Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 35 (1994), No. 2, 239-257.

Nichtisotrope Kreisschiebzykliden des Flaggenraumes I

G. S. Karáné
Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, Technische Universität Budapest
Műegyetem rkp. 3, H – 1111 Budapest

Abstract. A flag space is a three-dimensional affine space with an absolute $\{\omega, f, F\}$, where f is a line in the plane of infinity ω and F a point on f (H. Brauner [1]-[3]). A cyclide is a surface of order 4 which intersects ω only at f. In this paper we investigate all cyclides generated by translation of a circle in a not isotropic plane. We give normal forms and CAD pictures of these surfaces.

1. Aus der Geometrie des Flaggenraumes $\mathbf{I}_3^{(2)}$, Zykliden

Die Geometrie des Flaggenraumes (zweifach isotropen Raumes) wurde erstmals systematisch von H. Brauner (vgl. [1]-[3]) studiert und von H. Sachs in zahlreichen Arbeiten weiterentwickelt (vgl. z.B. [6], [9]-[11]). Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ den dreidimensionalen reellen projektiven Raum und beschreiben seine Punkte mittels projektiver Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \neq (0:0:0:0)$.

In $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ wirkt die 15-parametrige Gruppe der Projektivitäten

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} \rho\bar{x}_0 &= \alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2 + \alpha_{03}x_3 \\ \rho\bar{x}_1 &= \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ \rho\bar{x}_2 &= \alpha_{20}x_0 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \\ \rho\bar{x}_3 &= \alpha_{30}x_0 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3, \end{aligned}$$

wobei $\rho \neq 0$ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet und $\det(\alpha_{ik}) \neq 0$ gilt. Die Fernebene ω von $\mathbf{P}_3$ beschreiben wir durch $x_0 = 0$ und bezeichnen mit $\mathbf{A}_3 := \mathbf{P}_3 - \omega$ den zugeordneten affinen Raum. Punkte in $\mathbf{A}_3$ werden durch affine Koordinaten (x, y, z) festgelegt, wobei bekanntlich gilt

$$(1.2)\qquad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}, \quad x_0 \neq 0.$$

Man gelangt zur Geometrie des zweifach isotropen Raumes (Flaggenraumes), indem man in $\omega \subset \mathbf{P}_3$ eine *Absolutfigur* $\{\omega, f, F\}$ auszeichnet, die aus einer Geraden $f \subset \omega$ und einem

0138-4821/93 $ 2.50

Punkt $F \in f$ besteht. Die Gerade f heißt *absolute Gerade*, der Punkt F heißt *absoluter Punkt*. Alle projektiven Automorphien von $\{\omega, f, F\}$ bilden eine Gruppe, genannt *zweifach isotrope Ähnlichkeitsgruppe*.

Wird f durch $x_0 = x_1 = 0$ beschrieben und F durch $F(0 : 0 : 0 : 1)$ festgelegt, dann läßt sich nach ([1], S. 119) diese zweifach isotrope Ähnlichkeitsgruppe $\mathcal{H}_9$ durch

$$\begin{aligned} \bar{x} &= c_1 + c_2 x \\ \bar{y} &= c_3 + c_4 x + c_5 y \\ \bar{z} &= c_6 + c_7 x + c_8 y + c_9 z \end{aligned} \tag{1.3}$$

erfassen. Sie hängt von 9 freien Parametern ab. Wir bezeichnen — wie üblich — die xy-Ebene als *Grundrißebene*. In dieser Ebene ($z = 0$) induziert (1.3) die Gruppe

$$\begin{aligned} \bar{x} &= c_1 + c_2 x \\ \bar{y} &= c_3 + c_4 x + c_5 y, \end{aligned} \tag{1.4}$$

d.h. die *allgemeine ebene isotrope Ähnlichkeitsgruppe* $\mathcal{G}_5$. Die dazugehörige *ebene isotrope Geometrie* wurde ausführlich in der Monographie [7] von H. Sachs betrachtet. Um Geometrie zu betreiben, ist die Gruppe (1.3) noch zu allgemein. Sie enthält jedoch als Untergruppe die sechsparametrige Gruppe $\mathcal{B}_6^{(2)}$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= d_1 + x \\ \bar{y} &= d_2 + d_3 x + y \\ \bar{z} &= d_4 + d_5 x + d_6 y + z, \end{aligned} \tag{1.5}$$

die man *Gruppe der zweifach isotropen Bewegungen* (vgl. [1], S. 119) nennt. Ein affiner Raum $\mathbf{A}_3$, in dem die Gruppe $\mathcal{B}_6^{(2)}$ als Fundamentalgruppe wirkt, heißt *Flaggenraum* $I_3^{(2)}$ (zweifach isotroper Raum). Die zugehörige Geometrie heißt *zweifach isotrope Geometrie* (Geometrie des Flaggenraumes). Die Absolutfigur $\{\omega, f, F\}$ ist das Analogon zum *absoluten Kegelschnitt*

$$i_E: \quad x_0 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{1.6}$$

der euklidischen Geometrie.

Hinsichtlich der Punkte, Geraden und Ebenen sind die folgenden Begriffsbildungen von zentraler Bedeutung: Eine Ebene ε des $I_3^{(2)}$ heißt *nichtisotrop*, wenn sie F nicht enthält. Eine Ebene ε heißt *isotrop*, wenn $F \in \varepsilon$ gilt, aber $f \not\subset \varepsilon$. Eine Ebene ε heißt *vollisotrop*, wenn $f \subset \varepsilon$ gilt.

