Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 34 (1993), No. 2, 177-189.

Zur Verwandtschaft der Zwillingspunkte beim Dreieck

K. Leichtweiß zum 65. Geburtstag gewidmet

Hermann Schaal
Mathematisches Institut B, Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57, W-7000 Stuttgart 80

1. Durch die Beiträge von K. Schütte [18], [19] zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon und die darauf von H. Naumann [12] und von H. Stachel [20] vereinfachten Beweise sowie durch den Zusatz von E. Domkowitsch in [20] fand die Geometrie der *Aufsatzdreiecke* [7, S. 1216ff] aktuelles Interesse. Es geht dabei um ein Grunddreieck $A_1A_2A_3$ (Abb. 1), dessen Seiten die Dreiecke $A_2A_3B_1$, $A_3B_1B_2$ und $A_1A_2B_3$ alle nach innen oder alle nach außen *aufgesetzt* sind mit den Innenwinkeln β_i bei B_i ($i = 1, 2, 3$). Für $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$ schneiden sich die Umkreise der drei Aufsatzdreiecke in einem Punkt Z, und ihre Mittelpunkte M_i bilden ein Dreieck mit den Winkeln β_i in M_i (oder fallen im Höhenschnittpunkt A_0 des Grunddreiecks $A_1A_2A_3$ zusammen). Speziell bei außen aufgesetzten regulären Dreiecken wird diese Eigenschaft von $M_1M_2M_3$ als *Satz von Napoleon* bezeichnet [8, S. 39], [12, S. 1].

Abbildung 1

Wegen des Peripheriewinkelsatzes kann man die Aufsatzdreiecke o.B.d.A. untereinander

0138-4821/93 \$ 2.50

gleichsinnig ähnlich wählen und gelangt so zu einer in [7, S. 1218] nach Torricelli benannten Figur. In diesem Fall schneiden sich die Transversalen A_iB_i ebenfalls im genannten Punkt Z. Außerdem ist klar, daß Z gemeinsamer Spiegelpunkt von A_i an M_jM_k ist für $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ und daß die Geraden ZA_j und ZA_k den Winkel β_i bilden.

Dieselben Figuren und weitere Eigenschaften erhielt ich vordem auch in [14] als *Nebenergebnisse ähnlichkeitskinematischer Untersuchungen* (vgl. Fig. 3 in [14, S. 100]) mit Hinweisen auf weitere Autoren. Eine andere Art von Verallgemeinerung habe ich in [15] bearbeitet.

2. Betrachtet man im Anschluß an K. Schütte gleichzeitig den Umkreisschnittpunkt Z für die drei außen und Z' für die drei innen aufgesetzten Dreiecke (mit denselben β_i), so stehen Z und Z' (in [18, S. 265] P und Q) in folgender Beziehung: Gibt man Z (weitgehend) beliebig vor, so liegen die drei Kreise A_jA_kZ (in Abb. 1 durchgezogen) und die jeweils an A_jA_k gespiegelten Kreise (in Abb. 1 punktiert) wie auch deren gemeinsamer Punkt Z' fest. Ebenso liegt Z bei Vorgabe von Z' fest. *Bis auf zu untersuchende Ausnahmen bestimmen die Paare (Z, Z') demnach eine involutorische Selbstabbildung ϕ der Ebene.*

A. Artzt hat Z, Z' als "*Zwillingspunkte*" bezeichnet [1, S. 7], vgl. [6, S. 22], [7, S. 1271]. Aus Z und Z' erscheinen die Seiten des Grunddreiecks $A_1A_2A_3$ unter gleichen Winkeltripeln $(\pi - \beta_i)$ bei entgegengesetzter Orientierung. Aus der Steinerschen Erzeugung einer gleichseitigen Hyperbel h durch entgegengesetzt kongruente Strahlbüschel in Z und Z' folgt, daß h durch die Ecken A_i des Grunddreiecks und damit auch durch dessen Höhenschnittpunkt A_0 geht [13, S. 54] und ZZ' als Durchmesser besitzt und daß die *Mitte von Z und Z' auf dem Feuerbachkreis f des Grunddreiecks liegt* [3, S. 85], [16, S. 126], [17, S. 165].

Die *Verwandtschaft ϕ der Zwillingspunkte* wurde von Van den Berg [3] im Anschluß an eine Gleichgewichtsbetrachtung [2] aufgegriffen und analytisch mit Dreieckskoordinaten untersucht (ein verallgemeinertes Teilergebnis erscheint als Aufgabe in [4, S. 120] mitLösung in [5, S. 118]). Daran hat P.H. Schoute [16], [17] eine synthetische Behandlung mit weiteren Resultaten angeschlossen: Danach ist ϕ eine *Cremona-Transformation 5. Grades*, die sich nach [7, S. 1217] als euklidischer Sonderfall einer Abbildung von H. Müller [11] erweist. Mit der Inversion bzw. Antiinversion σ, welche die Ecken A_i mit den zugehörigen Höhenfußpunkten H_i im Grunddreieck vertauscht, und mit der Winkelgegenpunkteverwandtschaft ω mit diesem Fußpunktdreieck kann ϕ nach [16, S. 130], [17, S. 175] als Abbildungsprodukt $\phi = \sigma\omega\sigma$ mit den zwei Typen quadratischer Involutionen σ, ω erzeugt werden. Die *Verwandtschaften ϕ und ω sind daher konjugiert unter σ, also $\phi = \omega^\sigma$.*

