An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 11(2), 2003, 101–108

DESPRE STUDIUL TEORETIC AL CURENŢILOR DE DERIVĂ ŞI DE PANTĂ

Angela Muntean

1 Introducere

Curenţii marini constituie unul dintre cei mai importanţi factori care crează multe dintre particularităţile regimului hidrologic şi hidrobiologic al bazinului marin respectiv şi au influenţe determinante asupra climei regiunilor limitrofe.

Dintre forţele care actionează în mediul marin, forţa de antrenare a vântului ramâne una dintre cele mai importante în generarea şi întretinerea mişcărilor apelor marine. Curenţii de derivă sunt curenţii care apar în apele mărilor şi oceanelor datorită forţei de antrenare a vântului. Studiaţi la început de Ekman, aceşti curenţi au primit şi numele de *curenţi Ekman*.

Pe de altă parte, suprafaţa mării poate fi considerată ca fiind o suprafaţă izobară, atâta timp cât presiunea atmosferică poate fi presupusă constantă. Există o serie de factori care pot antrena schimbări ale pantei suprafeţei mării, dintre care forţa de antrenare a vântului şi variaţiile de densitate sunt cei mai importanţi.

Forţa de antrenare a vântului, împreună cu alţi factori, dintre care variaţia presiunii atmosferice, chiar în absenţa forţelor interne, duce la apariţia unor gradienţi slabi ai suprafeţei mării, suficienţi, însă, pentru apariţia unor curenţi marini, cunoscuţi sub numele de curenţi de pantă. Lucrarea se ocupă de aspectele comune şi de diferenţele care apar în studiul teoretic al acestor două tipuri de curenţi.

2 Ecuaţiile de mişcare pentru curenţii de derivă şi curenţii de pantă

Sistemul general al ecuaţiilor de mişcare, în cazul circulaţiei apelor marine este deosebit de dificil, fiind format din ecuaţiile Navier-Stokes, ecuaţia de continuitate, ecuaţia de stare şi ecuaţiile difuziei celor două marimi ce caracterizează şi influenţează mişcarea. Este vorba despre temperatură şi salinitate.

Se ajunge, astfel, la un sistem de şapte ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, dintre care cinci sunt de ordinul al doilea. Numărul de necunoscute este tot de şapte: cele trei componente ale vitezei, presiunea, densitatea, temperatura si salinitatea.

Pentru studiul curenţilor de derivă şi de pantă, au fost făcute multe ipoteze simplificatoare, ceea ce a făcut posibilă rezolvarea problemelor, cu rezultate destul de bune.

Pentru curenţii de derivă, se porneste de la ipoteza că suprafaţa mării este plană, coeficientul de vîscozitate constant, iar deasupra apei se presupune că suflă un vânt de viteză şi direcţie constante, dată de un unghi de măsura α_1, măsurat faţă de direcţia pozitivă a axei O, şi marime T. Axele se aleg, ca de fiecare dată în oceanografie, cu Ox spre est şi Oy spre nord. Se consideră că vântul a suflat o perioadă de timp suficient de lungă astfel încât mişcarea apei să devină permanentă. Componenta verticala a vitezei apei şi derivatele ei partiale se consideră nule, iar forţele aplicate mişcării sunt: forţa de antrenare a vântului (care nu intervine decât în condiţiile la limită), forţele datorate vîscozităţii şi forţa Coriolis. u, v sunt cele două componente nenule (orizontale ale vitezei), considerate ca funcţii de z, φ este latitudinea, ω este marimea vitezei unghiulare de rotaţie a Pamântului. Ecuaţiile de mişcare sunt:

$$\alpha\mu\frac{d^2u}{dz^2} + 2\omega v \sin\varphi = 0 \tag{1}$$

$$\alpha\mu\frac{d^2v}{dz^2} - 2\omega u \sin\varphi = 0$$

Se acceptă condiţiile la limită:

$$\mu\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = T\sin\alpha_1, \tag{2a}$$

$$\mu\left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=0} = T\cos\alpha_1, \tag{2b}$$

care derivă din faptul că, la suprafaţa apei acţionează forţa de antrenare a vântului.

