったが、他にも位相空間やクリプキモデルからも作ることができる [6]。ハイティング代数は直観主義論理に代数的意味論を与えるものとして重要である。

[5] [4] では (abs) 規則の代わりに排中律の公理 $\varphi \vee \neg\varphi$ が加えられている。

[6] 変わったところでは、有限生成の自由分配束は必ずハイティング代数になる。

3　直観主義論理の証明論

3.1　“証明代数”

NJ の特徴は、論理記号 $\wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ のそれぞれについて導入規則と除去規則が一つずつ存在する点にある。しかも二つの規則は互いに打ち消し合う！たとえば $(\wedge I)$ 規則を使った直後に $(\wedge E)$ 規則を使うと

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\;\mathsf{p}_1\\ \varphi_1\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\;\mathsf{p}_2\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1\wedge\varphi_2}\,(\wedge I)}{\varphi_i}\,(\wedge E)\\ \vdots\;\mathsf{q}\end{array}$$

のような証明図が作れる（$i = 1, 2$）が、これはいかにも回りくどい。こんな証明をするよりは

$$\begin{array}{c}\vdots\;\mathsf{p}_i\\ \varphi_i\\ \vdots\;\mathsf{q}\end{array}$$

としたほうがはるかにすっきりする。このように $(\wedge I)$ と $(\wedge E)$ は打消しあう。それは掛け算と割り算が打ち消し合って

$$(x \cdot 3)/3 = x$$

となるのと全く同じことである。他の論理記号についても考えてみると、図 2 のような証明図の**簡約規則** (reduction rule) が得られる。ただし $\mathsf{p}(t)$ は部分証明図 $\mathsf{p}(x)$ に出てくる自由変数 x を全部 t で置き換えたものである。このように置き換えても仮定-結論関係が損なわれないのは、固有変数条件が満たされているからである。

これは証明図の世界で成り立つ一種の “代数法則” であると思ってよい。自然演繹とは我々が行う日常推論を “自然に” 写し取ったものに他ならないのだが、その “自然な” 世界に精妙な代数構造があるというのだから驚きである。

証明の代数構造をもう少しだけ調べてみよう。まず、φ から ψ へと至る証明図

$$\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

全体の集合を $Hom(\varphi, \psi)$ と書くことにする。ただし図 2 の左右の証明図は同じものとみなす。さらに、次の形の証明図はいずれも部分証明図 p と同じものとみなす（$\forall$ や $\exists$ についても似たような同一視ができるがここでは省略する）。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\;\mathsf{p}\\ \varphi_1\wedge\varphi_2\end{array}}{\varphi_1}\,(\wedge E)\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\;\mathsf{p}\\ \varphi_1\wedge\varphi_2\end{array}}{\varphi_2}\,(\wedge E)}{\varphi_1\wedge\varphi_2}\,(\wedge I)\qquad\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\;\mathsf{p}\\ \varphi\rightarrow\psi\end{array}\quad[\varphi]_k}{\psi}\,(\rightarrow E)}{\varphi\rightarrow\psi}\,(\rightarrow I)_k\qquad\dfrac{\varphi_1\vee\varphi_2\qquad\begin{array}{c}\dfrac{[\varphi_1]_k}{\varphi_1\vee\varphi_2}\,(\vee I)\\ \vdots\;\mathsf{p}\\ \xi\end{array}\quad\begin{array}{c}\dfrac{[\varphi_2]_k}{\varphi_1\vee\varphi_2}\,(\vee I)\\ \vdots\;\mathsf{p}\\ \xi\end{array}}{\xi}\,(\vee E)_k$$

すると命題 2.10, 2.11 は次のように証明図間の “同型写像” へと精密化することができる。

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \mathsf{p}_1}{\varphi_1} \qquad \overset{\vdots\ \mathsf{p}_2}{\varphi_2}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\wedge I)}{\varphi_i}\,(\wedge E) \qquad \rhd \qquad \overset{\vdots\ \mathsf{p}_i}{\varphi_i}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{[\varphi]_k}{\overset{\vdots\ \mathsf{p}}{\psi}}}{\varphi \to \psi}\,(\to I)_k \qquad \overset{\vdots\ \mathsf{q}}{\varphi}}{\psi}\,(\to E) \qquad \rhd \qquad \overset{\overset{\vdots\ \mathsf{q}}{\varphi}}{\overset{\vdots\ \mathsf{p}}{\psi}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \mathsf{q}}{\varphi_i}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\vee I) \qquad \overset{[\varphi_1]_k}{\overset{\vdots\ \mathsf{p}_1}{\xi}} \qquad \overset{[\varphi_2]_k}{\overset{\vdots\ \mathsf{p}_2}{\xi}}}{\xi}\,(\vee E)_k \qquad \rhd \qquad \overset{\overset{\vdots\ \mathsf{q}}{\varphi_i}}{\overset{\vdots\ \mathsf{p}_i}{\xi}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \mathsf{p}(x)}{\varphi(x)}}{\forall x.\varphi(x)}\,(\wedge I)}{\varphi(t)}\,(\forall E) \qquad \rhd \qquad \overset{\vdots\ \mathsf{p}(t)}{\varphi(t)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \mathsf{q}}{\varphi(t)}}{\exists x.\varphi(x)}\,(\exists I) \qquad \overset{[\varphi(x)]_k}{\overset{\vdots\ \mathsf{p}(x)}{\xi}}}{\xi}\,(\exists E)_k \qquad \rhd \qquad \overset{\overset{\vdots\ \mathsf{q}}{\varphi(t)}}{\overset{\vdots\ \mathsf{p}(t)}{\xi}}$$

図 2: 証明図の簡約規則

命題 3.1 以下の集合間の同等性が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
Hom(\xi,\varphi_1) \times Hom(\xi,\varphi_2) &\cong Hom(\xi,\varphi_1 \wedge \varphi_2) \\
Hom(\varphi_1,\xi) \times Hom(\varphi_2,\xi) &\cong Hom(\varphi_1 \vee \varphi_2,\xi) \\
Hom(\xi \wedge \varphi,\psi) &\cong Hom(\xi,\varphi \to \psi)
\end{aligned}
$$

これは論理式と証明図の成す**圏** (category) が直和をもつカルテシアン閉圏の構造を備えていることを示唆している（実際にはもっと精密な議論が必要である)。この洞察が論理に対する圏論的アプローチの出発点となる。

3.2 正規化定理

証明図 p_0 が与えられたとき、図 2 に挙げた簡約規則を適用すると、p_0 を別の証明図 p_1 に書き換えることができる。このことを $\mathsf{p}_0 \rhd \mathsf{p}_1$ と書く。さて、この書き換えを続けていくと証明図の列

$$\mathsf{p}_0 \rhd \mathsf{p}_1 \rhd \mathsf{p}_2 \rhd \cdots$$

が得られるが、この列はいずれは停止してそれ以上書き換えできない証明図、すなわち**正規形** (normal form) の証明図に到達するだろうか、それとも書き換えは無限に続けていくことができるのだろうか？

本節では、一定の順序で書き換えを続けていけば書き換えは有限回で停止することを証明する。これは正規化定理のもっとも基本的な場合である。より強い主張（置換規則を含む場合、強い正規化定理）については次節で紹介するにとどめる。

まずは簡約についてもう少し詳しく見てみよう。図 2 の左側にあるように、導入規則のすぐ後に除去規則が続くような証明図の部分を**簡約基** (redex) という。簡約基の**ランク**とは、導入規則と除去規則に挟まれた論理式 φ のサイズ、すなわちに φ に含まれる論理記号の個数である。証明図の**ランク**とは、その中に含まれる簡約基のランクの最大値のこととする。ただし正規形の証明図のランクは 0 とする。

補題 3.2 ランク $n > 0$ の証明図 p_0 が与えられたとき、適切な簡約基を選んで書き換えを行い $\mathsf{p}_0 \rhd \mathsf{p}_1$ とすれば、ランク n の簡約基の個数を少なくとも一つ減らすことができる。

証明　もしも p_0 に含まれるランク n の簡約基の中に $\wedge$ または $\forall$ に関するものがあれば、それを選ぶ。さもなくば、$\to, \vee, \exists$ に関する簡約基で次の条件を満たすものを探す。

- 部分証明図 q の中にはランク n の簡約基は含まれない（図 2 参照)。

この条件を満たすランク n の簡約基が存在することは明らかである（なるべく "右上" のものを選べばよい)。そのような簡約基を選んで書き換えを行えば、ランク n 未満の簡約基は増えるかもしれないが、ランク n の簡約基は確実に一つ減る。 ■

補題 3.2 により、次のことが成り立つ。

定理 3.3 (NJ の弱正規化定理) どんな証明図 p_0 から出発しても、適切な順序で図 *2* の書き換えを行えば、証明図の有限列

$$\mathsf{p}_0 \rhd \mathsf{p}_1 \rhd \cdots \rhd \mathsf{p}_n$$

が得られ、正規形の証明図 p_n へと到達できる [7]。

証明 証明図のランク n と、ランク n の簡約基の個数に関する二重帰納法による。 ■

弱正規化定理の帰結として重要なのが次に述べる**選言特性** (disjunction property) と**存在特性** (existence property) である。その前に補題を一つ証明しておく。

