Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 36 (1995), No. 2, 219-233.

Zur symplektischen Struktur irreduzibler Darstellungsmoduln der metazyklischen Gruppe $G = \langle a, b\colon\ a^n = 1,\ b^2 = a^t,\ bab^{-1} = a^r \rangle$

Gerhard Roesch *und* **Kurt Rosenbaum**

Gymnasium Apolda
D-99510 Apolda

Institut für Mathematik
Pädagogische Hochschule
D-99006 Erfurt

1. Einleitung

Es seien G eine endliche Gruppe, M ein Darstellungsmodul für G über einem Körper K und $\phi\colon\ M \times M \to K$ eine nichtausgeartete schiefsymmetrische K-Bilinearform. In der Gruppenalgebra KG der Gruppe G über dem Körper K bezeichne $*$ eine Involution, d.h. einen Antiautomorphismus der Ordnung 2, der den Bedingungen

$$\begin{aligned}(a+b)^* &= a^* + b^*,\\ (\alpha a)^* &= \alpha a^*,\\ (ab)^* &= b^* a^*,\\ (a^*)^* &= a\end{aligned}$$

für alle $a, b \in KG$ und $\alpha \in K$ genügt.
Ein Tripel $(M, *, \phi)$ aus einem Darstellungsmodul M für G über K, einer Involution $*$ in KG und einer K-Bilinearform ϕ in M heißt ein symplektischer Modul, wenn ϕ eine nichtausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform ist, die der Bedingung

$$\phi(xa, y) = \phi(x, ya^*) \text{ für alle } x, y \in M \text{ und } a \in KG$$

genügt. Wir nennen dann ϕ invariant bezüglich der Involution $*$.
Symplektische Moduln traten zuerst bei Faddejew [2] in der algebraischen Zahlentheorie auf und wurden dann von Jakowlew [5] sowie von Jannsen und Wingberg [6] zur Beschreibung der absoluten Galoisgruppe p-adischer Zahlkörper verwendet.
Der einem symplektischen Modul zugrunde liegende Vektorraum ist notwendig von gerader Dimension. Mit M ist auch der duale Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(M, K)$ ein Darstellungsmodul für G über K vermöge

$$(ha)(x) = h(xa^*)$$

0138-4821/93 \$ 2.50

für alle $h \in \mathrm{Hom}_K(M,K)$, $x \in M$ und $a \in KG$. Die nicht ausgeartete Bilinearform ϕ vermittelt einen KG-Isomorphismus von M auf $\mathrm{Hom}_K(M,K)$ vermöge

$$x \to \overline{x} \ \text{ mit } \ \overline{x}(y) = \phi(x,y).$$

Fixiert man eine Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ von M, die wir uns als formalen Spaltenvektor

$$\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

geschrieben denken, so liefert die Aktion von G auf M die zu M gehörende Matrixdarstellung $g \to A_g$ der Gruppe G gemäß

$$\overrightarrow{e} g = A_g \overrightarrow{e}.$$

Wählt man im dualen Modul $\mathrm{Hom}_K(M,K)$ die Basis $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ mit

$$b_i(e_k) = \delta_{ik} \quad \text{(Kroneckersymbol)},$$

so bekommt man als zugehörige Darstellung $g \to A^T_{g^*}$ die verallgemeinerte kontragrediente Darstellung, die wir auch als bezüglich der Involution $*$ konjugierte Darstellung bezeichnen. Der durch ϕ vermittelte KG-Isomorphismus von M auf $\mathrm{Hom}_K(M,K)$ wird dann durch

$$A_g C = C A^T_{g^*}$$

beschrieben. Dabei ist C die in der Basis $\overrightarrow{e}$ gegebene Formenmatrix von ϕ, also regulär und schiefsymmetrisch. Das ist gleichwertig mit der Definition des symplektischen Moduls. Ist K ein Körper der Charakteristik Null, so kennt man nach Borewicz [1] die Struktur eines symplektischen Moduls:
Jeder symplektische Modul $(M, *, \phi)$ zerfällt in die orthogonale direkte Summe einfacher symplektischer Teilmoduln:

$$(M, *, \phi) = (M_1, *, \phi_1) \oplus \ldots \oplus (M_k, *, \phi_k).$$

Es gibt zwei Arten einfacher symplektischer Teilmoduln:

1. M_i ist als Darstellungsmodul irreduzibel. Dann ist

$$M_i \cong \mathrm{Hom}_K(M_i, K),$$

und wir nennen M_i bezüglich der Involution $*$ selbstkonjugiert.