Trotz dieser eingehenden synthetischen und analytischen Untersuchungen bestehen bei näherem Zusehen noch *Lücken*, die im folgenden in eingenständiger Form geschlossen werden: In der analytischen Arbeit [3] wurden die Abbildungsgleichungen für ϕ gar nicht explizit hergeleitet, sondern Z und Z' durch symmetrische quadratische Gleichungssysteme erfaßt, so daß noch ein recht aufwendiger Eliminationsprozeß nötig wäre. Da sich ϕ nach [16, S. 124], [17, S. 163] trotz der einfachen geometrischen Erzeugung als birationale Involution vom überraschend hohen Grad 5 erweist, ist eine *direkte Herleitung der Abbildungsgleichungen von ϕ* von Interesse, schon, um zu sehen, *wie sich die vielfältigen Eigenschaften von ϕ analytisch ausdrücken.*

In der synthetischen Bearbeitung [16], [17] wurde übersehen, daß die an sich bemerkenswerte geometrische Zerlegung $\phi = \sigma\omega\sigma$ im Fall rechtwinkliger Grunddreiecke versagt, weil zwei Höhenfußpunkte in der Ecke des rechten Winkels zusammenfallen und daher zwar ω, aber nicht σ definiert ist. Es scheint wünschenswert, auch diese Lücke zu beseitigen. Dabei zeigt sich, daß die *Zerlegung noch einen willkürlichen Parameter* $k \neq 0$ *verträgt und damit auch im rechtwinkligen Fall in einheitlicher Weise sogar auf unendlich viele Arten möglich ist.*

Die Abbildungsgleichungen in kartesischen Koordinaten ermöglichen auch eine *computergraphische Behandlung von* ϕ mit instruktiven und ästhetischen Figuren, welche die theoretischen Ergebnisse bestätigen.

3. Zur *Herleitung der Abbildungsgleichungen von* ϕ nimmt man zweckmäßig die Grundseite A_1A_2 und die Höhe A_3H_3 als Achsen eines kartesischen Koordinatensystems (Abb. 1), so daß man

$$A_1(a,0),\ A_2(b,0),\ A_3(0,c),\ A_0(0,-d) \text{ mit } d = ab/c \text{ und } (a-b)c \neq 0 \tag{1}$$

ansetzen kann. Genau für

$$ab(c+d) = 0 \tag{2}$$

ist das Grunddreieck $A_1A_2A_3$ rechtwinklig. Der Originalpunkt $Z(u,v)$ liege zunächst auf keiner der Grundseiten, also gilt $g_1g_2v \neq 0$ mit

$$g_1 = bc - cu - bv, \qquad g_2 = ac - cu - av. \tag{3}$$

Die Thaleskreise t_1, t_2 über A_2A_3 bzw. A_3A_1 sind mit

$$t_1 = u(u-b) + v(v-c), \qquad t_2 = u(u-a) + v(v-c) \tag{4}$$

mit $t_1 = 0$ bzw. $t_2 = 0$ bestimmt. Der Umkreis von ZA_2A_3 liegt im Büschel $t_1 + \lambda g_1 = 0$, und mit $\lambda = -t_1/g_1$ folgt sein Mittelpunkt $M_1(m_1, n_1)$ und daraus einfach durch Vertauschung $a \leftrightarrow b$ der Mittelpunkt $M_2(m_2, n_2)$ des Umkreises ZA_1A_3:

$$M_1: \quad m_1 = (bg_1 - ct_1)/2g_1, \quad n_1 = (cg_1 - bt_1)/2g_1, \tag{5a}$$
$$M_2: \quad m_2 = (ag_2 - ct_2)/2g_2, \quad n_2 = (cg_2 - at_2)/2g_2. \tag{5b}$$

Die Mittelpunkte M_1', M_2' der gespiegelten Kreise folgen daraus sehr einfach durch Vorzeichenänderung beim zweiten Glied in der Klammer:

$$M_1': \quad m_1' = (bg_1 + ct_1)/2g_1, \quad n_1' = (cg_1 + bt_1)/2g_1, \tag{6a}$$
$$M_2': \quad m_2' = (ag_2 + ct_2)/2g_2, \quad n_2' = (cg_2 + at_2)/2g_2. \tag{6b}$$

