SUR UNE THEORIE DES COCHAINES TRESSEES
EN TOPOLOGIE ALGEBRIQUE
(Version préliminaire)

Max Karoubi

Université Paris 7. UFR de Mathématiques
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05
e.mail : karoubi@math.jussieu.fr
http://www.math.jussieu.fr/~karoubi/

Le but de cette théorie est d'assigner à un ensemble simplicial X un nouveau type de formes différentielles dites "tressées" et définies sur un anneau de base arbitraire (pas seulement **R** ou **C**). Leur premier intérêt est de fournir de nombreux exemples de représentations du groupe des tresses. Elles permettent aussi de définir une algèbre différentielle graduée tressée $\mathcal{D}^*(X)$ qui est quasi-isomorphe à l'algèbre des cochaînes. On conjecture que ce tressage de $\mathcal{D}^*(X)$ détermine (sous certaines conditions de finitude) le type d'homotopie de X. De nombreux résultats déjà obtenus rendent plausible une telle conjecture. En particulier on montre que les opérations de Steenrod et les groupes d'homotopie de X peuvent se déduire de cette structure algébrique. Notre travail poursuit ainsi celui de D. Quillen [24] et D. Sullivan [28] en homotopie rationnelle, où les algèbres différentielles graduées <u>commutatives</u> jouent un rôle essentiel. Il est aussi intimement lié à celui de M.A. Mandell sur le type d'homotopie p-adique [19] [20].

Les formes différentielles tressées enrichissent considérablement la théorie classique des cochaînes. De manière précise, on se donne pour tout couple d'espaces X et Y, un tressage naturel[1]

$$R_{X,Y} : \mathcal{D}^*(X) \otimes \mathcal{D}^*(Y) \longrightarrow \mathcal{D}^*(Y) \otimes \mathcal{D}^*(X)$$

et un morphisme de modules différentiels gradués (cup-produit)

$$m_{X,Y} : \mathcal{D}^*(X) \otimes \mathcal{D}^*(Y) \longrightarrow \mathcal{D}^*(X \times Y),$$

tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^*(X) \otimes \mathcal{D}^*(Y) & \longrightarrow & \mathcal{D}^*(X \times Y) \\ R_{X,Y}\downarrow & & \sigma\downarrow \\ \mathcal{D}^*(Y) \otimes \mathcal{D}^*(X) & \longrightarrow & \mathcal{D}^*(Y \times X) \end{array}$$

Dans ce diagramme σ est simplement induit par l'échange des facteurs $Y \times X \longrightarrow X \times Y$.

[1] Les produits tensoriels sont pris sur un anneau commutatif de base k fixé une fois pour toutes.

Ces données satisfont à des axiomes simples (en particulier l'axiome de Yang-Baxter, bien connu en théorie des groupes quantiques).

Nous allons maintenant esquisser les idées essentielles de ce travail, notamment notre substitut "tressé" pour l'algèbre des cochaînes.

Comme dans la théorie de Quillen et Sullivan, il nous faut trouver l'analogue algébrique de l'intervalle [0, 1]. Celui-ci est donné par l'algèbre $\mathcal{D}^0(x)$ des fonctions

$$f : \mathbf{Z} \longrightarrow k$$

qui sont constantes quand la variable x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (deux limites indépendantes). Le "module des différentielles" $\mathcal{D}^1(x)$ de telles fonctions peut s'écrire comme le sous-module de $\mathcal{D}^0(x)$ formé des combinaisons linéaires finies de fonctions de Dirac (donc 0 à l'infini). Si on pose $\bar{f}(x) = f(x + 1)$, la structure de module <u>à droite</u> de $\mathcal{D}^1(x)$ est définie par la formule suivante

$$\omega.f = \bar{f}.\omega$$

avec $f \in \mathcal{D}^0(x)$ et $\omega \in \mathcal{D}^1(x)$.
On définit la différentielle $d : \mathcal{D}^0(x) \longrightarrow \mathcal{D}^1(x)$ par la formule $d(f)(x) = f(x + 1) - f(x)$ (calcul aux différences), ce qui permet d'introduire de manière évidente l'algèbre différentielle graduée $\mathcal{D}^*(x) = \mathcal{D}^0(x) \oplus \mathcal{D}^1(x)$. Celle-ci a une cohomologie concentrée en degré 0 et est isomorphe à k (lemme de Poincaré). Elle peut être munie d'un tressage que nous détaillons dans [14]. Avec les notations précédentes, nous avons par exemple