La $z = -H$, adică la fundul bazinului, viteza este nulă , de unde condiţia la limită:

$$u = v = 0 \text{ la } z = -H. \tag{3}$$

Pentru a putea studia curenţii de pantă, se presupune că marea este omogenă şi asupra ei a bătut un vânt care a dus la formarea unei pante permanente a suprafeţei mării. În plus, se consideră că gradienţii de presiune, la orice adâncime, au aceeaşi marime şi aceeaşi direcţie. De asemenea, se presupune că vitezele relative ale diferitelor straturi de apă sunt nule, iar coeficientul de vîscozitate este, şi el, presupus constant.

Se presupune că panta suprafeţei mării are ecuaţia:

$$z = \eta(x, y) \tag{4}$$

şi, la fel ca în cazul curenţilor de derivă, deasupra apei se presupune că suflă un vânt de viteză şi direcţie constante, dată de un unghi de măsură α_1, măsurat faţă de direcţia pozitivă a axei O, şi mărime T.

Axele se aleg, ca de fiecare dată în oceanografie, cu Ox spre est, Oy spre nord şi Oz verticala ascendentă. Se consideră că vântul a suflat o perioadă de timp suficient de lungă astfel încât mişcarea apei să devină permanentă. Panta suprafeţei mării, presupusă constantă, se ia, pentru simplificarea calculelor, pe direcţia axei Oy. Se notează:

$$\gamma = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{5}$$

panta descendentă a suprafeţei libere. Aproximaţia hidrostatică permite scrierea ecuaţiei:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\rho g \gamma. \tag{6}$$

Cu aceleaşi notaţii ca şi în cazul curenţilor de derivă, ecuaţiile de mişcare se scriu:

$$\begin{aligned} \alpha\mu \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\omega v \sin\varphi &= g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (7) \\ \alpha\mu \frac{d^2 v}{dz^2} - 2\omega u \sin\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Se acceptă aceleaşi condiţii la limită:

$$\mu \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = T \sin\alpha_1 \tag{8a}$$

$$\mu \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=0} = T \cos\alpha_1, \tag{8b}$$

la $z = 0$, deci la suprafaţa apei şi la $z = -H$, adică la fundul bazinului, viteza nulă, de unde condiţia la limită:

$$u = v = 0. \tag{9}$$

Se observă că, în modul de abordare a problemei, curenţii de derivă apar ca un caz particular al curenţilor de pantă. Din acest motiv, se va face referire doar la modul în care se rezolvă problema în cazul curenţilor de pantă.

3 Soluţii ale sistemelor ecuaţiilor de mişcare

Se foloseşte metoda introdusă de Gougenheim şi Saint-Guilly, care au utilizat, în rezolvarea sistemului, numerele complexe. Se notează cu $w = u + iv$ şi se adună prima ecuaţie a sistemului cu cea de-a doua înmulţită cu i. Se obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi:

$$\alpha\mu\frac{d^2w}{dz^2} - ifw = g\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{10}$$

Cu notaţia consacrată în oceanografie,

$$a = \sqrt{\frac{f}{2\alpha\mu}}$$

ecuaţia (10) devine:

$$\frac{d^2w}{dz^2} - 2ia^2w = \frac{g}{\mu\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{11}$$

Transpuse pentru noua necunoscută w, condiţiile la limită, pentru această ecuaţie diferenţială, sunt:

$$w = 0 \text{ la } z = -H$$

şi

$$\mu\frac{dw}{dz} = Tie^{-i\alpha_1} \text{ la } z = 0. \tag{12}$$

Notând cu $\zeta = H + z$, reprezentând distanţa de la stratul de apă pentru care se calculează viteza pâna la fundul bazinului, soluţia ecuaţiei diferenţiale (10), cu condiţiile la limită (12), este:

$$\begin{aligned}
w = {} & \frac{T}{\sqrt{2}a\mu(ch2aH + \cos 2aH)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right)(\cos a\,(\zeta + H)\right. \\
& sha\,(\zeta - H) + \cos a(\zeta - H)sha\,(\zeta + H)) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right)\times \\
& \times\left.(\sin a(\zeta + H)cha\,(\zeta - H) + \sin a\,(\zeta - H)\,cha\,(\zeta + H))\right] + \\
& + \frac{\tau}{\sqrt{2}a\mu\,(ch2aH + \cos 2aH)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right)(\sin a\,(\zeta - H)\right. \\
& cha\,(\zeta + H) + \sin a\,(\zeta + H)\,cha\,(\zeta - H)) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right)\times \\
& \times\left.(\cos a\,(\zeta - H)\,sha\,(\zeta + H) + \cos a\,(\zeta + H)\,sha\,(\zeta + H))\right] + \\
& + \frac{\rho g}{2\mu a^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}i\left[1 - \frac{1}{\cos 2aH + ch2aH}(\cos az \cdot \cos aH \cdot chaH + \right.
\end{aligned} \tag{13}$$

$$+\sin az\cdot\sin aH\cdot shaH)+i(\sin az\cdot\cos aH\cdot chaH+\cos az\cdot\sin aH\cdot shaH)]\,.$$

În cazul curenţilor de derivă, soluţia se scrie, concentrat, sub forma:

$$w=\frac{\tau e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha_1\right)}}{2\sqrt{2}a\mu\left(ch2aH+\cos 2aH\right)}\Big[\left(e^{2aH}+e^{2aHi}\right)e^{(1+i)az}- \tag{14}$$

$$-\left(e^{-2aH}+e^{-2aHi}\right)e^{-(1+i)az}\Big].$$

Pentru determinarea celor două componente ale vitezei, se separă partea reală şi cea imaginară a funcţiei complexe date de formula (13). Cele două componente orizontale ale vitezei sunt:

$$u=\frac{T}{\sqrt{2}a\mu(ch2aH+\cos 2aH)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha_1\right)(\cos a(\zeta+H)\right.$$

$$sha(\zeta-H)+\cos a(\zeta-H)sha(\zeta+H))-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha_1\right)\times$$

$$\times\left.(\sin a(\zeta+H)cha(\zeta-H)+\sin a(\zeta-H)cha(\zeta+H))\right]+ \tag{15a}$$

$$+\frac{\rho g}{2\mu a^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{1}{\cos 2aH+ch2aH}(\sin az\cdot\cos aH\cdot chaH-\sin aH\cdot\cos az\cdot shaH)$$

şi

$$v=\frac{T}{\sqrt{2}a\mu(ch2aH+\cos 2aH)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha_1\right)(\sin a(\zeta-H)\right.$$

$$cha(\zeta+H)+\sin a(\zeta+H)cha(\zeta-H))-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha_1\right)\times \tag{15b}$$

$$\times\left.(\cos a(\zeta-H)sha(\zeta+H)+\cos a(\zeta+H)sha(\zeta-H))\right]-$$

$$-\frac{\rho g}{2\mu a^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{1}{\cos 2aH+ch2aH}(\cos az\cdot\cos aH\cdot chaH-$$

$$-\sin aH\cdot\sin az\cdot shaH)+\frac{\rho g}{2\mu a^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

În această situaţie, mărimea vitezei curentului are expresia:

$$V=g\frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}}{f}\left[F(H)-2\frac{\cos az\cdot\cos aH\cdot chaH+\sin az\cdot\sin aH\cdot shaH}{ch2aH+\cos 2aH}\right]^{1/2} \tag{16}$$

unde

$$F(H)=\frac{\cos^2 aH\cdot ch^2aH+\sin^2 aH\cdot sh^2aH}{(ch2aH+\cos 2aH)^2}+1. \tag{17}$$

Trebuie menţionat faptul că expresia

$$G = -g\frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{f} \tag{18}$$

corespunde curenţilor geostrofici, curenţi datoraţi doar forţelor interne, care determină gradienţii de presiune ai forţei Coriolis.