補題 3.4 p は正規形の証明図で開いた仮定を含まないものとする。すると p の最後に用いられる推論規則は必ず導入規則である。

証明 p の構成に関する数学的帰納法による。仮に p が除去規則で終わっているとすると p は次の形をしているはずである。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathsf{q}\\ \psi\end{array}\qquad \vdots}{\varphi}\ (\star E)$$

ここで $\star \in \{\wedge, \to, \vee, \forall, \exists\}$、$\psi$ は主前提（2.3 節参照）であり、その他の前提（もしあれば）から上は $\vdots$ と書いて省略してある。すると q は開いた仮定を含まない正規形の証明図なので、帰納法の仮定より導入規則 $(\star I)$ で終わるはずである。しかしそうすると p は簡約基を含むことになり、正規形であるという仮定に反する。 ■

定理 3.5 (選言特性・存在特性)

- $\vdash_{\mathbf{IL}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Longrightarrow \quad \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi_1$ または $\vdash_{\mathbf{IL}} \varphi_2$.
- $\vdash_{\mathbf{IL}} \exists x.\varphi(x) \quad \Longrightarrow$ ある項 t について $\vdash_{\mathbf{IL}} \varphi(t)$.

証明 存在特性のみ示す。もし $\vdash_{\mathbf{IL}} \exists x.\varphi(x)$ ならば、定理 3.3 より $\exists x.\varphi(x)$ の正規形の証明図 p で開いた仮定を含まないものが存在する。補題 3.4 より p は導入規則で終わるはずだから、

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi(t)\end{array}}{\exists x.\varphi(x)}\ (\exists I)$$

の形をしている。よって $\vdash_{\mathbf{IL}} \varphi(t)$ が成り立つ。 ■

これによれば、**NJ** の各推論規則が直観主義論理の標準的意味論である**ブラウワー・ハイティング・コルモゴロフ解釈（BHK 解釈）**に適合していることがよくわかる。

[7] 従来この定理の先行権はプラヴィッツ [9] に与えられることが多かったが、[11] によればゲンツェンはすでに [4] の草稿の中で（次節で述べる置換簡約規則も含めた形で）弱正規化定理を証明してあったそうである。ついでにいうと、**NJ** を論理記号 $\to$ に関する部分に制限した部分証明系は、チャーチの単純型付きラムダ計算とぴったりと対応する（**カリー・ハワード同型対応**）。後者についての弱正規化定理を最初に証明したのはチューリングである（1940 年代、[3]）と言われてきたが、カリー・ハワード同型対応を前提とすれば、ゲンツェンはチューリングにすら先立つことになる。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \psi_1\lor\psi_2\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi_1]_k\\ \vdots\\ \varphi_P\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi_2]_k\\ \vdots\\ \varphi_P\end{matrix}}{\varphi_P}(\lor E)_k \quad \vdots}{\varphi_C}(\star E) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \psi_1\lor\psi_2\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\psi_1]_k\\ \vdots\\ \varphi_P\end{matrix}\quad\vdots}{\varphi_C}(\star E) \quad \dfrac{\begin{matrix}[\psi_2]_k\\ \vdots\\ \varphi_P\end{matrix}\quad\vdots}{\varphi_C}(\star E)}{\varphi_C}(\lor E)_k$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \exists x.\psi(x)\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi(x)]_k\\ \vdots\\ \varphi_P\end{matrix}}{\varphi_P}(\exists E)_k \quad \vdots}{\varphi_C}(\star E) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \exists x.\psi(x)\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\psi(x)]_k\\ \vdots\\ \varphi_P\end{matrix}\quad\vdots}{\varphi_C}(\star E)}{\varphi_C}(\exists E)_k$$

図 3: 置換簡約規則

3.3 より強い正規化定理

前節冒頭で述べたとおり、実際にはもっと強い形の正規化定理が成り立つ。まず、正規化について考えるときには、図 2 の簡約規則のみならず図 3 の**置換簡約規則** (permutative reduction rule) も含めるのが普通である。ただし

$$\dfrac{\varphi_P \quad \vdots}{\varphi_C}(\star E)$$

は任意の除去規則を表し、φ_C は結論、φ_P は主前提を表している。

これらの新規則を含めても弱正規化定理は成り立つ。このことから次のことが帰結する。

定理 3.6 (部分論理式性) $\vdash_{\mathbf{IL}} \varphi$ ならば、φ の部分論理式しか含まないような φ の証明図が存在する。

ここで**部分論理式** (subformula) とは、文字通り φ の部分として含まれる論理式のことである。ただし φ 自身も φ の部分論理式であるとする。また、どんな項 t についても $\varphi(t)$ は $\forall x.\varphi(x), \exists x.\varphi(x)$ の部分論理式であるとする。

実はさらに強い形の正規化定理が成立する。証明図が与えられたとき、どんな順序で図 2 と 3 の簡約規則を適用していっても、いずれは必ず正規形に到達するのである。

定理 3.7 (強正規化定理) 無限に続く書き換え列

$$\mathsf{p}_0 \rhd \mathsf{p}_1 \rhd \mathsf{p}_2 \rhd \cdots$$

は存在しない。

この定理があると、ここで考えている特定の証明系 **NJ** のみならず、簡約関係を保ちつつ **NJ** に翻訳可能な全ての証明系について（強）正規化定理が成立することになる。その意味で、強正規化定理は一つの証明系のみならず証明系のクラスについての主張と解することができ、正規化という現象についてより本質に迫っている定理であるといえなくもない。

4　古典論理と推件計算

すでに述べたとおり、直観主義論理の証明系 **NJ** から古典論理の証明系 **NK** を得るには背理法の推論規則 (abs) を加えればよい。しかし、**NK** に基づいて証明論を展開するのは困難を極める。確かにプラヴィッツ [9] や安東 [1] 他により強正規化定理は古典論理の自然演繹にも拡張されているが、その簡約方法はかなり複雑である。

理由ははっきりしている。古典論理 **CL** のもっとも重要な性質は次に述べる論理的双対性にあるが、自然演繹はこの双対性と相性が悪いからである。

含意記号 $\rightarrow$ を含まない論理式 φ が与えられたとする。ただしここでは $\neg$ は基本的な論理記号と考え、φ の中に含まれていてもよいとする。また $\top := \neg\bot$ も基本的な論理記号と考える。このとき

$$\wedge \quad \rightleftharpoons \quad \vee, \qquad \top \quad \rightleftharpoons \quad \bot, \qquad \forall \quad \rightleftharpoons \quad \exists$$

という入れ替えを施して得られる論理式を φ^d と書く。

定理 4.1 (論理的双対性) φ, ψ を含意記号を含まない論理式とすると、

$$\models \varphi \rightarrow \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \models \psi^d \rightarrow \varphi^d$$

すなわち古典論理 **CL** では、$\varphi \rightarrow \psi$ と $\psi^d \rightarrow \varphi^d$ の成否は一致する。

さて、論理的双対性は $\rightarrow$ の "左右対称性" (??) を主張するものである。含意記号 $\rightarrow$ を推件の記号 $\Rightarrow$ で置き換えれば、これは前提と結論の左右対称性を主張しているものと思ってよい。しかし自然演繹における推件は $\Gamma \Rightarrow \varphi$ の形であり、前提はいくつあってもかまわないが、結論は常に一つである。つまり明らかに左右対称ではない。これが古典論理と自然演繹の相性が悪いことの根源的な理由である [8]。

そこで $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の形の推件を許し（Γ も Δ も有限集合）、論理的双対性にのっとって推論規則を与えることが考えられる。そうやって得られるのが、古典論理の "論理的に自然" な証明系・**推件計算** (sequent calculus) **LK** である。

4.1　推件計算 LK

LK における推件は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の形である。意味的には $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ に等しい。推論規則は図 4 の通りである（ここで (w) 規則は余分だが、後で直観主義論理用の推件計算を導入するときに備えて付け加えてある）。

自然演繹の場合と同じく大量の規則があって辟易とするが、それでも次のことはすぐに見てとれるだろう。

- 一つの論理記号につき一つずつ**左規則**と**右規則**がある。

[8] それでも古典論理の自然演繹を探究することには大きな意味がある。なぜならばカリーハワード同型対応のもとで考えると、**NJ** に古典論理特有の諸法則を加えることは、純粋な関数型プログラミング言語に（例外処理などを旨とする）制御演算子を加えることに相当するからである。古典論理の "構成的" 側面の研究は 1990 年代に大きく進展した。自然演繹の亜種の中では、パリゴーによる **$\lambda\mu$ 計算**がスタンダードとしての地位を確立しているといってよいだろう [7]。

$$\frac{}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (init) \qquad \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\bot L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (cut) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma', \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (w)$$

$$\frac{\varphi_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge R)$$

$$\frac{\varphi_1, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \vee \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\to L) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\ (\to R)$$