2. M_i ist als Darstellungsmodul die KG-direkte Summe zweier bezüglich $*$ zueinander konjugierter irreduzibler Darstellungsmoduln:

$$\begin{aligned} M_i &= M_{i1} + M_{i2} \ \text{ mit} \\ M_{i1} &\cong \mathrm{Hom}_K(M_{i2}, K) \ \text{ und } \ M_{i2} \cong \mathrm{Hom}_K(M_{i1}, K). \end{aligned}$$

Der eigentlich interessante Fall ist der erste. Hier kann es mehrere wesentlich verschiedene nicht ausgeartete, schiefsymmetrische und bezüglich $*$ invariante Bilinearformen geben. Im zweiten Fall dagegen gibt es nach Koch [7] und Kurtz [8] bis auf isometrische Isomorphie genau eine solche Bilinearform. Ihre Einschränkung auf M_{i1} und auf M_{i2} ist jeweils vollständig isotrop.

In der vorliegenden Arbeit leisten wir einen Beitrag zur Lösung des folgenden Problems: Gegeben sind ein irreduzibler Darstellungsmodul M für eine endliche Gruppe G über einem Körper K und eine Involution $*$ in der Gruppenalgebra KG, bezüglich der M selbstkonjugiert ist. Gesucht sind bis auf isometrische Isomorphie alle nicht ausgearteten, schiefsymmetrischen und bezüglich der Involution $*$ invarianten Bilinearformen in M. Ist

$$G = \langle a, b\colon a^n = 1,\ b^2 = a^t,\ bab^{-1} = a^r \rangle$$

mit $(r,n) = 1$, $n\,|\,t(r-1)$ und $r^2 \equiv 1\ (n)$ eine metazyklische Gruppe und $K = \mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen, so können wir dieses Problem vollständig lösen. Das Ergebnis wird benötigt zur Beschreibung symplektischer Moduln über irreduziblen Darstellungsmoduln beliebiger metazyklischer Gruppen.

2. Involutionen

Nach [10] permutiert jede Involution in der Gruppenalgebra $\mathbf{C}G$ der metazyklischen Gruppe G über dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen die zentralen orthogonalen Idempotente von $\mathbf{C}G$. Umgekehrt liefert jede solche Permutation (der Ordnung 2) eine Involution in $\mathbf{C}G$.
Wir führen alle unsere Untersuchungen in der Sprache der Idempotente und gehen daher zunächst ausführlicher auf die Idempotente in der Gruppenalgebra $\mathbf{C}N$ des zyklischen Normalteilers $N = \langle a \rangle$ von G über dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen ein.

2.1. Die Idempotente von $\mathbf{C}N$

Es bezeichne ζ eine primitive n-te Einheitswurzel. Die zyklische Gruppe $N = \langle a \rangle$ hat über $\mathbf{C}$ genau n Darstellungen vom Grad 1, nämlich

$$\delta_j\colon a \to \zeta^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Zu jeder dieser Darstellungen gehört ein Darstellungsmodul, der als Vektorraum über $\mathbf{C}$ eindimensional ist und von dem Element

$$e_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{-jk} a^k$$

erzeugt wird. Die Idempotente e_j sind bekanntlich orthogonal und bilden eine $\mathbf{C}$-Basis der Gruppenalgebra $\mathbf{C}N$. Insbesondere ist

$$be_jb^{-1} = e_j^{(r)} = e_{rj}.$$

2.2. Involutionen in $\mathbf{C}N$

Nach [12] permutiert jede Involution $*$ in der Gruppenalgebra $\mathbf{C}N$ der zyklischen Gruppe $N = \langle a \rangle$ über dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen die orthogonalen Idempotente e_j gemäß

$$e_j^* = e_{\pi(j)}$$

mit $\pi \in S_n$ und $\pi^2 = 1$. Umgekehrt definiert jede solche Permutation eine Involution $*$ in $\mathbf{C}N$, die das erzeugende Element a von N abbildet auf

$$a^* = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{\pi(j)-jk} \right) a^k .$$