Wegen $g_1g_2v \neq 0$ gilt $M_1' = M_2'$ genau für $u = 0$, $v = -d$, also für $Z = A_0$; in diesem Fall ist der Umkreis k_0 von $A_1A_2A_3$ das gemeinsame Spiegelbild der drei Kreise ZA_jA_k, und Z' wird unbestimmt. Für $Z \neq A_0$ ist Z' sehr einfach linear zu bestimmen aus der Symmetrie zu A_3 bezüglich der Zentralen $M_1'M_2'$ mit der Gleichung

$$x(n_2' - n_1') - y(m_2' - m_1') = m_1'n_2' - m_2'n_1'. \tag{7}$$

Das Lot von A_3 auf $M_1'M_2'$ genügt der Parameterdarstellung

$$x = \lambda(n_2' - n_1'), \qquad y = c - \lambda(m_2' - m_1'), \tag{8}$$

und sein Fußpunkt ist als Schnitt von (7) und (8) mit

$$\lambda = \frac{m_1'(n_2' - c) - m_2'(n_1' - c)}{(m_2' - m_1')^2 + (n_2' - n_1')^2} \tag{9}$$

bestimmt. *Der gesuchte Zwillingspunkt* $Z'(x, y)$ von $Z(u, v)$ ist danach

$$Z' \ldots \qquad x = 2\lambda(n_2' - n_1'), \quad y = c - 2\lambda(m_2' - m_1') \tag{10}$$

mit λ aus (9); man hätte (10) aber auch geometrisch leicht aus der Flächengleichheit $A_3Z' \cdot M_1'M_2' = 2 \cdot \mathrm{Det}(A_3M_1'M_2')$ gewinnen können. Der *eigentliche Aufwand* liegt jetzt in der *Berechnung* und vor allem in der *zweckmäßigen Zerlegung* der durch (3), (4), (6), (9) und (10) bestimmten rationalen Funktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$, die nach dem Gesagten den Grad 5 haben müssen.

Zunächst erscheint λ in (9) nach Kürzen von $2 \cdot g_1g_2$ formal als Quotient von Polynomen 6. Grades, die nach näherer Untersuchung den gemeinsamen quadratischen Faktor

$$q = u^2 + (v - c)^2 \tag{11}$$

und damit das isotrope Geradenpaar in A_3 abspalten. Danach ist λ ein Quotient vom Polynomgrad 4. Bei diesen und den folgenden Umformungen kommen die Umkreise k_1 von $A_iA_jA_k$ für $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ ins Spiel mit

$$\begin{aligned} k_0 &= u^2 - (a + b)u + (v - c)(v - d), && \text{(12a)}\\ k_1 &= u^2 + (a - b)u + (v - c)(v + d), && \text{(12b)}\\ k_2 &= u^2 - (a - b)u + (v - c)(v + d), && \text{(12c)}\\ k_3 &= u^2 - (a + b)u + (v + c)(v + d), && \text{(12d)} \end{aligned}$$

sowie die gleichseitige Hyperbel h_0 durch A_0, A_1, A_2, und A_3 mit

$$h_0 = u^2 - (a + b)u - (v - c)(v + d). \tag{13}$$

Die Durchrechnung wird etwas handlicher mit den Zwischenschritten

$$\begin{aligned} 4g_1g_2[m_2'(n_1' - c) - m_1'(n_2' - c)] &= (a - b)cqk_3, && \text{(14a)}\\ 2g_1g_2(m_2' - m_1') &= -(a - b)c[h_0(v - c) - 2u^2v], && \text{(14b)}\\ 2g_1g_2(n_2' - n_1') &= -(a - b)cu[h_0 + 2v(v - c)] = -(a - b)cuk_0. && \text{(14c)} \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern für den Nenner von λ

$$4g_1^2g_2^2[(m_2' - m_1')^2 + (n_2' - n_1')^2] = (a-b)^2c^2q(h_0^2 + 4u^2v^2) \tag{15}$$

und damit

$$\lambda = \frac{g_1g_2k_3}{(a-b)c(h_0^2 + 4u^2v^2)}. \tag{16}$$

Mit (10) und (14) kann $x(u,v)$ bereits in zerlegter Form angeschrieben werden, während man für $y(u,v)$ noch die Zerlegung vom Grad 5

$$ch_0^2 + 4cu^2v^2 + k_3[h_0(v-c) - 2u^2v)] = -vk_1k_2 \tag{17}$$

benötigt. Nach (8) und (16) sind x und y formal Quotienten von Polynomen 7. und 6. Grades, doch spaltet sich jeweisl g_1g_2 ab. Insgesamt erhält man damit *explizit die gesuchten Abbildungsgleichungen für die Verwandtschaft* ϕ *der Zwillingspunkte* $Z(u,v) \leftrightarrow Z'(x,y)$:

$$\phi \ldots \qquad x = \frac{-uk_0k_3}{h_0^2 + 4u^2v^2}, \qquad y = \frac{-vk_1k_2}{h_0^2 + 4u^2v^2}. \tag{18}$$

Da Zähler und Nenner keine gemeinsamen Teilerpolynome haben, tritt keine weitere Gradreduktion mehr ein, und damit ist tatsächlich *der Zähler vom Grad 5 und der Nenner vom Grad 4.*

4. Die Abbildungsgleichungen (18) sind nach (12), (13) wegen $ab = cd$ offensichtlich *invariant gegen die simultanen Vertauschungen* $x \leftrightarrow y$, $u \leftrightarrow v$, $a \leftrightarrow -d$ und $b \leftrightarrow c$, welche die Vertauschungen $k_0 \leftrightarrow k_1$, $k_2 \leftrightarrow k_3$ und $h_0 \leftrightarrow -h_0$ bewirken.

