Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 34 (1993), No. 2, 41-44.

Drehkegel des zweifach isotropen Raumes mit festem Radius durch ein gegebenes Oskulationselement

Sybille Mick
Institut für Geometrie, Technische Universität Graz
Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz

Zusammenfasung. In [4] und [5] wurden die Scheitelflächen der Drehkegel des zweifach isotropen Raumes $I_3^{(2)}$ durch 4 gegebene Punkte bzw. 2 gegebene Linienelemente des $I_3^{(2)}$ bestimmt. Im euklidischen Raum E_3 wurden verwandte Fragestellungen von E. Müller [6], H. Schaal [12], [13], U. Strobel [14], [15] und H. Pottmann [8] behandelt. Die Bestimmungen der Scheitelflächen von zweiparametrigen Drehkegelmengen des $I_3^{(2)}$ sind Varianten der projektiven Aufgabe, die Scheitelfläche der Kegel 2. Ordnung durch 6 gegebene Punkte zu bestimmen, die von C. Hierholzer [3] und T. Weddle [17] gelöst wurde. In dieser Arbeit wird, verbunden mit einer Deutung im $I_3^{(2)}$, die Scheitelfläche der Kegel 2. Ordnung durch 2 gegebene Oskulationselemente bestimmt.

1. Wir erhalten ein Modell des zweifach isotropen Raumes $I_3^{(2)}$, indem wir dem dreidimensionalen reellen affinen Raum A_3 die Absolutfigur (F, f, ω) hinzufügen, die aus einem Fernpunkt F, einer mit F inzidenten Ferngeraden f und der Fernebene ω des A_3 besteht. Die *zweifach isotrope Bewegungsgeometrie* ist die Invariantentheorie der sechsparametrigen Gruppe G_6 der isotropen Bewegungen, d.h. jener projektiven Automorphismen der Absolutfigur, die alle drei Typen isotroper Abstände invariant läßt [1, p. 120ff]. Ein analytisches Modell des $I_3^{(2)}$ erhalten wir durch Koordinatisierung des A_3; jedem Punkt des $I_3^{(2)}$ sind affine Koordinaten $(x, y, z)^t$ und projektive Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)^t$ zugeordnet, wobei für $x_0 \neq 0$ stets $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z$ gilt. Wie üblich wählen wir das Koordinatensystem so, daß die Absolutfigur durch

$$\omega \ \dots \ x_0 = 0, \quad f \ \dots \ x_0 = x_1 = 0, \quad F = (0:0:0:1)^t \tag{1}$$

festgelegt wird.

H. Brauner definiert in [1, p. 124f.] die Drehkegel des $I_3^{(2)}$ metrisch dual zu den Kreisen des $I_3^{(2)}$. Demnach gibt es 4 Typen von Drehkegeln im $I_3^{(2)}$. Ein *nichtisotroper*

Drehkegel, kurz *Drehkegel*, des $I_3^{(2)}$ ist ein Kegel 2. Ordnung mit nichtisotropem Scheitel, der eine vollisotrope Erzeugende mit vollisotroper Tangentialebene enthält. Die weiteren Typen von Drehkegeln des $I_3^{(2)}$ heißen *Drehzylinder, Punktkugel* und *Punktgrenzkugel*. Ein Drehzylinder hat einen isotropen Scheitel und berührt die Fernebene längs einer isotropen Erzeugenden, eine Punktkugel hat einen vollisotropen Scheitel und berührt die Fernebene längs der absoluten Geraden, und eine Punktgrenzkugel hat ihren Scheitel im absoluten Punkt und berührt die Fernebene ebenfalls längs der absoluten Geraden. In [10] wurden von H. Sachs und V. Ščurić die Flächen 2. Ordnung des $I_3^{(2)}$ systematisch klassifiziert. Die Drehkegel gehören in dieser Klassifikation als Kegel 2. Ordnung mit einem Fernkreis zu Typ *21*, die Drehzylinder, Punktkugeln und Punktgrenzkugeln als parabolische Zylinder zu den Flächentypen *54*, *56* und *57*.