Nimmt man zu den drei Typen von Ebenen des $I_3^{(2)}$ noch die Fernebene hinzu, so hat man demnach in $I_3^{(2)}$ vier Typen von Ebenen vorliegen. Bezeichnet man die Kreise des $I_3^{(2)}$ wie die entsprechenden Trägerebenen, dann hat man in $I_3^{(2)}$ vier Arten von Kreisen zu unterscheiden:

Ein *nichtisotroper Kreis* k ist ein Kegelschnitt in einer nichtisotropen Ebene ε, der die Fernebene in einem Punkt der absoluten Geraden f berührt. Ein *isotroper Kreis* k ist ein Kegelschnitt in einer isotropen Ebene ε, der die Fernebene im absoluten Punkt berührt. Ein *vollisotroper Kreis* k ist ein Kegelschnitt in einer vollisotropen Ebene ε, der die absolute Gerade f im absoluten Punkt F berührt. Ein *Fernkreis* k ist ein Kegelschnitt in ω, der die absolute Gerade f in F berührt.

Unter einer *Zyklide* des dreidimensionalen euklidischen Raumes $\mathbf{E}_3$ versteht man bekanntlich eine algebraische Fläche 4. Ornung, welche den absoluten Kegelschnitt i_E als Doppelkurve enthält (vgl. [4], S. 286f). Diese Definition läßt sich nach H. Sachs (vgl. [6]) unschwer auf den Flaggenraum $I_3^{(2)}$ übertragen: Unter einer *verallgemeinerten Zyklide des Flaggenraumes* $I_3^{(2)}$ versteht man eine irreduzible algebraische Fläche 4. Ordnung $\Phi^{(4)}$, welche die Fernebene ω nur in der absoluten Geraden f schneidet. Unter einer *gewöhnlichen Zyklide* des $I_3^{(2)}$ versteht man eine Zyklide mit der Eigenschaft, daß für alle vollisotropen ebenen Schnitte die Gerade f eine Doppelgerade der Fläche ist.

Für die folgenden Überlegungen ist der in [6] eingeführte Begriff der Hauptachsenfläche wichtig: Ist $\Phi^{(4)}$ eine verallgemeinerte Zyklide, so schneidet jede vollisotrope Ebene ε die Fläche $\Phi^{(4)}$ außer in f in einer Kurve 3. Ordnung $k^{(3)}$. Bestimmt man bezüglich $k^{(3)}$ den Polarkegelschnitt $k^{(2)}$ des Punktes F, so bilden alle diese Kegelschnitte $k^{(2)}$ — wenn ε das Ebenenbüschel um f durchläuft — eine Fläche Σ^*, genannt *Hauptachsenfläche* der Zyklide. Ist $\Phi^{(4)}$ eine gewöhnliche Zyklide, dann schneidet jede vollisotrope Ebene ε die Fläche $\Phi^{(4)}$ in der Doppelgeraden f und einem Kegelschnitt $c^{(2)}$. Bestimmt man bezüglich $c^{(2)}$ die Polare p des Punktes F, so bilden alle diese Polaren p — wenn ε das Ebenenbüschel um f durchläuft — eine Fläche Σ^*, genannt Hauptachsenfläche der Zyklide. Σ^* ist stets eine Fläche 2. Ordnung und isotrop invariant mit $\Phi^{(4)}$ verknüpft. Sie kann zur Klassifikation der Zykliden $\Phi^{(4)}$ herangezogen werden. Wie V. Ščurić und H. Sachs in [11] gezeigt haben, existieren im projektiv erweiterten Flaggenraum genau 70 Flächen 2. Ordnung und demnach gibt es in $I_3^{(2)}$ genau 70 *Haupttypen von Zykliden.*

Für spätere Zwecke sei noch vermerkt, daß sich die Zykliden des $I_3^{(2)}$ in der Gestalt

$$\begin{aligned} F \equiv\; & a_{400}x^4 + a_{300}x^3 + a_{030}y^3 + a_{003}z^3 \\ & + a_{210}x^2y + a_{102}xz^2 + a_{021}y^2z + a_{201}x^2z + a_{120}xy^2 + a_{012}yz^2 + a_{111}xyz \\ & + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{110}xy + a_{011}yz + a_{101}xz \\ & + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{000} = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

darstellen lassen.

2. Kreisschiebzykliden in $I_3^{(2)}$ vom Typ C

Alle Zykliden des $I_3^{(2)}$, die sich durch Schiebung eines vollisotropen Kreises erzeugen lassen, wurden als *Kreisschiebzykliden vom Typ A* bezeichnet und in [16] ausführlich untersucht. Die *Kreisschiebzykliden vom Typ B* des $I_3^{(2)}$ — das sind jene Zykliden, die sich durch Schiebung eines isotropen Kreises erzeugen lassen — wurden erstmals in [9] studiert.

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Bestimmung aller *Kreisschiebzykliden vom Typ C*, d.h. aller Zykliden 4. Ordnung des $I_3^{(2)}$, die sich durch Schiebung eines *nichtisotropen Kreises k* erzeugen lassen. Nach Anwendung einer isotropen Bewegung (1.5) kann man erreichen, daß die Trägerebenen der Kreisschar $\{k\}$ parallel zur xy-Ebene des zugrundegelegten Koordinatensystems sind. Man kann dann die erzeugende Kreisschar in der Gestalt

$$\{z = t, \quad y = Rx^2 + \alpha(t)x + \beta(t)\} \tag{2.1}$$

ansetzen, wobei t den Scharparameter bezeichnet. Da wir uns nur für irreduzible Flächen 4. Ordnung interessieren, müssen in jeder nichtisotropen Ebene ε zwei Kreise (2.1) vom gleichen Radius R liegen.