Dies folgt geometrisch aus der erwähnten Eigenschaft, daß Z und Z' diametral auf einer gleichseitigen Hyperbel h liegen, die dem Grunddreieck $A_1A_2A_3$ umschrieben ist und die somit auch durch dessen Höhenschnittpunkt A_0 geht. Ersetzt man im Grunddreieck $A_1A_2A_3$ eine Ecke A_i durch A_0, so ist A_i der Höhenschnittpunkt im neuen Dreieck, und die Hyperbel h bleibt dieselbe und mit ihr der zu Z diametrale Punkt Z'; das heißt: Z, Z' *sind Zwillingspunkte bezüglich jedem aus* A_0, A_1, A_2, A_3 *gebildeten Grunddreieck.* Die oben genannte Vertauschung bewirkt aber gerade die simultane Vertauschung $A_0 \leftrightarrow A_1$ und $A_2 \leftrightarrow A_3$ und läßt daher (18) invariant. Weitere Vertauschungen, die (18) respektieren, liegen nun auf der Hand.

Die Anwendung dieser Vertauschung auf $x(u,v)$ hätte in (18) sofort $y(u,v)$ geliefert und die Berechnung über (17) erspart. Man könnte (18) auch aus der diametralen Lage von Z' und Z bezüglich der Hyperbel h herleiten, doch ohne ersichtliche Einsparung an Rechnung.

Genau bei rechtwinkligen Grunddreiecken fallen zwei Punkte A_0, A_i zusammen; im anderen Fall liegt in der Bezeichnung von [8, S. 35] ein *Höhenschnittpunktviereck* mit vier nun gleichberechtigten Punkten vor.

5. Die *Diskussion der Abbildung* ϕ an Hand von (18) bestätigt die synthetischen Ergebnisse in [16], [17], wonach die Punkte A_0 bis A_3 und das absolute Punktepaar I_1, I_2 die Fundamentalpunkte 2. Ordnung der Cremonatransformation sind. Diese ergeben sich nach [9, S.

137] als die von (u, v) unabhängigen Schnittpunkte der durch Verschwinden von Zählern und Nenner in (18) bestimmten algebraischen Kurven 5. Ordnung, wobei dem Nenner 4. Ordnung aus Gründen der Homogenität die Ferngerade beizufügen ist.

Der Nenner in (18) zerfällt über $\mathbf{C}$ in zwei irreduzible quadratische Polynome, so daß sein Verschwinden längs dem konjugiert komplexen isotropen Parabelpaar p_1, p_2 mit der Gleichung

$$p_1 p_2 \ldots \qquad (h_0 + 2iuv)(h_0 - 2iuv) = 0 \tag{19}$$

erfolgt, das die Ferngerade in I_1 bzw. I_2 berührt und genau die vier Schnittpunkte A_0 bis A_3 besitzt. Diese sechs Punkte sind daher die Doppelpunkte der von p_1, p_2 und der Ferngeraden gebildeten Quintik.

Der Zähler z_x von $x(u, v)$ in (18) verschwindet längs $u = 0$, $k_0 = 0$ und $k_3 = 0$, der Zähler z_y von $y(u, v)$ längs $v = 0$, $k_1 = 0$ und $k_2 = 0$. Die Schnittpunkte von $z_x = 0$, $z_y = 0$ sind neben $H_3(0, 0)$, der nicht auf p_1 oder p_2 liegt und daher als Fundamentalpunkt ausscheidet, wieder A_0, A_1, A_2, A_3, I_1, I_2, und zwar sind diese je Doppelpunkte von $z_x = 0$ und von $z_y = 0$ und zählen als Schnittpunkte daher vierfach. Weitere Fundamentalpunkte können nicht auftreten, weil von den $5 \cdot 5 = 25$ Schnittpunkten der Quintiken $z_x = 0$ und $z_y = 0$ nach Abzug des freien Punktes Z' (er fällt hier nach H_3) gerade die genannten sechs Fundamentalpunkte mit $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ verbleiben. Damit liegt der in [9, S. 148] unter $n = 5$ in Spalte 3 verzeichnete Fall einer Cremonatransformation 5. Grades vor. Ergänzend ist zu bemerken, daß bei entsprechender Zählung auch der Fall rechtwinkliger Dreiecke, bei dem A_0 in die Rechtwinkelecke A_i fällt, damit erfaßt wird.

6. Der bisher nach 3. ausgeschlossene Fall, daß der Originalpunkt $Z(u, v)$ auf einer Seite des Grunddreiecks liegt, darf nun zugelassen werden, falls Z kein Fundamentalpunkt ist, denn es gibt dann stets zwei Punktepaare A_j, A_k und $A_{j'}$, $A_{k'}$, mit denen Z nicht kollinear ist und daher einen Umkreis bestimmt. Wegen der in 4. nachgewiesenen Vertauschbarkeit gelten die Abbildungsgleichungen (18) auch für diesen Fall. Weiter folgt aus der Vertauschbarkeit der reellen Fundamentalpunkte, daß die Abbildung ϕ auf jeder Seite und Höhe des Grunddreiecks, abgesehen von den Werten der Konstanten a, b, c, d, in gleicher Weise operiert. Wählt man o.B.d.A. $Z(u, 0)$, so folgt $h_0^2 = k_0 k_3 = (u-a)^2(u-b)^2$, so daß sich diese Faktoren bei $x(u, 0)$ in (18) kürzen und $x = -u$, $y = 0$ bleibt. Im Einklang mit dem synthetischen Ergebnis in [16, S. 124f], [17, S. 162f] *sind die Seiten und die Höhen des Grundreiecks also fix, und ϕ operiert auf ihnen jeweils als Spiegelung an dem betreffenden Höhenfußpunkt. Das gilt ebenso für rechtwinklige Dreiecke.*