$$R(\omega \otimes f) = \bar{f} \otimes \omega.$$

Dans cette interprétation de l'intervalle [0, 1], $-\infty$ joue le rôle de 0 et $+\infty$ celui de 1, ce qui se manifeste par l'existence de deux augmentations naturelles de $\mathcal{D}^*(x)$ vers k. En poursuivant cette analogie, il est naturel de définir l'analogue algébrique du (r+1)-cube comme le produit tensoriel gradué

$$\mathcal{D}^*(x_0,..., x_r) = \mathcal{D}^*(x_0) \otimes \mathcal{D}^*(x_1) \otimes ... \otimes \mathcal{D}^*(x_r),$$

c'est-à-dire avec des "formes différentielles" en des variables x_i indépendantes. De même, le r-simplexe Δ_r est "défini" par l'équation $x_0 + ... + x_r = +\infty$ (c'est-à-dire avec une des variables x_α égale à $+\infty$, en convenant que $t + (+\infty) = +\infty$ pour tout t. De manière plus précise, $\mathcal{D}^*(\Delta_r)$ est l'égalisateur des deux flèches obtenues en rendant égales à $+\infty$ certaines variables

$$\prod_i \Omega^*(x_0,..\hat{x}_i,.., x_r) \rightrightarrows \prod_{i<j} \Omega^*(x_0,..\hat{x}_i,.., \hat{x}_j, .., x_r)$$

Les opérations face sur $\Omega^*(\Delta_r)$ sont obtenues en posant $x_\alpha = -\infty$ (comparer avec [4]).

On peut montrer que la correspondance $[r] \mapsto \Omega^*(\Delta_r)$ définit une ADG simpliciale tressée. Si $X = X_\natural$ est un ensemble simplicial, l'ADG des formes différentielles tressées sur X est alors définie par la formule suivante :

$$\underline{\Omega}^*(X) = \mathrm{Mor}(X_\natural, \Omega^*(\Delta_\natural))$$

où $\mathrm{Mor}(X_\natural, Y_\natural)$ désigne en général l'ensemble des morphismes simpliciaux de X vers Y (cf. [3] où de telles "theories cohomologiques" sont décrites, en relation avec des travaux non publiés d'Alexander Grothendieck). Afin d'écrire de manière plus commode le produit tensoriel de copies de $\underline{\Omega}^*(X)$ si X est infini, on remplace $\underline{\Omega}^*(X)$ par l'algèbre quasi-isomorphe $\Omega^*(X)$, qui est égale au "produit réduit" $\Omega^*(X) = C^\natural(X) \otimes_{\Delta^{op}} \Omega^*(\Delta_\natural)$ (cf. A.-K. Bousfield et D. Kan)[2].

Si X est un complexe simplicial fini, les deux définitions coïncident : $\underline{\Omega}^*(X) = \Omega^*(X)$ est simplement l'algèbre obtenue en égalisant les deux morphismes canoniques

$$\prod_\sigma \Omega^*(\sigma) \rightrightarrows \prod_{\sigma,\tau} \Omega^*(\sigma \cap \tau)$$

σ et τ parcourant l'ensemble des simplexes de X (isomorphes à Δ_r , r = 0, 1...) : la description intuitive de $\Omega^*(X)$ qui en résulte est très proche de celle introduite à l'origine par D. Sullivan dans le cas rationnel.

La cohomologie des complexes $\Omega^*(X)$ et $\underline{\Omega}^*(X)$ est naturellement isomorphe à la cohomologie simpliciale usuelle à coefficients dans k (avec sa structure multiplicative). La structure tressée de $\Omega^*(x)$ s'étend en une structure tressée "bisimpliciale"[3] sur les $\Omega^*(\Delta_r)$: on a ainsi un morphisme

$$\Omega^*(\Delta_r) \otimes \Omega^*(\Delta_s) \xrightarrow{R} \Omega^*(\Delta_s) \otimes \Omega^*(\Delta_r)$$

---

[2] A.-K.Bousfield and D.-M. Kan. Homotopy limits, completions and localizations, Springer Lecture Notes in Mathematics 304 (1972).

[3] En fait, le tressage est compatible avec les opérations face seulement ; mais ceci est suffisant pour nos besoins.

vérifiant des conditions de compatibilité évidentes avec les opérations face. Par fonctorialité, ce tressage induit le morphisme

$$R_{X,Y} : \mathcal{D}^*(X) \otimes \mathcal{D}^*(Y) \longrightarrow \mathcal{D}^*(Y) \otimes \mathcal{D}^*(X)$$

annoncé au début.