Für jedes t muß somit eine Produktzerlegung

$$\begin{aligned}[y - Rx^2 - \alpha_1 x - \beta_1][y - Rx^2 - \alpha_2 x - \beta_2] = R^2x^4 + R(\alpha_1+\alpha_2)x^3 - 2Rx^2y \\ + (R\beta_1 + R\beta_2 + \alpha_1\alpha_2)x^2 + y^2 - (\alpha_1+\alpha_2)xy \\ + (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)x - (\beta_1+\beta_2)y + \beta_1\beta_2 = 0\end{aligned} \tag{2.2}$$

gelten. Andererseits erhält man als Gleichung einer allgemeinen Zyklide 4. Ordnung aus (1.7) mit $z = t$

$$\begin{aligned}F \equiv\ & a_{400}x^4 + a_{300}x^3 + a_{030}y^3 + a_{003}t^3 \\ & + a_{210}x^2y + a_{102}xt^2 + a_{021}y^2t + a_{201}x^2t + a_{120}xy^2 + a_{012}yt^2 + a_{111}xyt \\ & + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}t^2 + a_{110}xy + a_{011}yt + a_{101}xt \\ & + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}t + a_{000} = 0\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sollen die beiden Kreise (2.2) für jede Ebene ε auf der Zyklide (2.3) liegen, so muß für jedes t die Gleichung (2.2) mit (2.3) übereinstimmen. Führt man einen Koeffizientenvergleich von (2.2) und (2.3) nach den Potenzen in x und y aus, so erhält man die folgenden 11 Bedingungen

$$\begin{aligned}R^2 &= a_{400}, \\ R(\alpha_1+\alpha_2) &= a_{300}, \\ a_{030} &= 0, \\ 2R &= -a_{210}, \\ R(\beta_1+\beta_2) + \alpha_1\alpha_2 &= a_{201}t + a_{200}, \\ 1 &= a_{021}t + a_{020}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= -a_{111}t - a_{110}, \\ \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 &= a_{102}t^2 + a_{101}t + a_{100}, \\ \beta_1 + \beta_2 &= -a_{012}t^2 - a_{011}t - a_{010}, \\ \beta_1\beta_2 &= a_{003}t^3 + a_{002}t^2 + a_{001}t + a_{000}, \\ a_{120} &= 0.\end{aligned} \tag{2.4a – k}$$

Diese Gleichungen müssen für alle t erfüllt sein. Damit folgt aus (2.4f) sofort $a_{021} = 0$, $a_{020} = 1$. Aus (2.4b) und (2.4g) ergibt sich $\frac{a_{300}}{R} = -a_{111}t - a_{110}$, d.h. $a_{111}t + a_{110} + \frac{a_{300}}{R} = 0$, woraus man $a_{111} = 0$ und $Ra_{110} + a_{300} = 0$ gewinnt. Wir vermerken

$$\begin{gathered} a_{030} = 0, \quad a_{120} = 0, \quad a_{021} = 0, \quad a_{020} = 1, \quad a_{111} = 0, \\ Ra_{110} + a_{300} = 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Aus (2.4e, i) ergibt sich weiter

$$\alpha_1\alpha_2 = a_{201}t + a_{200} - R(\beta_1 + \beta_2) = a_{201}t + a_{200} + R[a_{012}t^2 + a_{011}t + a_{010}],$$

also

$$\alpha_1\alpha_2 = Ra_{012}t^2 + (Ra_{011} + a_{201})t + a_{200} + Ra_{010}. \tag{2.6}$$

Setzt man vorübergehend $a := Ra_{012}$, $b := Ra_{011} + a_{201}$, $c := a_{200} + Ra_{010}$, so berechnet man aus (2.4b):
$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{R^2}a_{300}^2 - 4at^2 - 4bt - 4c$, d.h.

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm 2\sqrt{Bt^2 + Ct + D}, \tag{2.7}$$

wobei $B := -a$, $C := -b$ und $4D := \frac{1}{R^2}a_{300}^2 - 4c$ gesetzt wurde. Setzt man noch $\frac{a_{300}}{R} =: 2A$, so erhält man aus (2.7) und (2.4b)

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= A \pm \sqrt{Bt^2 + Ct + D}, \\ \alpha_2(t) &= A \mp \sqrt{Bt^2 + Ct + D}\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Hiermit liegt die Bauart des Koeffizienten $\alpha(t)$ fest, wobei die Konstanten A, B, C und D zunächst nicht weiter interessieren.
Jeder Kreis (2.1) schneidet die yz-Ebene $x = 0$ in einem Punkt $P(0, \beta, t)$, und dieser muß auf der Schnittkurve von (2.3) mit $x = 0$ liegen, d.h. es muß gelten

$$a_{030}\beta^3 + a_{003}t^3 + a_{021}\beta^2 t + a_{012}\beta t^2 + a_{020}\beta^2 + a_{002}t^2 + a_{011}\beta t + a_{010}\beta + a_{001}t + a_{000} = 0. \tag{2.9}$$

Mittels (2.5) und $t = z$ kann diese Gleichung vereinfacht werden zu

$$\beta^2 + \beta(a_{012}z^2 + a_{011}z + a_{010}) + a_{003}z^3 + a_{002}z^2 + a_{001}z + a_{000} = 0. \tag{2.10}$$

Setzt man in (2.10) $\beta = y - Rx^2 - \alpha(t)x$ ein, wobei $\alpha(t) = \alpha(z)$ aus (2.8) zu entnehmen ist, so entsteht die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ einer Fläche, die mit (1.7) übereinstimmen muß . Hieraus werden weitere Bedingungen abgeleitet. Nach längerer Rechnung erhält man für F die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2(Bz^2 + Cz + D)&(a_{012}z^2 + a_{011}z + a_{010} + 2y - 2Rx^2 - 2Ax)^2 \\ &- [x^2(Bz^2 + Cz + D) + (y - Rx^2 - Ax)^2 \\ &+ (y - Rx^2 - Ax)(a_{012}z^2 + a_{011}z + a_{010}) \\ &+ a_{003}z^3 + a_{002}z^2 + a_{001}z + a_{000}]^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Die Gleichung (2.11) enthält das Glied $Ba_{012}^2 x^2 z^6$, das in der Zyklidengleichung (1.7) nicht vorkommen darf. Somit folgt $Ba_{012}^2 = 0$. Da nach obigem $B = -Ra_{012}$ gilt, ergibt sich somit zwingend $B = 0$. Wird $B = 0$ in (2.11) eingesetzt, so enthält diese Gleichung das Glied $(4R^2C + 2Ra_{012}a_{003})x^2z^5$, das in der Zyklidengleichung (1.7) nicht vorkommen kann. Wegen $Ra_{012} = -B = 0$ folgt somit $C = 0$, und $\alpha(t)$ in (2.8) ist notwendig eine Konstante. Nun gilt aber nach (2.1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(P) = \alpha$, d.h. α gibt den Richtungswinkel der Tangente in P an den erzeugenden Kreis gegen die x-Achse des Koordinatensystems an. Durch eine isotrope Bewegung (1.5) kann man wegen der Konstanz von α erreichen, daß