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.\varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\forall L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(y)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x.\varphi(x)}\ (\forall R)$$

$$\frac{\varphi(y), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.\varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x.\varphi(x)}\ (\exists R)$$

ただし $(\forall R)$, $(\exists L)$ を使うときには、Γ, Δ の中で y が自由変数として用いられていてはならない（固有変数条件）。

図 4: 推件計算 **LK** の推論規則

- $(\wedge L)$ と $(\vee R)$、$(\wedge R)$ と $(\vee L)$、$(\forall L)$ と $(\exists R)$、$(\forall R)$ と $(\exists L)$ は双対関係にある。

便宜上、古典論理 **CL** の証明能力を厳密に定めておく。

定義 4.2 (CL の証明能力) T を文の集合とする（有限集合でなくてもよい)。ある有限部分集合 $\Gamma \subseteq T$ について、**LK** で $\Gamma \Rightarrow \varphi$ の証明図が存在するとき、φ は T から**古典的に導出できる** *(classically derivable)* といい、$T \vdash_{\mathbf{CL}} \varphi$ と書く。とくに $T = \emptyset$ のときには φ は**古典的に証明可能である** *(clasically provable)* といい、$\vdash_{\mathbf{CL}} \varphi$ と書く。

LK は左右対称性の極致たるものだから、定理 4.1 で $\models$ を $\vdash_{\mathbf{CL}}$ で置き換えても同じことが成り立つことはすぐにわかるだろう。参考までに、2.4 節の最後で挙げた古典論理では成り立つが直観主義論理では成り立たない法則の証明図を与えておく。

- ダメットの法則（前線形性）

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(init)$}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \Rightarrow \psi, \varphi$}
\RightLabel{$(\to R)$}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \varphi \to \psi, \varphi$}
\RightLabel{$(\to R)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \varphi \to \psi, \psi \to \varphi$}
\RightLabel{$(\vee R)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi), \varphi \to \psi$}
\RightLabel{$(\vee R)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$}
\end{prooftree}
$$

- 酒場の法則

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(init)$}
\UnaryInfC{$\varphi(y), \varphi(t) \Rightarrow \forall y.\varphi(y), \varphi(y)$}
\RightLabel{$(\to R)$}
\UnaryInfC{$\varphi(t) \Rightarrow \varphi(y) \to \forall y.\varphi(y), \varphi(y)$}
\RightLabel{$(\exists R)$}
\UnaryInfC{$\varphi(t) \Rightarrow \exists x(\varphi(x) \to \forall y.\varphi(y)), \varphi(y)$}
\RightLabel{$(\forall R)$}
\UnaryInfC{$\varphi(t) \Rightarrow \exists x(\varphi(x) \to \forall y.\varphi(y)), \forall y.\varphi(y)$}
\RightLabel{$(\to R)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \exists x(\varphi(x) \to \forall y.\varphi(y)), \varphi(t) \to \forall y.\varphi(y)$}
\RightLabel{$(\exists R)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \exists x(\varphi(x) \to \forall y.\varphi(y))$}
\end{prooftree}
$$

- 定領域公理

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(init)$}
\UnaryInfC{$\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x), \psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(init)$}
\UnaryInfC{$\psi \Rightarrow \varphi(x), \psi$}
\RightLabel{$(\vee L)$}
\BinaryInfC{$\varphi(x) \vee \psi \Rightarrow \varphi(x), \psi$}
\RightLabel{$(\forall L)$}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \Rightarrow \varphi(x), \psi$}
\RightLabel{$(\forall R)$}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \Rightarrow \forall x.\varphi(x), \psi$}
\RightLabel{$(\vee R)$}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \Rightarrow (\forall x.\varphi(x)) \vee \psi, \psi$}
\RightLabel{$(\vee R)$}
\UnaryInfC{$\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \Rightarrow (\forall x.\varphi(x)) \vee \psi$}
\RightLabel{$(\to R)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \to (\forall x.\varphi(x)) \vee \psi$}
\end{prooftree}
$$

4.2 カット消去定理

次の点が推件計算の最大の特色である。(cut) 規則を除けば、上の推件に現れる論理式はすべて下の推件に現れる論理式の部分論理式になっている。ゆえに (cut) 規則さえなければ、証明の構造はぐっとシンプルになるはずである。実際、カット規則は消去できる。

定理 4.3 (LK のカット消去) 証明可能な推件は、(cut) 規則を用いずに証明可能である。

ゲンツェンはこの定理を論文 [4] の "基本定理" と呼んだが、これは証明論という分野全体の基本定理と呼んでも差支えないだろう。この定理を証明するのには、いろいろな方法がある。前章のように、カットを含む証明図をカットを含まない証明図へと書き換える手続きを与えてもいいし、代数的に議論してもよい（カットなしの証明可能性 $\vdash^{cf}_{\mathbf{CL}}$ に基づいて完備ブール代数を構成すればよい)。

あるいはカットなしの証明図をボトムアップに構成する証明探索手続きを与えてもいい。すなわち推件が与えられたら、下から上に（カット以外の）推論規則を適用して証明図を構成していくのである。それにはまず推論規則を手直しして、決定論的に証明探索を行えるようにする。具体的には $(\wedge L)$, $(\vee R)$, $(\forall L)$, $(\exists R)$ を手直しして、

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge L') \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1, \varphi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee R')$$

$$\frac{\varphi(t), \forall x.\varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.\varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\forall L') \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x.\varphi(x), \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x.\varphi(x)}\ (\exists R')$$

とする。そうすれば横線の上下が成り立つことは同値になるから、下の推件を証明するという課題は、上の推件を証明するという課題に帰着する。ゆえに下の推件が与えられたら、決定論的に（すなわち自動的に、迷うことなく）推論規則を上向き適用していくことができる。もっとも $(\forall L')$ や $(\exists R')$ を適用するときには項 t を選ばなければいけない。しかし $\forall x.\varphi(x)$ や $\exists x.\varphi(x)$ は上の推件にも残っているから、これらの規則は何度でも適用できる。ゆえに一つ一つの項 t について順番に $(\forall L')$ や $(\exists R')$ を適用していけばよいので迷う必要はない [9]。

その他の規則は今のままでよい。ただし固有変数条件を守るためには

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(y)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x.\varphi(x)}\ (\forall R) \qquad \frac{\varphi(y), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.\varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists L)$$

を適用する際に、今までに用いられていない新しい変数 y を選ぶ必要がある。

なお、規則によっては枝分かれが生じることに注意。たとえば $(\wedge R)$ をを下から上に向けて適用すると、証明探索は 2 方向に分岐する。

最後に、証明探索が成功するのは、すべての分岐先で $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ なる推件 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に到達したときである。そのような推件は $(init)$ により直接証明可能である。

さて、これで証明探索の記述が終わったので、カット消去定理の証明の概略を述べよう。まず、推件 $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ が与えられたとすると、ボトムアップに証明探索を続けることにより、ラベル付き二分木を構成することができる（図 5)。

ここで弱ケーニッヒの補題を思い出すと

補題 4.4 (弱ケーニッヒの補題) どんな二分木も有限であるか、無限に続くパスを持つ。

[9] ただしここでは言語 L は可算であると仮定している。

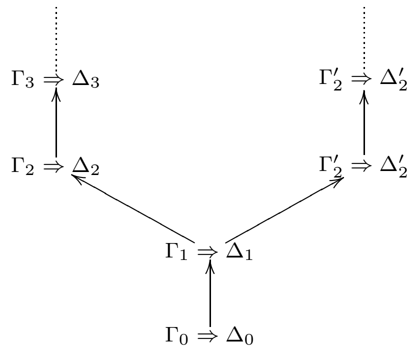

図 5: 証明探索木

もしも証明探索木が有限ならば、それは $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ のカットなし証明図である。他方、もしも無限のパス

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \\ \hline \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \\ \hline \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 \end{array}$$

を持つならば、そこから $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ の**反例モデル** (countermodel) を作ることができる。まず、左右それぞれに含まれる論理式を集めて

$$\Gamma_\omega = \bigcup_n \Gamma_n, \qquad \Delta_\omega = \bigcup_n \Delta_n$$

とする。すると次のような構造 $\mathcal{M} = (M, *)$（と変数に対する付値）を定義することができる。

- M は項全体からなる集合であり、関数記号および変数はそれ自体により解釈される。
- $\mathcal{M} \models p(\vec{t}) \quad \Longleftrightarrow \quad p(\vec{t}) \in \Gamma_\omega$.

すると論理式の構成に関する帰納法により次のことを確かめることができる。

- $\varphi \in \Gamma_\omega \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi$.
- $\varphi \in \Delta_\omega \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M} \not\models \varphi$.