2. Ein regulärer Kegelschnitt der Fernebene ω, der das Linienelement (F, f) enthält, heißt *Fernkreis des* $I_3^{(2)}$. Ein Fernkreis hat definitionsgemäß den *Radius* α [1, p. 124], wenn er durch die Gleichungen

$$x_0 = 2\alpha x_1 x_3 - x_2^2 + \mu x_1^2 + \nu x_1 x_2 = 0,\ \alpha \neq 0\ , \alpha, \mu, \nu \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

festgelegt ist. Alle Fernkreise mit festem Radius α werden durch Gleichungen (2) bestimmt und liegen daher in dem durch α bestimmten Oskulationsbündel. Jeder Kegel 2. Ordnung Δ durch einen Fernkreis des $I_3^{(2)}$ ist ein Drehkegel des $I_3^{(2)}$, und der Radius α dieses Fernkreises heißt auch *Radius von* Δ [1, p. 124].

Der Radius α eines Drehkegels Δ des $I_3^{(2)}$ ist daher durch ein Oskulationselement (F, f, k_u) von Δ bestimmt, wobei (F, f) das absolute Linienelement ist, und k_u ein Fernkreis mit dem Radius α.

Wir geben nun ein weiteres Oskulationselement (P, p, l) vor: Dabei sei P ein nichtisotroper Punkt, p eine nichtisotrope Gerade und l ein nichtisotroper Kreis in einer nichtisotropen Ebene π [9, p. 23]. Durch eine isotrope Koordinatentransformation können wir erreichen, daß P zum Koordinatenursprung O, p zur x-Achse und π zur xy-Ebene des neuen Systems werden. Ist l der nichtisotrope Kreis mit dem Radius $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ durch das Linienelement (P, p) in der Ebene π, so erhalten wir für das Oskulationselement (P, p, l) die Darstellung

$$P = O = (0,0,0)^t\ ,\ p\ \ldots\ y = z = 0\ ,$$

$$l\ \ldots\ z = 2\beta y - x^2 = 0\ ,\ \text{bzw.}\ l\ \ldots\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2\beta}\, t^2 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}\ . \tag{3}$$

Die Projektion von (P, p, l) aus einem Punkt $S = (x, y, z)^t$ mit $xyz \neq 0$ in die Fernebene ω liefert das Oskulationselement (P_u, p_u, l_u) mit

$$P_u = (0 : x : y : z)^t\ ,\ p_u\ \ldots\ x_0 = -x_2 z + x_3 y = 0\ ,$$

$$l_u\ \ldots\ \rho \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t - x \\ \frac{1}{2\beta}\, t^2 - y \\ -z \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}\ . \tag{4}$$

S ist genau dann *Scheitel eines Drehkegels* des $I_3^{(2)}$ mit Öffnungswinkel α durch das Oskulationselement (P, p, l), wenn es einen Fernkreis gibt, der dem Oskulationsbündel (2) angehört, und der das Oskulationselement (P_u, p_u, l_u) enthält.

Wir betrachten zunächst alle Fernkreise m_u durch (F, f) und das feste Linienelement (P_u, p_u). Sie bilden ein Kegelschnittsbüschel 3. Art in ω [2, p. 79], das durch die Gleichungen

$$x_0 = \lambda x_1(-x_2 z + x_3 y) - (-x_1 y + x_2 x)^2 = 0\ ,\ \ \lambda \in \mathbf{R}\ \setminus \{0\}$$

bzw.

$$x_0 = \lambda y x_1 x_3 - x^2 x_2^2 - y^2 x_1^2 - (\lambda z - 2xy)x_1 x_2 = 0 \tag{5}$$

dargestellt werden kann.