$$\alpha(t) \equiv 0 \quad \text{für alle } t \tag{2.12}$$

gilt. Damit vereinfacht sich (2.1) zu

$$\{z = t, \quad y = Rx^2 + \beta(t)\}. \tag{2.13}$$

Wird $\beta = y - Rx^2$ in (2.10) eingesetzt, so erhält man für die in Frage kommenden Lösungsflächen zwingend

$$(y - Rx^2)^2 + (y - Rx^2)(a_{012}z^2 + a_{011}z + a_{010}) + a_{003}z^3 + a_{002}z^2 + a_{001}z + a_{000} = 0,$$

woraus man erkennt, daß noch $a_{012} = 0$ gelten muß. Damit haben wir den

Satz 2.1: *Die einzigen Kreisschiebzykliden des $I_3^{(2)}$ vom Typ C besitzen die Darstellung*

$$(y - Rx^2)^2 + (y - Rx^2)(a_{011}z + a_{010}) + a_{003}z^3 + a_{002}z^2 + a_{001}z + a_{000} = 0. \tag{2.14}$$

In der Tat sieht man sofort, daß jede Ebene $z = t = const$ die Flächen (2.14) in 2 nichtisotropen Kreisen schneidet. Mit $y - Rx^2 = T$ hat man nämlich die quadratische Gleichung

$$T^2 + (a_{011}t + a_{010})T + a_{003}t^3 + a_{002}t^2 + a_{001}t + a_{000} = 0 \tag{2.15}$$

zu lösen und findet hiermit

$$\begin{aligned} y = {} & Rx^2 - \frac{1}{2}(a_{011}t + a_{010}) \\ & \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_{011}t + a_{010})^2 - a_{003}t^3 - a_{002}t^2 - a_{001}t - a_{000}}\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Diese beiden Schnittkreise sind kongruent, wie es sein muß, und besitzen die vollisotrope yz-Ebene als Symmetrieebene. Mit $t = z$ ist (2.16) gleichzeitig eine explizite Darstellung aller Lösungsflächen, was für Computer-Darstellungen der entsprechenden Schiebzykliden wichtig ist. Setzt man in (2.16) $x = u$, so erhält man für die Flächen (2.16) die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u,t) = \begin{pmatrix} u \\ Ru^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(a_{011}t + a_{010}) \pm \sqrt{g(t)} \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \tag{2.16a}$$

$$g(t) = \sqrt{\frac{1}{4}(a_{011}t + a_{010})^2 - a_{003}t^3 - a_{002}t^2 - a_{001}t - a_{000}}.$$

Die Darstellung (2.16a) zeigt, daß in der Tat eine Schiebfläche vorliegt, wobei die in der Ebene $x = 0$ gelegene Schnittkurve l von (2.16a) die Leitkurve für diese Erzeugung ist (vgl. [12], S. 244f; [13], S. 55f). Berechnet man an Hand von (2.14) die Hauptachsenfläche Σ^*, so gewinnt man

$$3a_{003}z^2 + 2a_{002}z + a_{001} + a_{011}(y - Rx^2) = 0. \tag{2.17}$$

Man erkennt, daß gemäß dem Typ von Σ^* verschiedene Unterklassen auftreten:
Falls $a_{003} = a_{002} = a_{011} = 0$, $a_{001} \neq 0$ gilt, dann ist Σ^* die Fernebene ω. Die entsprechenden Zykliden bezeichnen wir als *Typ C I*.
Gilt $a_{003} = a_{011} = 0$, $a_{002} \neq 0$, dann ist Σ^* eine nichtisotrope Ebene. Die entsprechenden Zykliden bezeichnen wir als *Typ C II*.
Gilt $a_{011} = 0$, $a_{003} \neq 0$ und $a_{002}^2 - 3a_{001}a_{003} \neq 0$, dann besteht Σ^* über $\mathbf{C}$ aus zwei parallelen, nichtisotropen Ebenen. Die entsprechenden Zykliden bezeichnen wir als *Typ C III*.
Gilt $a_{003} = 0$, $a_{002} = 0$, $a_{011} \neq 0$, dann ist Σ^* eine Punktgrenzkugel. Die entsprechenden Zykliden bezeichnen wir als *Typ C IV*.
Gilt $a_{003} = 0$, $a_{002} \neq 0$, $a_{011} \neq 0$, dann ist Σ^* eine Punktkugel. Die entsprechenden Zykliden bezeichnen wir als *Typ C V*.

Der allgemeinste Fall liegt vor, wenn in (2.17) alle Koeffizienten von Null verschieden sind. In diesem Fall wenden wir auf (2.17) – nachdem durch $a_{011} \neq 0$ dividiert wurde, aber die alte Bezeichnung beibehalten wurde – die Schiebung $\{x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z} + \delta\}$ an. Man erhält $3a_{003}(\bar{z}^2 + 2\delta\bar{z} + \delta^2) + 2a_{002}(\bar{z} + \delta) + a_{001} + (\bar{y} - R\bar{x}^2) = 0$. Das Glied mit $\bar{z}$ kann zu Null gemacht werden, wenn $6a_{003}\delta + 2a_{002} = 0$ gilt, was für $\delta = -\frac{a_{002}}{a_{003}}$ erfüllt ist. Damit besitzt Σ^* die Gleichung $3a_{003}\bar{z}^2 + (\bar{y} - R\bar{x}^2) + b_{000} = 0$, wobei b_{000} das neue Absolutglied bezeichnet. Mit der Schiebung $\{x = \bar{x}, \quad y = \bar{y} + b_{000}, \quad z = \bar{z}\}$ kann man schließlich Σ^* auf die Normalform

$$y = Rx^2 - 3a_{003}z^2 \tag{2.18}$$

transformieren. Wegen $a_{003} \neq 0$ stellt (2.18) für $R > 0$, $a_{003} < 0$ ein elliptisches Paraboloid dar, während für $R > 0$, $a_{003} > 0$ ein hyperbolisches Paraboloid vorliegt. Die zugehörigen Zykliden bezeichnen wir für $a_{003} < 0$ als *Typ C VI*, im Fall $a_{003} > 0$ als *Typ C VII*.
Wir vermerken den