4 Concluzii

Evident, în cazul curenţilor de derivă, expresiile componentelor orizontale ale vitezei sunt mai simple, date de formulele:

$$\begin{gathered} u = \frac{T}{\sqrt{2}a\mu(ch2aH + \cos 2aH)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right)(\cos a(\zeta + H)\right. \\ sha(\zeta - H) + \cos a(\zeta - H)sha(\zeta + H)) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right)\times \\ \left.\times(\sin a(\zeta + H)cha(\zeta - H) + \sin a(\zeta - H)cha(\zeta + H))\right] \end{gathered} \tag{16a}$$

şi

$$\begin{gathered} v = \frac{T}{\sqrt{2}a\mu(ch2aH + \cos 2aH)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right)(\sin a(\zeta - H)\right. \\ cha(\zeta + H) + \sin a(\zeta + H)cha(\zeta - H)) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right)\times \\ \left.\times(\cos a(\zeta - H)sha(\zeta + H) + \cos a(\zeta + H)cha(\zeta - H))\right] \end{gathered} \tag{16b}$$

Mărimea vitezei curentului, în cazul curenţilor de derivă, are valoarea:

$$V = \frac{\tau}{\sqrt{2}a\mu}\sqrt{\frac{ch2a(z + H) - \cos 2a(z + H)}{ch2aH + \cos 2aH}}. \tag{17}$$

Ceea ce prezintă un deosebit interes, în afară de mărimea vitezei curentului, este unghiul dintre direcţia curentului şi direcţia vântului. Se observă că cele două componente ale vitezei şi, de aici, şi mărimea vitezei şi unghiul dintre cele două direcţii, sunt funcţii, atât de cota la care se măsoară acestea, cât şi de adâncimea bazinului. În cazul curenţilor de derivă, s-a făcut o discuţie a variaţiei acestor funcţii, separat pentru fiecare variabilă în parte în [5] şi [6]. S-au regăsit, astfel, rezultatele obţinute de Ekman, în cazul mării de adâncime infinită. În plus, s-a insistat asupra cazului bazinelor de adâncime finită, dată fiind situaţia care apare în cazul litoralului românesc al Mării Negre, caz în care adâncimea este mică.

Dacă, în cazul mării de adâncime infinită, unghiul dintre direcţia vântului şi cea a curentului cauzat de vânt este de 45^0, în cazul bazinelor de adâncime din ce în ce mai mică, unghiul scade, ajungând, la limită, să se anuleze, adică direcţia curentului să fie foarte apropiată de direcţia vântului.

Pentru curenţii de derivă de la suprafaţa bazinelor, s-a găsit formula:

$$tg(\beta_0 - \alpha_1) = \frac{sh2aH - \sin 2aH}{sh2aH + \sin 2aH} \tag{18}$$

unde β_0 este unghiul dintre direcţia curentului şi direcţia nord.

BIBLIOGRAFIE

1. Gâstescu P., *Limnologie si oceanografie,* Ed. *H*G*A*, Bucureşti, 1998.
2. Lacombe H., *Cours d' océanographie physique*, Gautier-Villars, 1965.
3. Marciuc G.V., Ivanovici G., Kocerghin A., Pavlovici K. V., *Modelele matematice ale circulaţiei oceanice*, Ed. Nauka, 1980 (limba rusă).
4. Stewart R., *Introduction to Physical Oceanography*, Texas A&M University, 2002.
5. Muntean A., Muntean L., *Variaţia modulului vitezei curenţilor Ekman cu adâncime*,. Conferinţa Naţională de Mecanica Solidelor, Piteşti, 2003.
6. Muntean A., Muntean L., *Variaţia unghiului dintre direcţia vântului şi direcţia curentului de suprafaţă, ca funcţie de adâncime,* Conferinţa Naţională de Mecanica Solidelor, Piteşti, 2003.

Department of Mathematics and Informatics
"Mircea cel Batran" Naval Academy
Fulgerului Street, 1, 900218, Constantza, Romania