たとえば $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma_\omega$ ならば、$(\wedge L')$ により $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma_\omega$ だから、帰納法の仮定により $\mathcal{M} \models \varphi_1$ かつ $\mathcal{M} \models \varphi_2$、よって $\mathcal{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ である。また $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Delta_\omega$ ならば、$(\wedge R)$ により φ_1, φ_2 の少なくとも一方（たとえば φ_1）が Δ_ω に入っているから、帰納法の仮定により $\mathcal{M} \not\models \varphi_1$、よって $\mathcal{M} \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ である。

同様にして $\exists x.\varphi(x) \in \Gamma_\omega$ ならば、$(\exists L)$ 規則によりある $y \in M$ について $\varphi(y) \in \Gamma_\omega$ だから、帰納法の仮定により $\mathcal{M} \models \varphi(y)$、よって $\mathcal{M} \models \exists x.\varphi(x)$ である。また $\exists x.\varphi(x) \in \Delta_\omega$ ならば、$(\exists R')$ により全ての $t \in M$ について $\varphi(t) \in \Delta_\omega$ だから、帰納法の仮定により $\mathcal{M} \not\models \varphi(t)$、よって $\mathcal{M} \not\models \exists x.\varphi(x)$ である（実際にはもっと厳密な論証が必要である）。

以上のことから $\mathcal{M} \not\models \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ （すなわち $\mathcal{M} \not\models \bigwedge \Gamma_0 \to \bigvee \Delta_0$）。健全性定理の対偶により $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ は証明可能ではない。

結局のところ、もし $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ がカットなしの証明図を持たないならば、$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ はそもそも証明可能ではない。これでカット消去定理が確かめられた。

4.3 “二つの” 直観主義論理

推件計算は左右対称的であり、それゆえ論理的双対性を主旨とする古典論理と相性がよかったわけだが、ここで無理やり左右対称性を破壊すると、直観主義論理の推件計算を得ることができる。大まかにいってやり方は二つある。

1. ゲンツェンの **LJ**。これは推件の形に制限を加えることにより得られる。すなわち **LJ** の推件とは $\Gamma \Rightarrow \Delta$ で Δ は高々一つしか論理式を含まないようなものである。推論規則は、**LK** の規則をこの形の推件に制限することにより自然に得られる。たとえば $\to$ の推論規則は次のようになる。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\to L) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi}\ (\to R)$$

2. 前原の **LJ$'$**。これは推件の形には制限を加えないが、$(\to R)$ と $(\forall R)$ 規則に制限をかけることにより得られる。これらの規則を適用してよいのは、前提の右辺に高々一つしか論理式が含まれないときに限る、とするのである。(w) 規則を暗黙的に使うことにすると、具体的には次のようになる。

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\ (\to R) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x.\varphi(x)}\ (\forall R)$$

どちらの制限を入れても、ダメットの法則や酒場の法則、定領域公理などは証明できなくなることを確かめてほしい。**LJ** も **LJ$'$** も証明能力は **NJ** と一致し、またどちらについてもカット消去定理が成り立つ。

二つのうち、**LJ** は BHK 解釈と相性がよく、**LJ$'$** は可能世界意味論と相性がよい。ゆえに前者は “ブラウワー的直観主義論理”、後者は “クリプキ的直観主義論理” と呼べるかもしれない。たまたま両者の証明能力は一致するが、その基となるデザインコンセプトは微妙に異なっている。

なお、直観主義論理は様相論理 **S4** に二種類の方法で埋め込めることが知られているが、**LJ** のほうは**ジラール翻訳**：

$$\begin{array}{rcl} \varphi \to \psi & \mapsto & (\Box\varphi) \to \psi \\ \varphi \vee \psi & \mapsto & \Box\varphi \vee \Box\psi \\ \exists x.\varphi(x) & \mapsto & \exists x.\Box\varphi(x) \end{array}$$

と相性がよく、**LJ$'$** のほうは**ゲーデル翻訳**：

$$\begin{array}{rcl} p(\vec{t}) & \mapsto & \Box p(\vec{t}) \\ \varphi \to \psi & \mapsto & \Box(\varphi \to \psi) \\ \forall x.\varphi(x) & \mapsto & \Box(\forall x.\varphi(x)) \end{array}$$

と相性がよい。ついでに言うと、前者は関数型プログラミング言語の**名前呼び戦略** (call-by-name) と関係が深く、後者は**値呼び戦略** (call-by-value) と関係があるように見える [5]。どうやら直観主義論理には似て非なる二つのものがあるようなのだが、正確なところはよくわかっていない。

5 古典論理と直観主義論理

本章では古典論理と直観主義論理の関係を表す二つの結果を紹介する。

第一の結果は、コルモゴロフ・ゲーデル・ゲンツェンの否定翻訳である。これにより **CL** は **IL** に埋め込むことができる。

第二の結果は、具体的な理論 T を **CL** をベースにして考えたときと **IL** をベースにして考えたときの比較である。T が一定の性質を満たせば前者と後者は $\forall\exists$ 文に関して一致する。このことを示すのに、フリードマンの A 翻訳のアイデアを用いる。

5.1 否定翻訳

古典論理では、ドモルガンの法則が成り立つ：

$$\vdash_{\mathbf{CL}} \varphi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \qquad \vdash_{\mathbf{CL}} \exists x.\varphi \leftrightarrow \neg\forall x.\neg\varphi.$$

よって $\wedge, \to, \perp, \forall$ があれば $\vee, \exists$ は定義可能なことがわかる。そこで次の論理式のクラスを考える。

定義 5.1 負の論理式 *(negative formula)* を以下のように定義する。

$$\varphi, \psi \ ::= \ \neg p(t_1, \ldots, t_n) \mid \perp \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \to \psi \mid \forall x.\varphi.$$

すなわち、原子論理式の否定と $\perp$ から始めて、$\wedge, \to, \forall$ を用いて構成できる論理式が負の論理式である。

古典論理では、どんな論理式も負の論理式と同値になる。具体的には、論理式 φ が与えられたとき

$$p(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \neg\neg p(t_1, \ldots, t_n), \qquad \psi \vee \xi \mapsto \neg(\neg\psi \wedge \neg\xi), \qquad \exists x.\psi \mapsto \neg(\forall x.\neg\psi)$$

という置き換えを施せばよい。結果として得られる負の論理式を φ の**否定翻訳** (negative translation) と呼び、φ^N と書く。論理式の集合 T については、$T^N := \{\varphi^N : \varphi \in T\}$ とする。すると明らかに $\vdash_{\mathbf{CL}} \varphi \leftrightarrow \varphi^N$ が成り立つ。

負の論理式の特徴は、二重否定則が直観主義論理においても成り立つという点にある。すなわち次のことが言える。

補題 5.2 φ を負の論理式とするとき、$\vdash_{\mathbf{IL}} \neg\neg\varphi \to \varphi$ が成り立つ。

証明 **NJ** で論じる。基本となるのは

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \neg\varphi}\ (\neg I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \bot}\ (\neg E')$$

である。後者については、$\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \varphi$（$\Gamma \Rightarrow \varphi$ に仮定を一個追加した）と $\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ $(init)$ から $(\neg E)$ 規則により $\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \bot$ が帰結するのでよい。

補題の証明は φ の構成についての帰納法による。

$\varphi \equiv \neg p(\vec{t})$ のときは、$p(\vec{t}) \Rightarrow p(\vec{t})$ から始めて $(\neg E')$, $(\neg I)$, $(\neg E')$, $(\neg I)$ の順に規則を適用すれば $\neg\neg\neg p(\vec{t}) \Rightarrow \neg p(\vec{t})$ が帰結する。

$\varphi \equiv \psi \to \xi$ のときは、$\psi, \psi \to \xi \Rightarrow \xi$ から始めてやはり $(\neg E')$, $(\neg I)$, $(\neg E')$, $(\neg I)$ の順に規則を適用すれば $\psi, \neg\neg(\psi \to \xi) \Rightarrow \neg\neg\xi$ が出てくる。帰納法の仮定により $\Rightarrow \neg\neg\xi \to \xi$ が証明できるから、$(\to E)$ 規則と $(\to I)$ 規則により $\neg\neg(\psi \to \xi) \Rightarrow \psi \to \xi$ が従う。

その他の場合も同様である。 ■

さて自然演繹の観点からいえば、**CL** と **IL** の唯一の違いは背理法、すなわち (abs) 規則が使えるかどうかにある。しかし上の補題によれば、負の論理式については (abs) 規則を使わなくても

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}$$

が成り立つ。ゆえに負の論理式に制限すれば、**CL** と **IL** の区別は消滅してしまう。それゆえ次の定理が成り立つ（本当はもう少し厳密な論証が必要である）。

定理 5.3 (否定翻訳) T を文の集合、φ を論理式とすると次のことが成り立つ。

$$T \vdash_{\mathbf{CL}} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad T^N \vdash_{\mathbf{CL}} \varphi^N \quad \Longleftrightarrow \quad T^N \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi^N.$$