Die Höhenfußpunkte sind also (sofern sie nicht als Fundamentalpunkte ausscheiden) *Fixpunkte von ϕ*. Weiter folgt aus der homogenen Form von (18), daß *jeder Fernpunkt fix* ist (von den Fundamentalpunkten I_1, I_2 abgesehen). Daß *keine weiteren Fixpunkte existieren*, ist zwar geometrische klar, aber der analytische Nachweis ist keineswegs trivial. Die Fixpunktbedingung $x = u$, $y = v$ in (18) führt mit (19) auf die Schnittbedingung für die beiden zerfallenden Quintiken

$$u(p_1 p_2 + k_0 k_3) = 0, \tag{20}$$

$$v(p_1 p_2 + k_1 k_2) = 0, \tag{21}$$

deren 25 Schnittpunkte zu bestimmen sind. Durch Abspalten von u und v erhält man $H_3(0,0)$ einfach und die Fundamentalpunkte A_0 bis A_3 je doppelt; die übrigen 16 Schnittpunkte stammen von den beiden Restquartiken wie folgt: Sie oskulieren einander in I_1 und I_2, die erste hat A_0 und A_3 als einfache, A_1 und A_2 als Doppelpunkte, für die zweite Quartik ist es umgekehrt, so daß A_0 bis A_3 wieder je als zweifache Schnittpunkte eingehen. Damit sind 14 Punkte fundamental, und es bleiben genau zwei nicht fundamentale für die Höhenfußpunkte H_1 und H_2 übrig.

Bei *rechtwinkligen Grundreiecken* ist zu unterscheiden, ob der rechte Winkel in $A_0 = A_1$ (bzw. $A_0 = A_2$) oder aber in $A_0 = A_3$ liegt. Im ersten Fall gilt $ab = 0$, und A_0 erweist sich als fünffacher Schnittpunkt der beiden Quartiken. Mit der Oskulation in I_1 und in I_2 und den beiden je doppelt zählenden spitzen Ecken sind 15 fundamentale Schnittpunkte nachgewiesen, und es bleibt als einziger nicht fundamentaler Schnitt der Höhenfußpunkt auf der Hypothenuse einfachzählend übrig. Im zweiten Fall gilt $c + d = 0$, und A_0 wird sechsfacher Schnitt der Quartiken, so daß alle ihre 16 Schnitte fundamental sind und der vorbestimmte Fixpunkt $H_3(0,0)$ auf der Hypothenuse A_1A_2 der einzige ist.

7. Die Abbildung ϕ ist in den sechs Fundamentalpunkten A_0 bis A_3 und $A_4 := I_1$, $A_5 := I_2$ nicht definiert und sonst involutorisch mit Ausnahme der vier Umkreise k_0 bis k_3 (12) und der beiden konjugiert komplexen isotropen Parabeln $k_4 := p_1$, $k_5 := p_2$ (19), deren nicht fundamentale Punkte nach (18) jeweils den Fundamentalpunkt A_i mit gleichem Index als gemeinsamen Bildpunkt besitzen und die somit nach der allgemeinen Theorie [9, S. 140ff] die *Fundamentalkurven von ϕ* sind. Mit Blick auf die *Umkehrabbildung* $\phi^{-1} = \phi$ wird man jedem Fundamentalpunkt A_i die Fundamentalkurve k_i als Bild zuweisen.

Die Umkreise k_0 bis k_3 erzeugen eine *disjunkte Zerlegung der euklidischen Ebene in sechs Zweiecke und vier Dreiecke aus Kreisbogen zwischen den Fundamentalpunkten, wobei der äußere Bereich als Dreieck mitzählt (Abb. 2); bei rechtwinkligen Grunddreiecken reduziert sich die Zerlegung auf vier Zweiecke und zwei Dreiecke.*

Da ϕ bis auf diese Kreise involutorisch ist, hat man damit eine *Gebietseinteilung, deren Teile einander unter ϕ entsprechen.* Für $\{i, j, k, \ell\} = \{0, 1, 2, 3\}$ entsprechen die Ecken A_i, A_j und die Seiten k_k, k_ℓ eines Zweiecks den Seiten k_i, k_j bzw. Ecken A_k, A_ℓ des eindeutigen Gegenzweiecks, während kein Dreieck mit den Ecken A_i, A_j, A_k die Seiten k_i, k_j, k_k besitzt, die einander gegenseitig entsprechen.

Die Teilgebiete werden danach unter ϕ so abgebildet, daß jedes Zweieck mit seinem Gegenzweieck vertauscht und jedes Dreieck auf sich abgebildet wird, wobei Originalseiten auf Bildecken zusammengezogen und Originalecken auf Bildseiten "aufgeblasen" werden.