Les applications de cette théorie sont les suivantes. Tout d'abord, le passage du groupe des tresses au groupe symétrique permet de définir de manière élégante les opérations de Steenrod en évitant la machinerie simpliciale (comparer avec [10] et [11]). De manière plus originale, on montre comment itérer la “bar-construction” dans le contexte des cochaînes tressées, ce qui permet de définir simplement un complexe “calculant” les groupes de cohomologie d'espaces de lacets itérés [11]. Enfin, on montre aussi comment associer à cette théorie des cochaînes une E^{∞}-algèbre (dans le sens des opérades) et utiliser ainsi toute la machinerie de [19] et [20] pour décrire le type d'homotopie.

Remerciements. Je remercie tout particulièrement M.-A. Mandell pour m'avoir communiqué ses résultats récents [19] [20] qui sont utilisés pour décrire le type d'homotopie à partir du tressage. M. Zisman a fait des remarques pertinentes qui ont conduit à de nombreuses améliorations dans la présentation (notamment l'usage plus systématique du produit réduit ∇).

Articles de l'auteur liés à celui-ci (où d'autres présentations ont été données dans des contextes voisins) : cf. [11], [12] et [13].

REFERENCES

[1] BIRMAN J.-S. : Braids, links and mapping class groups. Annals of Math. Studies. Princeton University Press (1974).

[2] CAP A., SCHICHL H., VANZURA J. : On twisted tensor product of algebras. Commun. Algebra 23(12), 4701-4735 (1995).

[3] CARTAN H. : Théories cohomologiques. Invent. Math. 35, 261-271 (1976).

[4] CENKL B. et PORTER R. : Lazard completion of a group and the free differential graded models over subrings of the rationals. Topology 23, 445-464 (1984).

[5] DWYER W.G. Strong convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence. Topoloy, Vol. 13, 255-265 (1974).

[6] EPSTEIN D.B.A. : Steenrod operations in homological algebra. Invent. math. 1, 152-208 (1966).

[7] GOERSS P. : Simplicial chains over a field and p-local Homology Theory. Math. Z. 220, 523-544 (1995).

[8] GRAY B. : Homotopy theory. Academic Press

[9] KAROUBI M. : Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires. Transactions of the AMS 347, 4277-4299 (1995).

[10] KAROUBI M. : Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod. Topology 34, 699-715 (1995).

[11] KAROUBI M. : Quantum methods in Algebraic Topology. Contemporary Mathematics Vol 279, American Math. Society (2000)

[12] KAROUBI M. : Braiding of differential forms and homotopy types. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 331, Série 1, p. 757-762 (2000).

[13] KAROUBI M. : Algebraic braided model of the affine line and difference calculus on a topological space. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 335, Sér. I, p. 121-126 (2002).

[14] KAROUBI M. et SUAREZ M. : Twisted Kaëhler differential forms. A paraître au Journal of Pure and Applied Algebra (2003).

[15] KASSEL C. Quantum groups. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 155. Springer-Verlag (1995).

[16] KRIZ I. : p-adic homotopy theory. Topology and its applications 52, 279-308 (1993).

[17] KRIZ I. et MAY P. : Operads, Algebras, Modules and Motives. Astérisque 233 (1995).

[18] MALTSINIOTIS G. : Le langage des espaces et des groupes quantiques. Commun. Math. Phys. 151, pp. 275-302 (1993).

[19] MANDELL M.-A. : E_∞-algebras and p-adic homotopy theory. Topology 40, 43-94 (2001).

[20] MANDELL M.-A. : Cochain multiplications. Amer. J. Math. 124, 547-566 (2002).

[21] MAY P. : Simplicial methods in Algebraic Topology. The University of Chicago (1992).

[22] MILLER E.Y. : de Rham cohomology with arbitrary coefficients. Topology, Vol. 17, 193-203 (1978).

[23] MOUET C. : q-cohomologie non commutative. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 323, 849-851 (1996).

[24] QUILLEN D. : Rational Homotopy Theory. Annals of Math. 90, 205-295 (1969).

[25] RECTOR D. : Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence. Comment.Math. Helvetici 45, 540-552 (1970).

[26] SEGAL G. : Categories and cohomology theories. Topology 13, 293-312 (1974).

[27] SPANIER E. : Algebraic Topology. Mc Graw Hill. New-York (1966).

[28] SULLIVAN D. : Infinitesimal computations in Topology. Publ. Math. IHES 47, 269-331 (1977).

[29] WEIBEL C. : An introduction to homological algebra. Cambridge University Press (1994) [AMA - Algebra Montpellier Announcements - 01-2003] [September 2003].