Satz 2.2: *Die Kreisschiebzykliden vom Typ C des* $I_3^{(2)}$ *gestatten eine explizite Darstellung in der Form (2.16). Sie umfassen 7 Unterklassen gemäß der Hauptachsenfläche, nämlich: Klasse C I (* Σ^* *ist die Fernebene), Klasse C II (* Σ^* *ist eine nichtisotrope Ebene), Klasse C III (* Σ^* *besteht aus 2 parallelen nichtisotropen Ebenen über* **C***), Klasse C IV (* Σ^* *ist eine Punktgrenzkugel), Klasse C V (* Σ^* *ist eine Punktkugel), Klasse C VI (* Σ^* *ist ein elliptisches Paraboloid) und Klasse C VII (* Σ^* *ist ein hyperbolisches Paraboloid). Die Leitkurve l für diese Erzeugung von (2.16) als Schiebfläche ist die in* $x = 0$ *gelegene Schnittkurve der Zyklide.*

In den folgenden Abschnitten dieser Abhandlung beschäftigen wir uns mit den Kreisschiebzykliden vom Typ *C I*, *C II* und *C III*, während die Untersuchung der restlichen Typen einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben soll.

3. Kreisschiebzykliden in $I_3^{(2)}$ vom Typ *C I*

Für $a_{003} = a_{002} = a_{011} = 0, \quad a_{001} \neq 0$ lautet (2.14)

$$(y - Rx^2)^2 + (y - Rx^2)a_{010} + a_{001}z + a_{000} = 0.$$

Wir wenden auf diese Gleichung die Schiebung $\{x = \bar{x}, \quad y = \bar{y} - \frac{1}{2}a_{010}, \quad z = \bar{z}\}$ an. Dann erhält man

$$(\bar{y} - R\bar{x}^2 - \frac{1}{2}a_{010})^2 + (\bar{y} - R\bar{x}^2 - \frac{1}{2}a_{010})a_{010} + a_{001}\bar{z} + a_{000} = 0,$$

woraus folgt

$$(\bar{y} - R\bar{x}^2)^2 + \frac{1}{4}a_{010}^2 - a_{010}(\bar{y} - R\bar{x}^2) + (\bar{y} - R\bar{x}^2)a_{010} - \frac{1}{2}a_{010}^2 + a_{001}\bar{z} + a_{000} = 0.$$

Man gewinnt

$$(\bar{y} - R\bar{x}^2)^2 + a_{001}\bar{z} - \frac{1}{4}a_{010}^2 + a_{000} = 0.$$

Wendet man auf diese Gleichung die Schiebung $\{\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z + \frac{1}{4}\frac{a_{010}^2}{a_{001}} - \frac{a_{000}}{a_{001}}\}$ an, so erhält man als Normalform dieser Zyklide

$$(y - Rx^2)^2 + a_{001}z = 0. \tag{3.1}$$

Wir bezeichnen diese Schiebzyklide mit *C I*. Die in $x = 0$ gelegene Leitkurve l von (3.1) ist der parabolische Kreis (vgl. [7], S. 23)

$$z = -\frac{1}{a_{001}}y^2 \tag{3.2}$$

vom Radius $-\frac{1}{a_{001}}$. Damit ist der einzige außer R in (3.1) verbleibende Koeffizient geometrisch gedeutet. Die Fläche entsteht durch Schiebung von k längs (3.2) (vgl. Abb.1).

Abbildung 1

Wir vermerken den

Satz 3.1: *Im Flaggenraum* $I_3^{(2)}$ *existiert eine einzige Kreisschiebzyklide vom Typ C I, nämlich die Fläche (3.1). Sie entsteht durch Schiebung des nichtisotropen Kreises* $\{y = Rx^2, \quad z = 0\}$ *längs des vollisotropen Kreises* $\{x = 0, \quad z = -\frac{1}{a_{011}} y^2\}$.

4. Kreisschiebzykliden in $I_3^{(2)}$ vom Typ *C II*

Für $a_{003} = a_{011} = 0, \quad a_{002} \neq 0$ erhält man aus (2.14)

$$(y - Rx^2)^2 + (y - Rx^2)a_{010} + a_{002}z^2 + a_{001}z + a_{000} = 0.$$

Wie in **3.** kann man durch eine Schiebung in y-Richtung und eine nachfolgende Schiebung in z-Richtung die Koeffizienten a_{010} und a_{001} zu Null machen. Damit stellt sich als Normalform dieses Flächentyps ein:

$$(y - Rx^2)^2 + a_{002}z^2 + a_{000} = 0. \tag{4.1}$$

Die Leitkurve l von (4.1) ist gegeben durch

$$y^2 + a_{002}z^2 = -a_{000}. \tag{4.2}$$

Abbildung 2

Damit eine irreduzible Fläche vorliegt, muß $a_{000} \neq 0$ gelten. Somit ist (4.2) stets ein Mittelpunktskegelschnitt mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Eine euklidische Achse fällt in die isotrope z-Achse.
Für $a_{002} > 0$, $a_{000} < 0$ ist (4.2) eine Ellipse. Die zugehörige Fläche heißt vom Typ *C II 1.* Sie ist in Abbildung 2 dargestellt.
Für $a_{000} < 0$ und $a_{002} < 0$ ist (4.2) eine Hyperbel 1. Art (vgl. [7], S. 70). Die zugehörige Fläche werde mit *C II 2* bezeichnet. Sie ist in Abbildung 3 dargestellt.
Für $a_{002} < 0$, $a_{000} > 0$ ist (4.2) eine Hyperbel 2. Art (vgl. [7], S. 70). Die zugehörige Fläche werde mit *C II 3* bezeichnet. Sie ist in Abbildung 4 dargestellt.