Wir bestimmen nun jenen Fernkreis m_u, der im Oskulationsbündel (2) liegt: Mit Hilfe eines Koeffizientenvergleiches lassen sich aus (2) und (5) λ bzw. μ und ν bestimmen. m_u gehört dem Oskulationsbündel (2) genau dann an, wenn $\lambda = 2\alpha x^2/y$ gilt. Damit lautet die Gleichung von m_u

$$m_u\ \ldots\ x_0 = 2\alpha x^2 y x_1 x_3 - x^2 y x_2^2 - y^3 x_1^2 - 2x(\alpha x z - y^2)x_1 x_2 = 0\ . \tag{6}$$

Der Fernkreis m_u besitzt in P_u die Tangente p_u, oskuliert jedoch den Fernkegelschnitt l_u im allgemeinen nicht. Diese Oskulation findet in P_u genau dann statt, wenn m_u und l_u in P_u ($t = 0$ in (4)) 3 zusammengerückte Punkte gemeinsam haben. Wenn wir die Parameterdarstellung (4) von l_u in die Gleichung (6) von m_u einsetzen, erkennen wir, daß dies genau für

$$z = \frac{\beta y^3}{\alpha x^3} \tag{7}$$

der Fall ist. Der anfangs gewählte Punkt $S = (x, y, z)^t$, $xyz \neq 0$, kommt daher genau dann als Scheitel eines isotropen Drehkegels vom Radius α durch das Oskulationselement

(P, p, l) in Betracht, wenn S der durch (7) beschriebenen rationalen Fläche 4. Ordnung angehört. Diese Fläche bezeichen wir als *Scheitelfläche* Φ. Diese Fläche, die in [7, p. 285f.] ausführlich diskutiert wird, ist, wie K. Strubecker in [16, p. 438] zeigt, Wendelfläche des elliptischen Raumes. Damit gilt

Satz 1. *Die Scheitelfläche Φ der Drehkegel des zweifach isotropen Raumes, die durch ein gegebenes Oskulationselement (P, p, l) gehen und gleichen Radius α haben, ist eine Wendelfläche des elliptischen Raumes.*

Literaturverzeichnis

[1] Brauner, H.: *Geometrie des zweifach isotropen Raumes* I, II, III. J. reine u. angew. Math. **224** (1966), 118 -146; **226** (1967), 132 - 158; **228** (1967), 38 - 70.

[2] Brauner, H.: *Geometrie projektiver Räume* I. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1976.

[3] Hierholzer, C.: *Über eine Fläche der vierten Ordnung.* Math. Ann. **4** (1871), 172 - 180.

[4] Mick, S.: *Drehkegel des zweifach isotropen Raumes durch vier gegebene Punkte.* Stud. Sci. Math. Hung. (im Druck).

[5] Mick, S.: *Drehkegel des zweifach isotropen Raumes durch zwei Linienelemente.* Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., **200** (1991), 111 - 118.

[6] Müller, E.: *Durch vier Punkte einen Drehkegel von gegebener Achsenrichtung zu legen.* Arch. d. Math. u. Phys., III. Reihe, **22**. Bd., Heft 2/3 (1914), 225 - 226.

[7] Müller, E. u. Krames, J.: *Vorlesungen über Darstellende Geometrie,* III. Bd., Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Leipzig, Wien 1931.

[8] Pottmann, H.: *Über Scheitel von Normalrissen einer Raumkurve.* Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., **196** (1987), 39 - 48.

[9] Sachs, H.: *Ebene isotrope Geometrie.* Vieweg, Wiesbaden 1987.

[10] Sachs, H., Ščurić, V.: *Zur Theorie der Flächen 2. Ordnung im Flaggenraum.* RAD HAZU **10** (1991), 197 - 216.

[11] Salmon, G., Fiedler, W.: *Analytische Geometrie des Raumes,* 2. Teil. 3. Aufl., Teubner, Leipzig 1880.

[12] Schaal, H.: *Ein geometrisches Problem der metrischen Getriebesynthese.* Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., **194** (1985), 39 - 53.

[13] Schaal, H.: *Konstruktion der Drehzylinder durch vier Punkte einer Ebene.* Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., **195** (1986), 405 - 418.

[14] Strobel, U.: *Die Drehkegel durch vier Punkte.* Diss., Stuttgart 1990.

[15] Strobel, U.: *Über die Drehkegel durch vier Punkte.* Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., **198** (1989), 281 - 293.

[16] Strubecker, K.: *Über die Schraubungen des elliptischen Raumes.* Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., **139** (1930), 421 - 450.

[17] Weddle, T.: Cambr. Dubl. Math. J. **5** (1850).