Eine *Verfeinerung der Gebietseinteilung* wird durch die *Fixgeraden und Fixkreise von ϕ* möglich. Nach 6. sind die Seiten und Höhen des Grunddreiecks fix und werden jeweils am betreffenden Höhenfußpunkt gespiegelt. Nach 2. bleiben die Thaleskreise über den Grundseiten A_jA_k fix, und wegen der Invarianz von ϕ gegen die Vertauschung $A_0 \leftrightarrow A_1$, $A_2 \leftrightarrow A_3$ nach 4. sind auch die Thaleskreise über den Höhenabschnitten A_0A_i fix.

Die Fixgeraden und -kreise unterteilen die Kreisbogenzweiecke und -dreiecke in weitere disjunkte Parzellen, die unter ϕ paarweise vertauscht werden. Zum Beispiel werden bei nicht rechtwinkligen Grunddreiecken $A_1A_2A_3$ die vier Kreisbogendreiecke $A_iA_jA_k$ in je zwölf Parzellen unterteilt. Da die Quotienten von k_0k_3 und k_1k_2 mit p_1p_2 sowohl für große, als auch für kleine Beträge von (u, v) gegen 1 streben, wird ϕ nach (18) für weit entfernte

Abbildung 2

Punkte Z und in der Umgebung der Höhenfußpunkte jeweils *durch eine Punktspiegelung approximiert*, so daß gerade "gegenüberliegende" Parzellen aufeinander abgebildet werden (Abb. 2).

Daß diese schon in [17, S. 162–165] genannten Fixgeraden und Fixkreise die *einzigen* sind, ergibt sich so: Enthält die Gerade oder der Kreis keine zwei Fundamentalpunkte, so schneiden sie k_0 bis k_3 in wenigstens einem nicht fundamentalen Punkt, so daß ihre Bildkurve durch alle vier Fundamentalpunkte A_0 bis A_3 gehen müßte. Ein Kreis durch zwei Fundamentalpunkte kann nur dann fix sein, wenn er die Symmetrie der Abbildung auf Fixgeraden respektiert und somit Thaleskreis ist. Analoge Überlegungen gelten bei zusammenfallenden Fundamentalpunkten.

8. Jede Cremonatransformation vom Grad $n > 2$ läßt sich bekanntlich in ein Product von quadratischen Cremonatransformationen zerlegben [9, S. 157f]. Speziell für ϕ besteht nach [17, S. 174ff] die Zerlegung

$$\phi = \sigma\omega\sigma, \tag{22}$$

bei der σ jene Inversion bzw. Antiinversion mit Zentrum A_0 ist, welche die Grundecken A_i $(i = 1, 2, 3)$ mit ihren Höhenfußpunkten H_i vertauscht und ω die Involution der Winkelgegenpunkte im Fußpunktdreieck $H_1H_2H_3$ bedeutet. *Für rechtwinklige Grunddreiecke existiert σ dagegen nicht, und das Fußpunktdreieck $H_1H_2H_3$ ist zudem entartet.*

Um diese Lücke zu schließen, betrachten wir die Inversion σ am Höhen-Schnittpunkt A_0 *nun mit beliebiger* Inversionskonstante $k \neq 0$ (Abb. 3 mit Inversionskreis k). Jedes symmetrische Kreispaar mit Grundpunkten A_0 und A_i (z.B. k_1, k_2 für $i = 3$) wird unter σ mit den durch σA_i gezogenen Parallelen der Kreistangenten in A_0 vertauscht. Die *Höhen im Dreieck $A_1A_2A_3$ sind daher die Winkelhalbierenden des Bilddreiecks $\sigma A_1 \sigma A_2 \sigma A_3$*, und die Symmetrie der Kreise A_0A_iZ und A_0A_iZ' überträgt sich dabei auf die Symmetrie der

Abbildung 3

Geraden $\sigma A_i \sigma Z$ und $\sigma A_i \sigma Z'$ bezüglich $A_0 \sigma A_i$. Für $A_0 \neq A_i$ sind damit die Punkte σZ und $\sigma Z'$ *Winkelgegenpunkte im Dreieck* $\sigma A_1 \sigma A_2 \sigma A_3$ *für beliebige Konstanten* $k \neq 0$.

Im rechtwinkligen Fall z.B. für $A_0 = A_1$ berühren k_2 und k_3 einander in $A_0 = A_1$ und bestimmen ein *parabolisches Büschel*, dem die Kreise $A_0 A_1 Z$ und $A_0 A_1 Z'$ sowie die zur Hypothenuse normale Höhe h_1 angehören. Die Kreise $A_0 A_1 Z$ und $A_0 A_1 Z'$ sind nun zu h_1 symmetrische Büschelkreise durch Z bzw. Z', deren σ-Bild ein zu h_1 symmetrisches Geradenpaar mit dem Fernschnittpunkt σA_1 ist. *Die bei* ω *auftretende Winkelspiegelung mit Fernscheitel* σA_1 *erscheint nun als Spiegelung der Trägergeraden* $\sigma A_1 Z$ *und* $\sigma A_1 Z'$ *an ihrer Mittelparallelen* h_1.