上の定理によれば、古典的な論証は直観主義論理の負の論理式の範囲内で完璧に遂行することができる。この意味で、古典論理は直観主義論理の "一部" に過ぎないのである [10]。

5.2 A 翻訳

ところで補題 2.8 によれば、**NJ** の $(\bot)$ 規則は原子論理式 $p(\vec{t})$ に制限しても差支えなかったということを思い出してほしい。しかし負の論理式に制限すれば、もっとも基本的な形は $\neg p(\vec{t})$ なので、結局のところ $(\bot)$ 規則は使い道がない。

さて、$\bot$ が他のあまたの論理式とどう違うかというと、まさに $(\bot)$ 規則が使えるかどうかという点に尽きる。$(\bot)$ 規則が必要ないということは、$\bot$ の代わりにどんな論理式を用いても **IL** 側の事情は変わらないということである。

そこで A を任意の論理式として、次のような翻訳を考える。まず $\neg_A\varphi := \varphi \to A$ と略記する。与えられた論理式 φ に対して

$$\begin{array}{rcl} \bot & \mapsto & A \\ p(t_1, \ldots, t_n) & \mapsto & \neg_A\neg_A p(t_1, \ldots, t_n) \\ \varphi \vee \psi & \mapsto & \neg_A(\neg_A\varphi \wedge \neg_A\psi) \\ \exists x.\varphi(x) & \mapsto & \neg_A(\forall x.\neg_A\varphi(x)) \end{array}$$

[10] なお否定翻訳は関数型プログラミングにおける **CPS 変換**の理論と密接な関係がある [8]。

等号の公理	$x = x$	$(x = z) \wedge (y = z) \to (x = y)$	$(x = y) \to S(x) = S(y)$
	$(x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \to (x_1 + x_2 = y_1 + y_2) \wedge (x_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2)$		
算術の基本公理	$S(x) = S(y) \to x = y$	$S(x) \neq 0$	$y + 0 = y$
	$y + S(x) = S(y + x)$	$y \cdot 0 = 0$	$y \cdot S(x) = y \cdot x + y$
数学的帰納法のスキーマ	$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x.\varphi(x)$		

図 6: ペアノ算術の公理

という変換を施して得られる論理式を φ の A **翻訳** (A-translation) といい、φ^A と書く。すると次のことが成り立つ。

定理 5.4 (A **翻訳**) T を文の集合、φ を論理式とすると次のことが成り立つ。

$$T \vdash_{\mathbf{CL}} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad T^N \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi^N \quad \Longleftrightarrow \quad \text{全ての論理式 } A \text{ について } T^A \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi^A.$$

この翻訳をうまく用いれば、ある種の "具体的な" 理論については古典論理で考えても直観主義論理で考えても $\forall\exists$ 文については一致することを示すことができる。

文の集合のことを理論という。言語 L 上の理論 T について次の条件を考える。

(P1) 任意の述語記号 $p^{(n)} \in L$ について $T \vdash_{\mathbf{IL}} p(x_1, \ldots, x_n) \vee \neg p(x_1, \ldots, x_n)$.

(P2) 任意の論理式 A および $\varphi \in T$ について $T \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi^A$.

(P1) が主張するのは理論 T のプリミティヴな概念は全て決定可能である（たとえば与えられた二つの対象が同じかどうか判定できる）ということであり、(P2) が主張するのは T の公理（スキーマ）は A 翻訳に関して安定しているということである。

例 5.5 算術の言語 L_{PA}（例 *2.2*）を考える。図 *6* の論理式の $\forall$ 閉包（自由変数をすべて $\forall$ で束縛したもの）の集合を PA（一階ペアノ算術の公理系）と呼ぶ。

理論 PA を古典論理上で考えるときには**ペアノ算術 PA**、直観主義論理上で考えるときには**ハイティング算術 HA** という。$PA \vdash_{\mathbf{CL}} \varphi$ のことを $\vdash_{\mathbf{PA}} \varphi$ と書き、$PA \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi$ のことを $\vdash_{\mathbf{HA}} \varphi$ と書く。

補題 5.6 PA は条件 *(P1), (P2)* を満たす。

証明 (P2) は後で証明する補題 5.8 から従う。(P1) については、$\vdash_{\mathbf{HA}} x = y \vee x \neq y$ を示せばよい。**HA** になったつもりで次のように論じる。

(i) $\forall y(0 = y \vee 0 \neq y)$ を y に関する数学的帰納法で示す。$y = 0$ のときは明らか。次に $0 = y \vee 0 \neq y$ を仮定して $0 = S(y) \vee 0 \neq S(y)$ を示せばよいが、後者は仮定をするまでもなく算術の基本公理（と等号の公理）から明らか。

(ii) $\forall y(x = y \vee x \neq y)$ を仮定した上で、$\forall y(S(x) = y \vee S(x) \neq y)$ を y に関する数学的帰納法で示す。$y = 0$ のときには $S(x) \neq 0$ が成り立つのでよい。次に y について $S(x) = y \vee S(x) \neq y$ を仮定して $S(x) = S(y) \vee S(x) \neq S(y)$ を示せばよいが、これは最初の仮定 $\forall y(x = y \vee x \neq y)$ より従う。よって任意の x について $\forall y(x = y \vee x \neq y) \to \forall y(S(x) = y \vee S(x) \neq y)$ が示せた。

(iii) 最後に (i),(ii) から x についての数学的帰納法により $\forall x \forall y(x = y \vee x \neq y)$ が帰結する。

以上の論証は **HA** の証明図として書き下すことができる。ゆえに $\vdash_{\mathbf{HA}} x = y \vee x \neq y.$ ■

具体例が一つ得られたので、話を先に進めよう。

補題 5.7 理論 T が条件 *(P1)* を満たすとき、量化子を含まない任意の論理式 φ について排中律が成り立つ。

$$T \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi \vee \neg\varphi$$

証明 φ の構造に関する帰納法による。 ■

補題 5.8 理論 T が条件 *(P1)* を満たすとき、量化子を含まない任意の論理式 φ について

$$T \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi^A \leftrightarrow \varphi \vee A$$

が成り立つ。

証明 φ の構造に関する帰納法による。いずれの場合も $\leftarrow$ の向きは簡単なので $\to$ の向きのみ証明する。以下では

$$\vdash_{\mathbf{IL}} \neg\psi \to \neg_A\psi \qquad (*)$$

という事実をしばしば用いる。これが成り立つことは $(\perp)$ 規則より明らかである。

(i) $\varphi \equiv p(\vec{t})$. このとき $\varphi^A \equiv \neg_A\neg_A p(\vec{t})$ を仮定して $p(\vec{t}) \vee A$ を導けばよい. 条件 (P1) より $p(\vec{t}) \vee \neg p(\vec{t})$. 左の選択肢が成り立つときは明らか。右の選択肢が成り立つときは (*) より $\neg_A p(\vec{t})$. これと $\neg_A\neg_A p(\vec{t})$ を合わせて A が得られる。よって $p(\vec{t}) \vee A$.

(ii) $\varphi \equiv \perp$. このとき $\varphi^A \equiv A$ から $\varphi \vee A$ は明らかに従う。

(iii) $\varphi \equiv \psi \to \theta$. 帰納法の仮定より

$$\varphi^A \quad \equiv \quad \psi^A \to \theta^A \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \vee A \to \theta \vee A \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \to (\theta \vee A).$$

よって $\psi \to (\theta \vee A)$ を仮定して $(\psi \to \theta) \vee A$ を示せばよい。

前の補題より $\psi \vee \neg\psi$ および $\theta \vee \neg\theta$ が成り立つ。θ か $\neg\psi$ が成り立つときは、$\psi \to \theta$ がすぐに従う。一方、ψ と $\neg\theta$ と仮定からは A が帰結する。よって $(\psi \to \theta) \vee A$.