Wir vermerken den

Satz 4.1: *Im Flaggenraum $I_3^{(2)}$ existieren 3 Typen von Kreisschiebzykliden der Klasse C II. Sie besitzen als Hauptachsenfläche eine nichtisotrope Ebene und werden durch die Normalform (4.1) beschrieben. Sie entstehen durch Schiebung eines Kreises $\{y = Rx^2, \quad z = 0\}$ längs einer Ellipse, Hyperbel 1. Art oder Hyperbel 2. Art mit der Gleichung (4.2).*

5. Kreisschiebzykliden in $I_3^{(2)}$ vom Typ *C III*

Für $a_{011} = 0$ lautet (2.14) $(y-Rx^2)^2+(y-Rx^2)a_{010}+a_{003}z^3+a_{002}z^2+a_{001}z+a_{000} = 0$. Wie in **4.** kann man durch eine Schiebung in y-Richtung $a_{010} = 0$ erzwingen. Die

Abbildung 3

Schnittkurve l der Fläche mit der Ebene $x = 0$ lautet dann

$$y^2 = -a_{003}z^3 - a_{002}z^2 - a_{001}z - a_{000}, \tag{5.1}$$

d.h. es handelt sich um eine divergente Newtonsche Parabel (vgl. [11], S. 131f). Vom Standpunkt der ebenen isotropen Geometrie ist (5.1) eine spezielle vollständig zirkuläre Kurve 3. Ordnung (vgl. [8]). Durch Anwendung einer Schiebung in z-Richtung kann man (5.1) auf die Normalform

$$y^2 = Az(z^2 + \beta z + \gamma) \tag{5.2}$$

mit $A \neq 0$ transformieren. Damit lautet die Normalform der dazu gehörigen Schiebzykliden

$$(y - Rx^2)^2 - Az(z^2 + \beta z + \gamma) = 0. \tag{5.3}$$

Anders als in [9], S. 152, ist jedoch in (5.2) die isotrope z-Achse die Symmetrieachse der Newtonschen Parabeln. Ähnlich wie in [9] sind nun einige Unterfälle zu diskutieren, wobei die geometrische Deutung der verbleibenden Invarianten A, β, γ anders zu führen ist.

Abbildung 4

Unterfall *C III 1*:

Das Polynom $f(z) := z^2 + \beta z + \gamma$ hat zwei reelle, verschiedene Nullstellen $a_2, a_3 \neq 0$. Dann ist l eine *Parabola campaniformis cum ovali* (vgl. [5], S. 132). Die Kurve (5.2) schneidet die isotrope Symmetrieachse in den drei Punkten $L_1(0,0)$, $L_2(0,a_2)$, $L_3(0,a_3)$. Die Spannen $s(L_1,L_2) = a_2$, $s(L_1,L_3) = a_3$ besitzen geometrische Bedeutung. Wegen $a_2 a_3 = \gamma$ und $-\beta = a_2 + a_3$ haben damit auch γ und β geometrische Bedeutung, d.h. sie sind $\mathcal{B}_6^{(2)}$-Invarianten. Zur Deutung von A differenzieren wir (5.2) zweimal nach y. Dies ergibt

$$2y = Az'(z^2 + \beta z + \gamma) + Az(2zz' + \beta),$$
$$2 = Az''(z^2 + \beta z + \gamma) + Az'(2zz' + \beta z') + Az'(2zz' + \beta) + Az(2z'^2 + 2zz'').$$

Wird der Punkt $L_1(0,0)$ eingesetzt, so liefert dies

$$0 = Az'\gamma, \qquad 2 = Az''\gamma + Az'^2\beta + Az'\beta.$$

Im vorliegenden Fall ist $\gamma \neq 0$, so daß die erste Gleichung $z' = 0$ ergibt. Damit folgt aus der zweiten Gleichung

$$z'' = \frac{2}{A\gamma} \quad \text{bzw.} \quad A = \frac{2\rho}{\gamma}, \tag{5.4}$$

wobei $\rho = \frac{1}{z''}$ den isotropen Krümmungsradius der Kurve in L_1 bezeichnet (vgl. [7], S. 112). Da ρ eine geometrische Größe ist, ist auch A eine geometrische Größe. Die dazu gehörige Schiebzyklide bezeichnen wir als *Typ C III 1* und vermerken ihre Normalform

$$y = Rx^2 \pm \sqrt{Az(z-a_2)(z-a_3)}\,. \tag{5.5}$$

Die Fläche (5.5) ist in Abbildung 5 dargestellt. Diese Flächen hängen von 4 freien Parametern ab.