Die Abbildung σ ist analytisch durch

$$\sigma \dots \qquad x = \frac{ku}{u^2 + (v+d)^2}, \qquad y = \frac{k(v+d)}{u^2 + (v+d)^2} - d \tag{23}$$

gegeben. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} &g := (a+b)x + (d-c)(y+d) - k, \qquad e := dx^2 + d(y+d)^2 - k(y+d), \\ &f := 2(c+d)e - kg, \end{aligned} \tag{24}$$

wobei $g = 0$ die Gerade $\sigma A_1 \sigma A_2$, $e = 0$ den Umkreis von A_0, σA_1 und σA_2 (σ-Bild der Seite $A_1 A_2$) und $f = 0$ den Umkreis σk_0 von σA_1, σA_2, σA_3 bedeuten, erhält man für ω nach einiger Rechnung

$$\omega \dots \qquad x' = \frac{kgx}{f}, \qquad y' = \frac{2[k - d(c+d)]e - kgy}{f}. \tag{25}$$

Genau für $k = d(c+d) \neq 0$ tritt der in (17) allein betrachtete Sonderfall $\sigma A_i = H_i$ ein, bei dem $f = 0$ zum *Feuerbachkreis* f *des Grunddreiecks* wird und der im rechtwinkligen Fall nun nach (2) den unzulässigen Wert $k = 0$ liefert, *für den als einzigen die Zerlegung* $\phi = \sigma\omega\sigma$ *nicht möglich ist.*

Die bei der Zerlegung $\phi = \sigma\omega\sigma$ auftretenden Zwischenbilder σZ und $\omega\sigma Z$ liegen mit Z und Z' *auf einem Kreis*, der für $k > 0$ zum Inversionskreis von σ orthogonal ist und der für $k < 0$ dessen reellen Vertreter diametral schneidet; denn die beiden elliptischen Kreisbüschel mit den Grundpunkten Z, σZ bzw. Z', $\sigma Z'$ haben diese Eigenschaft und besitzen genau einen Kreis (oder als Ausartung eine Gerade) gemeinsam, vgl. Abb. 3.

9. Die Abbildung (18) $\phi : Z \leftrightarrow Z'$ bleibt nach 4. dieselbe, *wenn man im Höhenschnittpunktviereck $A_0, \ldots, A_3$ drei andrere Punkte als Grunddreieck wählt*, wobei der vierte Punkt dessen Höhenschnittpunkt wird. Die Zerlegung (22) $\phi = \sigma\omega\sigma$ ist daher *sogar auf vierfache Art* möglich, je nachdem, welcher der vier reellen Fundamentalpunkte als Zentrum für σ gewählt wird, und jeweils ist der Parameter $k \neq 0$ frei wählbar.

Die *Ausartung zum rechtwinkligen Grunddreieck* gemäß 8. geht dabei über in eine *Ausartung, bei der zwei Ecken des Grunddreiecks zu einem Lininelement vereinigt sind und das Nebendreieck dort rechtwinklig ist mit einer zum Linienelement normalen Hypothenuse.* Wählt man mit Rücksicht auf $ab = cd$ etwa $a = b \neq 0$, $cd = a^2 > 0$, so gilt $A_1 = A_2 = H_1 = H_2$, und die Seite A_1A_2 ist als das zur Höhe A_0A_3 normale Linienelement anzusehen, in dem sich die Kreise k_0 und k_3 nun berühren. Weiter gilt $k_1 = k_2$ und $h_1 = h_2$. Die anderen Möglichkeiten $A_1 = A_3$ mit $a = c = 0$, $bd \neq 0$ bzw. $A_2 = A_3$ mit $b = c = 0$, $ad \neq 0$ verhalten sich analog.

In einem *weiteren Ausartungsfall des Höhenschnittpunktvierecks* fallen *genau drei* seiner vier Punkte zusammen und bilden ein Linienelement normal zur Verbindung mit dem vierten Punkt. Dann sind genau drei der Parameter a, b, c, d gleich Null zu setzen. Etwa für $A_0 = A_1 = A_2 \neq A_3$ gilt dann $a = b = d = 0$, $c \neq 0$; aus (12) folgt $k_0 = k_1 = k_2$, und k_3 wird der am Linienelement gespiegelte Kreis, wie es geometrisch nahe liegt.

In allen diesen Ausartungsfällen bleiben der Grad 5 der Cremonatransformation ϕ, die Zerlegung $\phi = \sigma\omega\sigma$ und der Grad 2 von σ und ω bestehen, und von den Winkelspiegelungen bei ω fallen zwei oder alle drei zusammen, bzw. eine oder zwei von ihnen entarten analog zu 8., wobei das Linienelement als Symmetrale der Trägergeraden von Z und Z' fungiert. Die *Gebietseinteilung* und ihre Verfeinerung durch die *Fixgeraden und Fixkreise* von ϕ ergeben sich analog zu 7.

10. Für einen *globalen Überblick* über die Abbildung ϕ betrachten wir die *Bilder gewisser Kreise.* Sei nun k ein Originalkreis, der durch keinen reellen Fundamentalpunkt geht. Da die absoluten Kreispunkte I_1, I_2 unter σ den Kegelschnitten p_1, p_2 entsprechen, spalten sich diese von der Bildkurve des Kreises ab, und es bleibt eine rationale Kurve der Ordnung $2 \cdot 5 - 2 - 2 = 6$ übrig, die als Bild ϕk des Kreises k anzusehen ist. Da p_1 und p_2 jeden Kreis algebraisch gezählt je in drei weiteren Punkten schneiden und diese nach I_1 bzw. I_2 abgebildet werden, ist ϕk somit eine *trizirkulare rationale Sextik.* Die in 6. hergeleitetn Fixgeraden A_iA_j schneiden k und ϕk in Punkten, die zum betreffenden Höhenschnittpunkt symmetrisch sind mit gleichem Realitätsverhalten.