Eine Potenz a^t hat dann das Bild

$$(a^t)^* = (a^*)^t = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{t\pi(j)-jk} \right) a^k .$$

Die Anzahl der Involutionen in $\mathbf{C}N$ ist damit gleich der Anzahl aller Elemente $\pi \in S_n$, deren Ordnung höchstens gleich 2 ist.
Wir interessieren uns nun für solche Involutionen der Gruppenalgebra $\mathbf{C}N$, die einerseits die zentralen orthogonalen Idempotente von $\mathbf{C}G$ untereinander permutieren und andererseits bei Einschränkung auf $\mathbf{C}N$ eine Involution in $\mathbf{C}N$ sind. Solche Involutionen wirken auf das erzeugende Element b gemäß $b^* = bc$, wobei $c \in \mathbf{C}N$ eine noch geeignet zu beschreibende Einheit ist.

Definition 1. *Eine Involution $*$ in $\mathbf{C}N$ heißt fortsetzbar zu einer (ebenfalls mit $*$ bezeichneten) Involution in $\mathbf{C}G$, wenn $*$ in $\mathbf{C}G$ die zentralen orthogonalen Idempotente permutiert und bei Einschränkung auf $\mathbf{C}N$ mit der ursprünglichen Involution zusammenfällt.*

Es gibt von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbare Involutionen, etwa die durch die Inversenbildung in G induzierte:

$$a^* = a^{-1}, \text{ fortgesetzt durch } b^* = b^{-1}.$$

Nicht jede Involution $*$ aus $\mathbf{C}N$ ist fortsetzbar zu einer Involution $*$ in $\mathbf{C}G$ (Beispiel 1). Eine fortsetzbare Involution hat im allgemeinen mehrere Fortsetzungen (Beispiel 2).
Ist $*$ eine von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbare Involution, dann genügt das Element $c \in \mathbf{C}N$ mit $b^* = bc$ den Bedingungen

$$c^* c^{(r)} = 1, \tag{1}$$

$$c\, c^{(r)} = (a^*)^t a^{-t}. \tag{2}$$

Dabei bedeutet $c^{(r)} = bcb^{-1}$. Diese beiden Bedingungen ergeben sich unmittelbar aus

$$(b^*)^* = b = (bc)^* = c^* bc = c^* c^{(r)} b$$

und

$$(b^*)^2 = bcbc = c\,c^{(r)}b^2 = (b^2)^* = (a^t)^*.$$

Ist umgekehrt $*$ eine von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbare Involution, so liefert jedes $c \in \mathbf{C}N$, das den Bedingungen (1) und (2) genügt, gemäß

$$a \to a^*, \quad b \to b^* = bc$$

eine konkrete Fortsetzung.
Wir übersetzen die Bedingungen (1) und (2) in die Sprache der Idempotente. Es sei

$$c = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j e_j.$$

Wegen

$$a = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^j e_j$$

ist $c^{(r)} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{rj} e_j$ und $c^* = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\pi(j)} e_j$.

Dann nehmen die Bedingungen (1) und (2) die äquivalente Form

$$(1') \qquad \alpha_{\pi(j)}\alpha_{rj} = 1,$$
$$(2') \qquad \alpha_j \alpha_{rj} = \zeta^{(\pi(j)-j)t}$$

an für alle $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die Fortsetzbarkeit einer Involution $*$ von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ vollständig durch die definierende Permutation π beschreiben.

Satz 1. *Eine durch eine Permutation π definierte Involution $*$ in $\mathbf{C}N$ läßt sich genau dann zu einer (ebenfalls mit $*$ bezeichneten) Involution in $\mathbf{C}G$ fortsetzen, wenn*

$$\pi(rj) \equiv r\pi(j)\ (n)$$

ist für alle $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Beweis. 1. Es sei $*$ eine von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbare Involution. Für das erzeugende Element a des zyklischen Normalteilers N berechnen wir $(a^r)^*$ auf zweierlei Art.
Einerseits ist

$$(a^r)^* = (a^*)^r = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{\pi(j)} e_j\right)^r = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{r\pi(j)} e_j.$$

Andererseits ist

$$(a^r)^* = (bab^{-1})^* = (b^*)^{-1}a^*b^* = c^{-1}b^{-1}a^*bc = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{\pi(j)} e_j\right)^{(r)} = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{\pi(rj)} e_j.$$

Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung

$$\pi(rj) \equiv r\pi(j)\ (n)$$

für alle $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

2. Wenn umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt ist, so wird jedes zentrale Idempotent aus $\mathbf{C}G$, das zu einer irreduziblen Darstellung vom Grad 2 gehört, auf ein solches abgebildet.
Wir konstruieren nun ein $c = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j e_j$, dessen Koeffizienten den Bedingungen $(1')$ und $(2')$ genügen.
Zu diesem Zweck teilen wir die Menge $M = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ in drei paarweise disjunkte Teilmengen ein:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{j\colon\ \pi(j) = j\ \vee\ \pi(j) \equiv rj\ (n)\},\\ M_2 &= \{j\colon\ j \equiv rj\ (n)\ \wedge\ \pi(j) \neq j\},\\ M_3 &= M \setminus (M_1 \cup M_2). \end{aligned}$$

Jede dieser Mengen wird durch die Permutation π, falls sie die Bedingung $\pi(rj) \equiv r\pi(j)\,(n)$ für alle $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ erfüllt, auf sich selbst abgebildet.
Wir definieren nun

$$c_1 = \sum_{j\in M_1} e_j, \quad c_2 = \sum_{j\in M_2} \zeta^{\frac{1}{2}(\pi(j)-j)t} e_j, \quad c_3 = \sum_{j\in M_3} \alpha_{je_j}$$

mit $\alpha_j = \zeta^{-jt}$, falls $j < rj$ und $\alpha_{rj} = \zeta^{\pi(j)t}$.

Dann genügt das Element $c = c_1 + c_2 + c_3$ den Bedingungen $(1')$ und $(2')$.
Die durch $b^* = bc$ fortgesetzte Involution permutiert dann auch die zu den Darstellungen vom Grad 1 der Gruppe G gehörenden Idempotente von $\mathbf{C}G$ untereinander von der Ordnung 2. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Im konkreten Fall können einzelne Mengen M_i leer sein (Beispiel 3). Neben dem im Beweis angegebenen Element c gibt es im allgemeinen noch weitere Elemente c, welche eine Involution aus $\mathbf{C}N$ zu einer Involution in $\mathbf{C}G$ fortsetzen (Beispiele 2, 4). Für eine beliebige metazyklische Gruppe mit $m > 2$ kann die Bedingung von Satz 3 ebenfalls erfüllt sein (Beispiel 5), sie ist aber im allgemeinen nicht notwendig (Beispiel 6).

3. Symplektische Moduln

In diesem Abschnitt geben wir die irreduziblen Darstellungen der metazyklischen Gruppe $G = \langle a, b\colon a^n = 1,\ b^2 = a^t,\ bab^{-1} = a^r\rangle$ an und untersuchen, wann sich in den zugehörigen Darstellungsmoduln bei gegebener Involution eine symplektische Struktur einführen läßt.

3.1. Die irreduziblen Darstellungen der Gruppe G

Die irreduziblen Darstellungen einer beliebigen metazyklischen Gruppe G über dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen sind nach Clifford induzierte Darstellungen von Darstellungen vom Grad 1 gewisser Untergruppen von G. Danach hat die uns interessierende Gruppe

$$G = \langle a, b\colon\, a^n = 1,\ b^2 = a^t,\ bab^{-1} = a^r \rangle$$

über $\mathbf{C}$ nur Darstellungen vom Grad 1 oder vom Grad 2 (siehe auch [11]).
Ist bei festem j

$$\delta_j\colon\, a \to \zeta^j$$

eine irreduzible Darstellung von $N = \langle a \rangle$ mit $\zeta^j = \zeta^{rj}$, also mit

$$rj \equiv j \ (n),$$

so entstehen daraus zwei Darstellungen vom Grad 1 der gesamten Gruppe G, nämlich

$$\begin{aligned} d_{j_1}\colon\ & a \to \zeta^j,\ b \to \sqrt{\zeta^{jt}} \quad \text{und} \\ d_{j_2}\colon\ & a \to \zeta^j,\ b \to -\sqrt{\zeta^{jt}}. \end{aligned}$$

