曲面の微分トポロジー演習　加藤毅

１：$X \subset \mathbf{R}^{n+k}$ を n 次元境界付き多様体とする時、その境界 ∂X は $n-1$ 次元多様体であることを示せ。

２：陰関数定理（定理１）を証明せよ（ヒント　中間値の定理)。

３：$F: X \to Y$ を C^∞ 写像とする。$(x', y') \in Y$ を正則値とするとき、$F^{-1}(x', y') \subset \mathbf{R}^{n+k}$ は $n-m$ 次元多様体であることを示せ（ヒント　陰関数定理)。

４：$F: D^n \to D^n$ を連続写像とする時、Brower の定理を示せ（ヒント　F を C^∞ 写像で近似して C^∞ の場合の Brower の定理に帰着。C^∞ の場合は講議で行う）。

５：逆関数定理を陰関数定理から導け。

６：モース指数は座標変換の取り方に依らずに定まることを示せ。

７：一変数変換群 φ_t について、$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ が成り立つことを示せ。

８：$(F_*)_p$ の二つの定義が一致することを示せ（定義は不動点指数の項)。

９：$S^1 \times S^1$ は T^2 と同一視できることを示せ。さらに、$\Delta \subset S^1 \times S^1$ はどのように埋め込まれているか図示せよ。

１０：$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ をモース関数とし、∇f の一変数変換群 φ_t について、0 が臨界点の時、0 での φ_t の不動点指数は $(-1)^{n-\lambda}$ となることを示せ。ここで、λ はモース指数で、$t > 0$ とする。

不動点指数：

$$F: B_{\epsilon'}(0) \cong U \subset B_\epsilon(0)$$

を微分同相写像とし、$p \in B_{\epsilon'}(0)$ を不動点とする。この時、写像

$$(F_*)_p : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$$

を以下の二つの方法で定める。

１：

$$(F_*)_p(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{dF_1(p+t\mathbf{v})}{dt}\Big|_{t=0}, \\ \cdots \\ \cdots \\ \frac{dF_n(p+t\mathbf{v})}{dt}\Big|_{t=0}). \end{pmatrix}$$

２：

$$(F_*)_p(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

$1-(F_*)_p : \mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^n$ が同型写像の時、p を非退化な不動点と呼び、その不動点指数を、

$$\text{sgn det } (1-(F_*)_p) = \begin{cases} +1 & \det \ > 0, \\ -1 & \det \ < 0 \end{cases}$$

で定める。

参考文献：
１：Morse Theory, J.Milnor, Princeton University Press,
２：Morse 理論の基礎　松本幸夫　岩波講座現代数学の基礎
３：Topology from the differential view points, J.Milnor,