Abbildung 5

Unterfall *C III 2:*

Das Polynom $f(z)$ hat die Nullstellen $z = 0$ und $z = a_3 \neq 0$. Somit hat y^2 die doppelte Nullstelle $z = 0$ und die einfache Nullstelle $z = a_3 \neq 0$. Dann ist l eine *Parabola punctata* (vgl. [5], S. 132). Der Punkt $L_1(0,0)$ ist ein Einsiedler, der Punkt $L_2(0, a_3)$ der weitere Schnittpunkt von l mit der Symmetrieachse $x = y = 0$. Damit hat $s(L_1, L_2) = a_3$

Abbildung 6

geometrische Bedeutung. Zur Deutung der Größe A differenzieren wir die Gleichung von l zweimal nach y und betrachten die Ableitungen z' und z'' im Punkt $L_2(0, a_3)$. Man findet

$$2y = 2Azz'(z - a_3) + Az^2 z' \quad \Rightarrow \quad 0 = Aa_3^2 z' \quad \Rightarrow \quad z' = 0$$

wegen $A \neq 0, \quad a_3 \neq 0$. Weiter gilt

$$2 = 2A[(z'^2 + zz'')(z - a_3) + zz'^2] + 2Az'^2 z + A^2 z'' \quad \Rightarrow \quad 2 = Aa_3^2 z'' \quad \Rightarrow$$

(5.6)
$$z''(a_3) = \frac{2}{Aa_3^2}, \quad A = \frac{2\rho}{a_3^2},$$

wobei $\rho = \frac{1}{z''}$ den isotropen Krümmungsradius von l im Punkt L_2 bezeichnet (vgl. [7], S. 114). Da a_3 eine geometrische Größe ist, und ebenso ρ, ist auch A nach (5.6) eine geometrische Größe. Die zur Leitkurve l gehörigen Schiebzykliden bezeichnen wir als *Typ C III 2* und vermerken ihre Normalform

(5.7)
$$y = Rx^2 \pm \sqrt{Az^2(z - a_3)}\,, \quad a_3 \neq 0.$$

Die Fläche (5.7) ist in Abbildung 6 dargestellt. Sie besitzt einen singulären (isolierten) Kreis in der xy-Ebene. Diese Flächen hängen von 3 freien Parametern ab.

Abbildung 7

Unterfall *C III 3:*

Das Polynom $f(z)$ hat in $z = a_3 \neq 0$ eine zweifache Nullstelle, d.h. es gilt $y^2 = Az(z-a_3)^2$. Dann ist l eine *Parabola nodata* (vgl. [5], S. 133). Diese Kurve besitzt $L_2(0, a_3)$ als Knoten und $L_1(0,0)$ als weiteren Schnittpunkt mit der Symmetrieachse $x = y = 0$. Die Größe $s(L_1, L_2) = a_3$ hat somit geometrische Bedeutung. Wie unter Fall *C III 1* berechnet man die Krümmung z'' im Punkt L_1 zu

$$z''(0) = \frac{2}{Aa_3^2}\,, \tag{5.8}$$

woraus man mittels $\rho = \frac{1}{z''}$ die $\mathcal{B}_6^{(2)}$-Invarianz von A als

$$A = \frac{2\rho}{a_3^2} \tag{5.9}$$

findet. Die zur Leitkurve l gehörigen Schiebzykliden bezeichnen wir als *Typ C III 3* und vermerken ihre Normalform zu

$$y = Rx^2 \pm \sqrt{Az(z-a_3)^2}\,, \quad a_3 \neq 0. \tag{5.10}$$

Die Fläche (5.10) ist in Abbildung 7 dargestellt. Sie besitzt einen nichtisotropen Kreis als Doppelkurve. Diese Flächen hängen von 3 freien Parametern ab.

Abbildung 8

.

Unterfall *C III 4:*

Das Polynom $f(z)$ hat $z = 0$ als doppelte Nullstelle. Somit besitzt y^2 die dreifache Nullstelle $z = 0$, d.h. es gilt $y^2 = Az^3$ und l ist eine *Parabola cuspidata* (vgl. [5], S. 133). Der Punkt $L_1(0,0)$ ist eine Spitze von l. Zur geometrischen Deutung von A schneiden wir l mit dem in $x = 0$ gelegenen isotrop-invariant erklärten Einheitskreis $k: \ z = y^2$. Man erhält nebst L_1 als Schnittpunkte von l mit k die Punkte $S_1\left(\frac{1}{\sqrt[4]{A}}, \frac{1}{\sqrt{A}}\right)$ und $S_2\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{A}}, \frac{1}{\sqrt{A}}\right)$ und berechnet hieraus $d(S_2, S_1) = \frac{2}{\sqrt[4]{A}}$. Damit stellt sich die geometrische Deutung

$$A = \frac{16}{d^4} \tag{5.11}$$

ein. Die zu l gehörigen Kreisschiebzykliden bezeichnen wir mit *C III 4* und vermerken ihre Normalform zu

$$y = Rx^2 \pm \sqrt{Az^3}\ . \tag{5.12}$$

Diese Flächen hängen von 2 freien Parametern ab. Die Abbildung 8 zeigt eine derartige Fläche, welche stets eine Rückkehrkante in Form eines nichtisotropen Kreises besitzt.

Unterfall *C III 5:*

Das Polynom $f(z)$ hat die beiden konjugiert-komplexen Nullstellen $z_1 = a + ib$, $z_2 = a - ib$, mit $b \neq 0$. Dann ist l eine *Parabola pura* (vgl. [11], S. 132) und wegen $z_1 + z_2 = 2a$, $z_1 z_2 = a^2 + b^2$ kann man l in der Gestalt

$$y^2 = Az[(z-a)^2 + b^2] \quad \text{mit} \quad b \neq 0 \tag{5.13}$$

darstellen. Die dazugehörigen Schiebzykliden bezeichnen wir mit *C III 5* und vermerken ihre Normalform

$$y = Rx^2 \pm \sqrt{Az[(z-a)^2 + b^2]}\,. \tag{5.14}$$

Gemäß der Gestalt von l tritt diese Fläche in 3 verschiedenen Formen auf; die Abbildung 9 zeigt eine dieser Möglichkeiten.