(iv) $\varphi \equiv \psi \vee \theta$. 帰納法の仮定より

$$\varphi^A \quad \equiv \quad \neg_A(\neg_A \psi^A \wedge \neg_A \theta^A) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg_A(\neg_A(\psi \vee A) \wedge \neg_A(\theta \vee A)).$$

証明すべきことは $\psi \vee \theta \vee A$ である。

前の補題より $\psi \vee \neg\psi$ および $\theta \vee \neg\theta$ が成り立つ。ψ か θ が成り立つときは明らか。一方、$\neg\psi$ と $\neg\theta$ が成り立つときは、まず (*) により $\neg_A \psi$ と $\neg_A \theta$. これと $\neg_A A := A \to A$ から $\neg_A(\psi \vee A)$ と $\neg_A(\theta \vee A)$ が従う。仮定 $\neg_A(\neg_A(\psi \vee A) \wedge \neg_A(\theta \vee A))$ と合わせて A が成り立つ。

(v) $\varphi \equiv \psi \wedge \theta$ の場合は省略。 ■

定理 5.9 ($\forall\exists$ 保存拡大) T を条件 *(P1), (P2)* を満たす理論とし、φ を $\forall\vec{x}\exists\vec{y}.\psi(\vec{x},\vec{y})$ の形の論理式とする（ただし $\psi(\vec{x},\vec{y})$ は量化子を含まない)。このとき

$$T \vdash_{\mathbf{CL}} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad T \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi.$$

証明 $\Rightarrow$ の向きを示す。話を簡単にするために、$\vec{x}, \vec{y}$ はそれぞれ一つの変数 x, y のみからなるとする。また外側の $\forall\vec{x}$ は自由に着脱可能だから、$\varphi \equiv \exists y.\psi(x,y)$ としてよい。$A \equiv \varphi$ として定理 5.3 を用いれば、$T^A \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi^A$. 条件 (P2) より $T \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi^A$. ここで

$$\varphi^A \quad \equiv \quad \neg_A \forall y.\neg_A \psi^A(x,y) \quad \equiv \quad (\forall y(\psi^\varphi(x,y) \to \varphi)) \to \varphi$$

に注意する。前の補題により、$T \vdash_{\mathbf{IL}} (\forall y(\psi(x,y) \vee \varphi \to \varphi)) \to \varphi$. ところが $\vdash_{\mathbf{IL}} \forall y(\psi(x,y) \vee \varphi \to \varphi)$ は常に成り立つ。よって $T \vdash_{\mathbf{IL}} \varphi$. ■

定理 5.3, 5.9 を **PA** と **HA** の場合にあてはめよう。L_{PA} 論理式 φ において量化子 $\forall, \exists$ は

$$\forall x \leq t.\psi(x), \qquad \exists x \leq t.\psi(x)$$

という形でしか用いられていないとき、φ を**限定論理式** (bounded formula) という。$\varphi(\vec{x},\vec{y})$ が限定論理式のとき、$\exists\vec{y}.\varphi(\vec{x},\vec{y})$ の形の論理式を Σ^0_1 **論理式**といい、$\forall\vec{x}\exists\vec{y}.\varphi(\vec{x},\vec{y})$ の形の論理式を Π^0_2 **論理式**という。

実は理論 PA の場合は、補題 5.7, 5.8 はもっと一般に限定論理式について成り立つ。このことを認めれば、**PA** と **HA** の関係は次のように述べることができる。

定理 5.10 (Π^0_2 保存拡大) φ を任意の論理式、ψ を Π^0_2 論理式とする。

$$\vdash_{\mathbf{PA}} \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \vdash_{\mathbf{HA}} \varphi^N, \qquad \vdash_{\mathbf{PA}} \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \vdash_{\mathbf{HA}} \psi.$$

しかし一方で

命題 5.11 $\vdash_{\mathbf{PA}} \psi \Longleftrightarrow \vdash_{\mathbf{HA}} \psi$ は一般の ψ については成り立たない。

証明 $\forall y.\varphi(y)$ を **PA** のゲーデル文とする（$\varphi(y)$ は限定論理式)。すなわち $\not\vdash_{\mathbf{PA}} \forall y.\varphi(y)$, $\not\vdash_{\mathbf{PA}} \neg\forall y.\varphi(y)$. このとき $\psi \equiv \exists x(\neg\varphi(x) \vee \forall y.\varphi(y))$ は酒場の法則なので当然 **PA** は証明できるが、**HA** には証明できない。なぜなら次の章で示すように **HA** については選言特性・存在特性が成り立つので、仮に **HA** に証明できるとすると、ある $n \in \mathbb{N}$ について $\vdash_{\mathbf{HA}} \neg\varphi(\mathsf{n})$ または $\vdash_{\mathbf{HA}} \forall y.\varphi(y)$ となる。よって同じことが **PA** について成り立つはずだが、これは $\forall y.\varphi(y)$ がゲーデル文であることに反する。 ■

6　ハイティング算術の証明論

直観主義論理の自然演繹 **NJ** を拡張してハイティング算術 **HA** の証明系 **NHA** を作る。目標は弱正規化定理を証明して、**HA** の選言特性・存在特性を確かめることである。ただし証明はややテクニカルなので、補遺にまわす。

HA の公理を自然に **NJ** に追加してもよいのだが、そうすると正規化が難しくなるので、まずは **HA** を簡略化する。

- **HA** では、
$$\begin{array}{rcl} \bot & := & (\mathsf{0} = \mathsf{1}) \\ \varphi \vee \psi & := & \exists x((x = 0 \to \varphi) \wedge (x \neq 0 \to \psi)) \end{array}$$
と定義できる。実際、このような定義のもとで $(\bot), (\vee I), (\vee E)$ 規則が成り立つことは容易に確かめることができる。ゆえに $\bot, \vee$ は除外して考える。

- **HA** には足し算と掛け算の計算法が公理として入っているが、これらの計算は自動的に行うことにする。つまり、合同関係
$$t + 0 \approx t, \quad t + S(u) \approx S(t + u), \quad t \cdot 0 \approx 0, \quad t \cdot S(u) \approx t \cdot u + t$$
により同値となる項は同一視する。たとえば $x \cdot \mathsf{2}$ と $(0 + x) + x$ は統語的に全く同じ項として取り扱う。よって変数を含まない項 t は必ず何らかの数項 n と同一になる（これは "deduction modulo" [2] の考え方である）。

- 今後は文（閉論理式）の証明図のみを考える。そして証明図の中で自由変数が用いられるときは、後で必ず固有変数として用いられるものとする。固有変数以外の変数には 0 を代入すればよいから、このように仮定しても差支えない。

以上の約束のもとで、**NJ** に次の推論規則を追加する。

$$\frac{}{t = t}\,(a1) \qquad \frac{t = v \quad u = v}{t = u}\,(a2) \qquad \frac{t_1 = u_1 \quad t_2 = u_2}{t_1 + t_2 = u_1 + u_2}\,(a3) \qquad \frac{t_1 = u_1 \quad t_2 = u_2}{t_1 \cdot t_2 = u_1 \cdot u_2}\,(a4)$$

$$\frac{t = u}{S(t) = S(u)}\,(a5) \qquad \frac{S(t) = S(u)}{t = u}\,(a6) \qquad \frac{0 = S(t)}{\mathsf{0} = \mathsf{1}}\,(a7) \qquad \frac{\begin{array}{c} \\ \vdots\ \mathsf{p} \\ \varphi(0) \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi(x)]_k \\ \vdots\ \mathsf{q}(x) \\ \varphi(S(x)) \end{array}}{\varphi(t)}\,(ind)_k$$

ただし (ind) 規則の x は固有変数であり、部分証明図 $\mathsf{q}(x)$ の中で $\varphi(x)$ 以外の開いた仮定に現れてはならない。

以上の推論規則を用いれば **HA** の公理がすべて証明できることは、容易に確かめることができる。

次に図 2 の簡約規則に以下のものを追加する。

$$\frac{\begin{array}{c} \\ \vdots\ \mathsf{p} \\ \varphi(0) \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi(x)]_k \\ \vdots\ \mathsf{q}(x) \\ \varphi(S(x)) \end{array}}{\varphi(\mathsf{n})}\,(ind)_k \qquad \rhd \qquad \begin{array}{c} \vdots\ \mathsf{p} \\ \varphi(0) \\ \vdots\ \mathsf{q}(0) \\ \\ \vdots\ \mathsf{q}(n-2) \\ \varphi(\mathsf{n}-1) \\ \vdots\ \mathsf{q}(n-1) \\ \varphi(\mathsf{n}) \end{array}$$

ここで先ほどの “deduction modulo” の取り決めが活きてくる。すなわち (ind) 規則結論の t は、自由変数を含まなくなった途端に何らかの n と等しくなり、上の簡約規則が使えるようになるのである。

定理 6.1 (NHA の弱正規化定理) どんな証明図 p_0 から出発しても、証明図の有限列

$$\mathsf{p}_0 \rhd \mathsf{p}_1 \rhd \cdots \rhd \mathsf{p}_n$$

が存在し、正規形の証明図 p_n へと到達することができる[11]。

証明は補遺に載せてある。補題 3.4 と同様に、次のことが成り立つ。

補題 6.2 p は文 φ の正規形の証明図で、開いた仮定を含まないものとする。

(i) φ が原子文のときには、p は推論規則 $(a1)$ – $(a7)$ のみからなる。

(ii) さもなくば、p の最後で用いられる推論規則は必ず導入規則である。

証明 (ii) 補題 3.4 と同様に証明する。新しいケースとして、最後の規則が (ind) の場合が考えられる。しかし $\varphi \equiv \varphi(t)$ は文だから t は何らかの数項 n と等しく、ゆえに上の簡約規則が適用できるはずである。これは p が正規形だという仮定に反する。

(i) φ から出発して証明図を上にたどっていく。仮に $(a1)$ – $(a7)$ 以外の推論規則が現れたとしたら、それは必ず除去規則か (ind) 規則のはずである。しかしそれがありえないことは (ii) と同様である。 ■