Geht k durch Fundamentalpunkte $A_0, \ldots, A_3$, so trägt jeder zur Abspaltung des betreffenden Kreises $k_0, \ldots, k_3$ von ϕk bei, und die Ordnung der Restbildkurve und die Zahl ihrer Fernpunkte erniedrigen sich je um zwei. Kreise k durch zwei Fundamentalpunkte haben daher als Restbild ϕk *Kreise durch dieselben Fundamentalpunkte* im Einklang mit 2., und das Bild der Kreise k_i durch drei Fundamentalpunkte zerfällt insgesamt in k_j, k_k,

k_ℓ, p_1 und p_2, die genau den Punkt A_i als Bild aller nicht fundamentalen Punkte von k_i gemeinsam haben im Einklang mit 7.

Abbildung 4

Abb. 4 zeigt die Gestaltsänderung der Bilder konzentrischer Kreise $k(\lambda)$ um A_0 für ein reguläres Grunddreieck $A_1A_2A_3$ mit Umkreisradius R. Für wachsende Kreisradien $r(\lambda) = \lambda R$ mit $\lambda = 0,\ 1/4,\ 2/4,\ 3/4,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 5/2$ ergeben sich die Übergänge vom Bild $\phi k(0) = k_0$ über $\phi k(1) = (k_1, k_2, k_3)$ und weiter über das dreispitzige Exemplar $\phi k(2)$ zu Bildkurven, die sich für $\lambda \to \infty$ dem Originalkreis k gemäß (18) annähern. In Abb. 5 sind die Bilder der konzentrischen Kreise zusammengefaßt und die Exemplare $\phi k(0)$ und $\phi k(1)$ punktiert hervorgehoben. Die Abbildungen wurden mit dem Computer nach (18) erstellt.

Literaturverzeichnis

[1] Artzt, A.: *Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind, nebst einer Anwendung auf die Gerade der zwölf harmonischen Punkt-*

Abbildung 5

reihen und ihre beiden Gegenbilder, die Ellipse und den Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme (Kreis Brocard's), 56. Jahresbericht des Gymnasiums Recklinghausen (1885-86), 1–28.

[2] Van den Berg, F.J.: *Oplossing van de 3e prijsvraag voor het jaar 1878.* Nieuw Archief voor Wiskunde 6, 67-97 (1880).

[3] Van den Berg, F.J.: *Over twee met betrekking tot een driehook symmetrische groepen van drie cirkels, en over twee dergelijke groepem van drie rechte lijnen.* Nieuw Archief voor Wiskunde 7, 78–90 (1881).

[4] Van den Berg, F.J.: *Question No. 142.* Mathesis 2, 120 (1882).

[5] Van den Berg, F.J.: *Solution de Question No. 142.* Mathesis 7, 118–119 (1887).

[6] Berkhan, G.: *Zur projektivischen Behandlung der Dreiecksgeometrie.* Archiv der Mathematik und Physik 11, 1–31 (1907).

[7] Berkhan, G.; Meyer, W.Fr.: *Neuere Dreiecksgeometrie.* Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III AB 10, 1173–1276 Leipzig 1914–1931.

[8] Coxeter, H.S.M.: *Unvergängliche Geometrie.* Birkhäuser Verlag, Basel 1963.

[9] Doehlemann, K.: *Geometrische Transformationen* 2. Teil: Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen. Göschen Sammlung Schubert XXVIII Leipzig 1908.

[10] Fladt, K.: *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven.* Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1962.

[11] Müller, H.: *Über eine geometrische Verwandtschaft fünften Grades.* Math. Ann. 2, 281–282 (1870).

[12] Naumann, H.: *Zwei weitere Beweise zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon.* Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1990, 1–3.

[13] Schaal, H.: *Euklidische und pseudoeuklidische Sätze über Kreis und gleichseitige Hyperbel.* Elemente d. Math. 19/1, 53–56 (1964).

[14] Schaal, H.: *Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich-veränderlicher Felder.* Elemente d. Math. 21/5, 97–109 (1966).

[15] Schaal, H.: *Eine Verallgemeinerung der Torricelli-Konfiguration.* Der Mathematikunterricht 13/4, 91–100 (1967).

[16] Schoute, P.H.: *Over een paar met elkaar samenhangende involutorisce birationeele transformaties.* Nieuf Archief voor Wiskunde 9, 117–140 (1883).

[17] Schoute, P.H.: *Deux cas particuliers de la transformation birationnelle.* Bulletin des Sciences Math. et Astron. 2. Ser. 6, 152–168, 174–188 (1882).

[18] Schütte, K.: *Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon.* Math. Semesterber. 24, 256–268 (1987).

[19] Schütte, K.: *Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon.* Elemente d. Math. 44, 133–138 (1989).

[20] Stachel, H.: *Zu K. Schüttes Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon.* Elemente d. Math. 46/1, 25–27 (1991).