Abbildung 9

Es bleibt noch zu zeigen, daß a, b und A in (5.13) $\mathcal{B}_6^{(2)}$-Invarianten sind. Dazu bestimmen wir aus $F(y,z) \equiv y^2 - Az[(z-a)^2 + b^2] = 0$ die isotropen Brennpunkte dieser Kurve. Man gewinnt diese aus $F_z = -A[(z-a)^2 + b^2] - 2Az(z-a) = 0$, d.h. aus der quadratischen Gleichung

$$3z^2 - 4az + (a^2 + b^2) = 0 \tag{5.15}$$

und (5.3). Die Gleichung (5.15) besitzt die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{1}{3}\left(2a \pm \sqrt{a^2 - 3b^2}\right), \tag{5.16}$$

die mit der Abkürzung $\Delta := \sqrt{a^2 - 3b^2}$ für $\Delta \neq 0$ die beiden Geraden $g_1: \quad z = \frac{1}{3}(2a + \Delta)$ bzw. $g_2: \ z = \frac{1}{3}(2a - \Delta)$ liefern, auf denen die Brennpunkte von l liegen. Gilt $\Delta = 0$, dann besitzt l über $\mathbf{C}$ die beiden Brennpunkte

$$F_{1,2}\left(\pm\frac{2}{3}aA\sqrt{\frac{2}{3}aA}, \frac{2}{3}a\right), \tag{5.17}$$

die wegen $a \neq 0, \quad A \neq 0$ stets verschieden sind. Die Trägergerade $z = \frac{2}{3}a$ der Brennpunkte (5.17) besitzt von $L_1(0,0)$ den Abstand $s = \frac{2}{3}a$, womit a — und damit auch $3b^2 = a^2$ — geometrisch gedeutet ist.

Gilt $\Delta \neq 0$, so kann wegen $a \neq \pm ib$ in (5.16) niemals $z_{1,2} = 0$ gelten und (5.3) legt somit über $\mathbf{C}$ zwei Paare von Brennpunkten fest. Diese liegen auf den Geraden g_1, g_2, für die man aus $s := s(g_2, g_1) = \frac{2}{3}\Delta$ unmittelbar

$$\frac{9}{4}s^2 = a^2 - 3b^2 \tag{5.18}$$

findet. Weiter erhält man $\hat{s}(L_1, g_1) = \frac{1}{3}(2a + \sqrt{a^2 - 3b^2}\ ) = \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}s$. Da $\hat{s}$ und s geometrische Größen sind, ist auch a als geometrische Größe nachgewiesen. Aus (5.18) ergibt sich dann, daß auch b geometrische Bedeutung besitzt. Zur Deutung von A berechnen wir den Krümmungsradius ρ im Punkt L_1. Man findet

$$\rho = \frac{A}{2}(a^2 + b^2), \quad \text{d.h.} \quad A = \frac{2\rho}{(a^2 + b^2)}, \tag{5.19}$$

womit die $\mathcal{B}_6^{(2)}$-Invarianz von A gezeigt ist. Da a und $\Delta = \sqrt{a^2 - 3b^2}$ reelle Zahlen sind, ist in (5.19) stets $a^2 + b^2 \neq 0$. Die Flächen (5.14) hängen von vier freien Parametern ab. Wir fassen zusammen im

Satz 5.1: *Im Flaggenraum $I_3^{(2)}$ existieren 5 Typen von Kreisschiebzykliden der Klasse C III. Sie besitzen als Hauptachsenfläche zwei parallele nichtisotrope Ebenen über* $\mathbf{C}$ *und werden durch die Normalformen (5.5), (5.7), (5.10), (5.12) und (5.14) beschrieben. Diese Flächen entstehen durch Schiebung des Kreises $\{y = Rx^2, \quad z = 0\}$ längs einer der 5 Typen von Newton-Parabeln (5.1) der yz-Ebene.*

Literatur

[1] Brauner, H.: *Geometrie des zweifach isotropen Raumes I*, Journ. f. reine u. angew. Math. 224 (1966), 118 – 146.

[2] Brauner, H.: *Geometrie des zweifach isotropen Raumes II*, Journ. f. reine u. angew. Math. 226 (1967), 132 – 158.

[3] Brauner, H.: *Geometrie des zweifach isotropen Raumes III*, Journ. f. reine u. angew. Math. 228 (1967), 38 – 70.

[4] Coolidge, J. L.: *A treatise on the circle and the sphere*, Oxford 1916; Nachdruck: Chelsea Publ. Comp., New York (1971).

[5] Fladt, K.: *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven*, Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt (1962).

[6] Sachs, H.: *Allgemeine Theorie der Zykliden des Flaggenraumes*, Journ. of Geometry, (in Vorbereitung).

[7] Sachs, H.: *Ebene isotrope Geometrie*, Vieweg - Verlag, Braunschweig/Wiesbaden (1987).

[8] Sachs, H.: *Vollständig zirkuläre Kurven n-ter Ordnung der isotropen Ebene*, Studia Sci. Mat. Hung. 24 (1989), 377 – 383.

[9] Sachs, H.: *Die STROMMER-Zykliden des Flaggenraumes*, Journ. of Geometry 43 (1992), 150 – 165.

[10] Sachs, H. u. Strommer, Gy.: *Geodätische und Pseudogeodätische auf Regelflächen im Flaggenraum*, Arch. d. Math. 33 (1979) 478 – 484.

[11] Sachs, H. u. Ščurić, V.: *Zur Theorie der Flächen 2. Ordnung im Flaggenraum*, RAD HAZU 10 (1991), 197 – 216 .

[12] Scheffers, G.: *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie II: Einführung in die Theorie der Flächen*, Walter de Gruyter, Berlin u. Leipzig (1922).

[13] Strubecker, K.: *Differentialgeometrie III, Theorie der Flächenkrümmung*, Sammlung Göschen, Bd. 1180/1180a, Berlin (1969).

[14] Strubecker, K.: *Über die Parabeln zweiter bis vierter Ordnung*, Praxis d. Math. 4 (1962), 169 – 174.

[15] Karáné, S. G.: *Kreisschiebzykliden des Flaggenraumes* $I_3^{(2)}$, Habilitationsschrift a. d. MU Leoben - TU Budapest (1992).

[16] Karáné, S. G.: *Vollisotrope Kreisschiebzykliden des Flaggenraumes*, Publicationes Mathematicae Debrecen 42/3-4 (1993).

Eingegangen am 30.5.93; revidierte Fassung am 10.4.94