以上のことから **HA** の無矛盾性を証明することができる。実際、仮に $\mathsf{0} = \mathsf{1}$ の証明図があったとしたら、補題 6.2 により $(a1)$ – $(a7)$ のみを用いた証明図があるはずだが、そのような証明図が存在しえないことは計算により明らかである。

定理 5.10 により **PA** の無矛盾性も帰結する。しかしこのことはもちろん第二不完全性定理と抵触しない。実際、定理 6.1 の証明には ϵ_0 以上の順序数についての超限帰納法が必要である。

定理 6.3 (選言特性・存在特性)

(i) $\vdash_{\mathbf{HA}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Longrightarrow \quad \vdash_{\mathbf{HA}} \varphi_1$ または $\vdash_{\mathbf{HA}} \varphi_2.$

(ii) $\vdash_{\mathbf{HA}} \exists x.\varphi(x) \quad \Longrightarrow$ ある $n \in \mathbb{N}$ について $\vdash_{\mathbf{HA}} \varphi(\mathsf{n}).$

証明 (ii) の証明は定理 3.5 と同様。(i) については、どんな n についても $\vdash_{\mathbf{HA}} \mathsf{n} = \mathsf{0}$ か $\vdash_{\mathbf{HA}} \mathsf{n} \neq \mathsf{0}$ のどちらかが成り立つことに注意すればよい。 ■

定理 6.1 と 6.3 により、証明図を “プログラム” とみなすことが可能となる。

定理 6.4 (証明＝プログラム)

1. $\vdash_{\mathbf{HA}} \forall x \exists y.\varphi(x, y)$ とする。入力として $n \in \mathbb{N}$ が与えられると、$\vdash_{\mathbf{HA}} \varphi(\mathsf{n}, \mathsf{m})$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ を証明図の機械的な書き換えにより求めることができる。

2. Π^0_2 文 $\forall x \exists y.\varphi(x, y)$ について $\vdash_{\mathbf{PA}} \forall x \exists y.\varphi(x, y)$ が成り立つとする。このとき $\forall x \exists y.\varphi(x, y)$ には **NHA** の証明図があるので、上と同じことがいえる。

[11] 実際には置換簡約規則を追加してもよいし、強正規化定理も成り立つはずである。

参考文献

[1] Y. Andou. A normalization-procedure for the first-order natural deduction with full logical symbols. *Tsukuba Journal of Mathematics*, 19: 153–162.

[2] G. Dowek and B. Werner. Proof normalization modulo. *Types for Proofs and Programs*, Lecture Notes in Computer Science 1657, pp. 62-77, 1999.

[3] R.O. Gandy. An early proof of normalization by A.M. Turing. In *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism* (ed. by J.P. Seldin and J.R. Hindley). Academic Press, 1980.

[4] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen I, II. *Mathematische Zeitschrift*, 39: 176–210, 405–431, 1935.

[5] J. Maraist, M. Odersky, D.N. Turner and P. Wadler. Call-by-name, call-by-value, call-by-need and the linear lambda calculus. *Theoretical Computer Science*, 228(1-2): 175-210, 1999.

[6] F. Joachimski and R. Matthes. Short proofs of normalization for the simply- typed lambda-calculus, permutative conversions and Gödel's T. *Archive for Mathematical Logic*, 42(1):59–87, 2003.

[7] M. Parigot. $\lambda\mu$-Calculus: an algorithmic interpretation of classical natural deduction. *Lecture Notes in Computer Science* 624, pp. 190-201, 1992.

[8] G. Plotkin. Call-by-name, call-by-value and the λ-calculus. *Theoretical Computer Science* 1: 125 – 159.

[9] D. Prawitz. *Natural Deduction. A Proof-Theoretic Study*. Almquist and Wiksell, 1965.

[10] A.S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory* (2nd ed.). Cambridge University Press, 2000.

[11] J. Von Plato. Gentzen's proof of normalization for natural deduction. *Bulletin of Symbolic Logic*, 14(2):240–257, 2008.

A　定理 6.1 の証明

証明の方針は [6] による。

まずは **NHA** の証明図を簡潔に表すために記法を導入する。これまで通り L_{PA} の項は $t, u, v, \ldots$ により表し、$x, y, z, \ldots$ は論理式用の変数を表すものとする。ただし L_{PA} の項 t, u は、足し算と掛け算の計算規則で一方から他方に移れるときは同一視することに注意する。

証明における仮定を表すのに、別の種類の変数 $a, b, c, \ldots$ を用意する。証明図を表す**証明項** (proof term) を次の BNF 文法により定義する。

$$
\begin{array}{rcl}
R & ::= & M \mid t \mid i \mid (xa.M) \\
M, N & ::= & x \mid \lambda a.M \mid \lambda x.M \mid \langle M_1, M_2 \rangle \mid \langle t, M \rangle \mid a_j \langle \vec{M} \rangle \mid r(t, N, xa.M) \mid MR
\end{array}
$$

ただし $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 7$ である。また $\vec{M}$ の長さは $j = 1$ のとき 0、$j = 2, 3, 4$ のとき 2、$j = 5, 6, 7$ のとき 1 である。

NHA の証明図に図 7 のように証明項を対応させる。ただし本章では Γ は $\{a_1 : \varphi_1, \ldots, a_n : \varphi_n\}$ の形の有限集合を表すものとする。

図 7 の規則により $\Gamma \Rightarrow M : \varphi$ が導出できるとき、M は仮定 Γ から結論 φ へと至る証明図を表すものと思ってよい。以下ではこのように証明図を表す証明項のみを考える。$\Gamma \Rightarrow M : \varphi$ を簡単に M^φ あるいは $M : \varphi$ と書く。

この記法によれば、証明図の簡約規則は次の通りである。

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda a.M)N & \rhd & M[N/a] \\
(\lambda x.M)t & \rhd & M[t/x] \\
\langle M_1, M_2 \rangle i & \rhd & M_i \\
\langle t, N \rangle (xa.M) & \rhd & M[t/x, N/a] \\
r(\mathsf{n}, N, xa.M) & \rhd & M^n(N)
\end{array}
$$

ここで $M[N/a]$ は変数 a に証明項 N を代入した結果を表す。$M[t/x]$ についても同様である。$M^n(N)$ は

$$
M^0(N) := N, \qquad M^{m+1}(N) := M[\mathsf{m}/x, M^m(N)/a]
$$

により定義する。

集合 WN を次のように帰納的に定義する。

$$
\frac{\vec{R} \in \mathsf{WN}}{a\vec{R} \in \mathsf{WN}} \qquad \frac{M \in \mathsf{WN}}{\lambda a.M \in \mathsf{WN}} \qquad \frac{M \in \mathsf{WN}}{\lambda x.M \in \mathsf{WN}}
$$

$$
\frac{M_1, M_2 \in \mathsf{WN}}{\langle M_1, M_2 \rangle \in \mathsf{WN}} \qquad \frac{N \in \mathsf{WN}}{\langle t, N \rangle \in \mathsf{WN}} \qquad \frac{\vec{M} \in \mathsf{WN}}{a_j \langle \vec{M} \rangle \in \mathsf{WN}}
$$

$$
\frac{M[N/a]\vec{R} \in \mathsf{WN}}{(\lambda a.M)N\vec{R} \in \mathsf{WN}} \qquad \frac{M[t/x]\vec{R} \in \mathsf{WN}}{(\lambda x.M)t\vec{R} \in \mathsf{WN}} \qquad \frac{M_i\vec{R} \in \mathsf{WN}}{\langle M_1, M_2 \rangle i\vec{R} \in \mathsf{WN}}
$$

$$
\frac{M[t/x, N/a]\vec{R} \in \mathsf{WN}}{\langle t, N \rangle (xa.M)\vec{R} \in \mathsf{WN}} \qquad \frac{M, N, \vec{R} \in \mathsf{WN}, \quad M^m(N)\vec{R} \in \mathsf{WN} \quad (\forall m \in \mathbb{N})}{r(t, N, xa.M)\vec{R} \in \mathsf{WN}}
$$

$$\frac{a:\varphi \in \Gamma}{\Gamma \Rightarrow a:\varphi}\ (init)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow M:\varphi_1 \quad \Gamma \Rightarrow N:\varphi_2}{\Gamma \Rightarrow \langle M,N\rangle:\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow M:\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \Rightarrow Mi:\varphi_i}\ (\wedge E)$$

$$\frac{\Gamma, a:\varphi \Rightarrow M:\psi}{\Gamma \Rightarrow \lambda a.M:\varphi \to \psi}\ (\to I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow M:\varphi \to \psi \quad \Gamma \Rightarrow N:\varphi}{\Gamma \Rightarrow MN:\psi}\ (\to E)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow M:\varphi(x)}{\Gamma \Rightarrow \lambda x.M:\forall x.\varphi(x)}\ (\forall I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow M:\forall x.\varphi(x)}{\Gamma \Rightarrow Mt:\varphi(t)}\ (\forall E)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow N:\varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \langle t,N\rangle:\exists x.\varphi(x)}\ (\exists I) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow N:\exists x.\varphi(x) \quad \Gamma, a:\varphi(x) \Rightarrow M:\xi}{\Gamma \Rightarrow N(xa.M):\xi}\ (\exists E)$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow a_1:t=t}\ (a1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow M_1:t=v \quad \Gamma \Rightarrow M_2:u=v}{\Gamma \Rightarrow a_2(M_1,M_2):t=u}\ (a2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow M_1:t_1=u_1 \quad \Gamma \Rightarrow M_2:t_2=u_2}{\Gamma \Rightarrow a_3(M_1,M_2):t_1+t_2=u_1+u_2}\ (a3) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow M_1:t_1=u_1 \quad \Gamma \Rightarrow M_2:t_2=u_2}{\Gamma \Rightarrow a_4(M_1,M_2):t_1 \cdot t_2=u_1 \cdot u_2}\ (a4)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow M:t=u}{\Gamma \Rightarrow a_5(M):S(t)=S(u)}\ (a5) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow M:S(t)=S(u)}{\Gamma \Rightarrow a_6(M):t=u}\ (a6) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow M:0=S(t)}{\Gamma \Rightarrow a_7(M):0=1}\ (a7)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow N:\varphi(0) \quad \Gamma, a:\varphi(x) \Rightarrow M:\varphi(S(x))}{\Gamma \Rightarrow r(t,N,xa.M):\varphi(t)}\ (ind)$$

図 7: 証明項の割り当て

ただし $R \in \mathsf{WN}$ は、$R \equiv (xa.M)$ のときには $M \in \mathsf{WN}$ を意味し、$R \equiv i$ または t のときは自動的に成り立つものとする。

最後の規則は無限に多くの前提を持つので、$M \in \mathsf{WN}$ の帰納的ノルムは一般に ω より大きくなる。よって以下の証明は超限帰納法による。

補題 A.1 $M \in \mathsf{WN}$ ならば M は弱正規化可能である [12]。

証明 $M \in \mathsf{WN}$ の導出に関する帰納法による。$M \equiv a\vec{R} \in \mathsf{WN}$ ならば、$\vec{R} = R_1, \ldots, R_n$ は全て WN に属するので、帰納法の仮定により正規化可能である。ゆえに $M \equiv aR_1 \cdots R_n$ が与えられたら $R_1, \ldots, R_n$ を順々に正規化していけば、全体も正規化できる。

もう一つ、$r(t, N, xa.M)\vec{R} \in \mathsf{WN}$ について見ておこう。t が自由変数を含む場合には $M, N, \vec{R} \in \mathsf{WN}$ に帰納法の仮定を適用すればこれら全てが正規化可能だから、全体も正規化可能である。また $t \equiv \mathsf{n}$ のときには $r(t, N, xa.M)\vec{R} \rhd M^n(N)\vec{R} \in \mathsf{WN}$ なので $M^n(N)\vec{R}$ に帰納法の仮定を適用すればよい。 ■

補題 A.2 全ての $M \in \mathsf{WN}$ について次のことが成り立つ。

(i) $M[t/x] \in \mathsf{WN}$.

(ii) $M : \forall x.\psi(x) \quad \Longrightarrow \quad Mt \in \mathsf{WN}$.

(iii) $M : \psi_1 \wedge \psi_2 \quad \Longrightarrow \quad Mi \in \mathsf{WN}$.

証明 $M \in \mathsf{WN}$ の導出に関する帰納法による。たとえば (ii) でもっとも重要なのは、規則

$$\frac{M' \in \mathsf{WN}}{\lambda x.M' \in \mathsf{WN}}$$

により $M \equiv \lambda x.M' \in \mathsf{WN}$ となる場合である。この場合帰納法の仮定 (i) から $M'[t/x] \in \mathsf{WN}$ が言える。ゆえに WN の定義により $Mt \equiv (\lambda x.M')t \in \mathsf{WN}$. ■

補題 A.3 全ての論理式 φ と全ての $M \in \mathsf{WN}$ について次のことが成り立つ。

(i) $M : \varphi \equiv \exists x.\psi(x),\ L \in \mathsf{WN} \quad \Longrightarrow \quad M(xa.L) \in \mathsf{WN}$.

(ii) $N : \varphi,\ N \in \mathsf{WN} \quad \Longrightarrow \quad MN \in \mathsf{WN}$.

(iii) $N : \varphi,\ N \in \mathsf{WN} \quad \Longrightarrow \quad M[N/a] \in \mathsf{WN}$.

証明 φ のサイズと $M \in \mathsf{WN}$ の導出に関する二重帰納法による。ただし φ に関する大帰納法の内側では、(ii), (iii) を示す前に全ての $M \in \mathsf{WN}$ について (i) を示しておくこと。

たとえば (i) でもっとも重要なのは、規則

$$\frac{N \in \mathsf{WN}}{\langle t, N \rangle \in \mathsf{WN}}$$

[12] M は証明図の形をしたものに制限していることを再度注意しておく。

により $M^{\exists x.\psi(x)} \equiv \langle t, N^{\psi(t)} \rangle \in \mathsf{WN}$ となる場合である。まず補題 A.2(i) により $L[t/x] \in \mathsf{WN}$. 一方、$N^{\psi(t)} \in \mathsf{WN}$ より大帰納法の仮定 (iii) が使えるので $L[t/x, N/a] \in \mathsf{WN}$. よって WN の定義より $M(xa.L) \equiv \langle t, N \rangle (xa.L) \in \mathsf{WN}$ がいえる。その他の場合は小帰納法の仮定 (i) からすぐに従う（小帰納法の仮定 (ii), (iii) は用いないことに注意）。

次に (ii) でもっとも重要なのは、規則

$$\frac{M' \in \mathsf{WN}}{\lambda a.M' \in \mathsf{WN}}$$

により $M \equiv \lambda a.M' \in \mathsf{WN}$ となる場合である。このとき小帰納法の仮定 (iii) により $M'[N/a] \in \mathsf{WN}$ なので $MN \equiv (\lambda a.M')N \in \mathsf{WN}$ が帰結する。その他の場合は小帰納法の仮定 (ii) からすぐに従う。

最後に (iii) でもっとも重要なのは、規則

$$\frac{\vec{R} \in \mathsf{WN}}{a\vec{R} \in \mathsf{WN}}$$

により $M \equiv a\vec{R} \in \mathsf{WN}$ となる場合である。$N^{\varphi} \in \mathsf{WN}$ とする。いま列 $\vec{R}[N/a]$ を $\vec{S} \equiv S_1, \cdots, S_n$ と書くことにすれば、$M[N/a] \equiv N\vec{S}$ であり、小帰納法の仮定 (iii) より $\vec{S} \in \mathsf{WN}$ である。もしも $\vec{S}$ が空列ならば $N\vec{S} \equiv N \in \mathsf{WN}$ は仮定そのものである。さもなければ $S_1, \ldots, S_n$ を順次 N に適用していく。

$S_1 \equiv i$ または t のときは補題 A.2(ii), (iii) より $NS_1 \in \mathsf{WN}$ である。また $S_1 \equiv N'$ の時には論理式のサイズに着目する。いま $N : \varphi \equiv \psi \to \xi,\ N' : \psi$ となっているから、大帰納法の仮定 (ii) が適用できて $NS_1 \equiv NN' \in \mathsf{WN}$ である。最後に $S_1 \equiv (xa.L)$ の場合を考えると、$N : \varphi \equiv \exists x.\psi(x)$ だから (i) が使える（φ が固定されているとき、(i) はすべての $M \in \mathsf{WN}$ についてすでに証明されていることに注意）。よって $NS_1 \in \mathsf{WN}$ である。同じことを $S_2, \ldots, S_n$ について繰り返せば $M[N/a] \equiv N\vec{S} \in \mathsf{WN}$ が言える。 ■

補題 A.4 M が証明図を表すならば、$M \in \mathsf{WN}$.

証明 M の構造に関する帰納法による。M が a, $\lambda a.M'$, $\lambda x.M'$, $\langle M_1, M_2 \rangle$, $\langle t, N \rangle$, $a_j \langle \vec{M} \rangle$ のときは、WN の定義と帰納法の仮定から $M \in \mathsf{WN}$ が言える。M が $M'R$ の形のときは補題 A.2, A.3 と帰納法の仮定から言える。最後に M が $r(t, N, xa.M)$ の形のときは、まず帰納法の仮定から $M, N \in \mathsf{WN}$. さらに補題 A.2(i) と補題 A.3(iii) を繰り返すことにより $M^n(N) \in \mathsf{WN}$ が言える。よって WN の定義から $r(t, N, xa.M) \in \mathsf{WN}$ が成り立つ。 ■

これで証明が完成した。定理 6.1 は補題 A.1, A.4 からすぐに帰結する。