Diese Darstellungen sind für die spätere Betrachtung symplektischer Moduln uninteressant.
Ist dagegen

$$\delta_j\colon\, a \to \zeta^j$$

eine irreduzible Darstellung von N mit

$$rj \not\equiv j \ (n)$$

(dann ist wegen $r^2 \equiv 1 \ (n)$ erst $r^2 j \equiv j \ (n)$), so ist die induzierte Darstellung

$$d_j = \mathrm{ind}_N^G\, \delta_j\colon\ a \to \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{rj} \end{pmatrix},\ b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta^{jt} & 0 \end{pmatrix}$$

eine irreduzible Darstellung der metazyklischen Gruppe G. Wir betrachten den zugehörigen Darstellungsmodul. Dieser ist, da er von gerader Dimension ist, möglicher Träger symplektischer Strukturen.

3.2. Die konjugierte Darstellung

Um entscheiden zu können, ob eine gegebene irreduzible Darstellung $g \to A_g$ vom Grad 2 unserer metazyklischen Gruppe äquivalent zu ihrer konjugierten Darstellung $g \to A_{g^*}^T$ ist, benötigen wir die Gestalt der letzteren. Vorbereitend formulieren wir zwei Hilfssätze. Dabei bezeichnet j jeweils einen festen Exponenten von ζ. Bei den Beweisen verwenden wir s als Laufindex für die orthogonalen Idempotente.

Lemma 1. *Ist* $a \to A_a = \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{rj} \end{pmatrix}$, *so ist* $A_{a^*} = \begin{pmatrix} \zeta^{\pi(j)} & 0 \\ 0 & \zeta^{\pi(rj)} \end{pmatrix}$.

Zum Beweis von Lemma 1 genügt es, die Bilder A_s der Idempotente e_s bei der Darstellung d_j zu betrachten, also

$$A_s = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{-sk} \begin{pmatrix} \zeta^{jk} & 0 \\ 0 & \zeta^{rjk} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \zeta^{(j-s)k} & 0 \\ 0 & \zeta^{(rj-s)k} \end{pmatrix}.$$

Ist $V = \mathrm{ind}(e_j \mathbf{C}N)$, so ist bei Einschränkung auf N

$$V|_N = e_j\mathbf{C}N + e_{rj}\mathbf{C}N.$$

Wegen $Ve_k = 0$ für $k \neq j$ und $k \neq rj$ folgt

$$A_s = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } s = j \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{für } s = rj \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $a^* = \sum_{s=0}^{n-1} \zeta^s e_{\pi(s)} = \sum_{s=0}^{n-1} \zeta^{\pi(s)} e_s$ folgt wie behauptet

$$A_{a^*} = \begin{pmatrix} \zeta^{\pi(j)} & 0 \\ 0 & \zeta^{\pi(rj)} \end{pmatrix}.$$

Lemma 2. *Es sei* $c \in \mathbf{C}N$ *ein Element, das eine Involution* $*$ *aus* $\mathbf{C}N$ *fortsetzt zu einer Involution in* $\mathbf{C}G$ *gemäß*

$$a \to a^*, \;\; b \to b^* = bc$$

und sei $d_j = \mathrm{ind}_N^G \delta_j$ *wie oben eine irreduzible induzierte Darstellung. Wenn für die* $*$ *definierende Permutation* π *die Bedingung*

$$\pi(j) \equiv rj \;\; (n)$$

erfüllt ist, dann hat das Element c *bei* d_j *die Darstellungsmatrix*

$$A_c = \pm E.$$

Beweis. Wir setzen $c = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s e_s$.

Aus dem Beweis von Lemma 1 kennen wir die Darstellungsmatrizen A_s der Idempotente e_s. Daher wird

$$A_c = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s A_s = \begin{pmatrix} \alpha_j & 0 \\ 0 & \alpha_{rj} \end{pmatrix}.$$

Da $*$ eine von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbare Involution ist, folgt aus der Bedingung $(1')$ des Beweises von Satz 1, angewendet auf den festen Index j, wegen $\pi(j) \equiv rj\ (n)$ zunächst $\alpha_{rj}^2 = 1$, also $\alpha_{rj} = \pm 1$.
Aus der Bedingung $(2')$ ergibt sich dann (wieder für unser festes j) unter Beachtung von $n \mid t(r-1)$, also von

$$\zeta^{(\pi(j)-j)t} = \zeta^{(\pi(j)-rj)t},$$

(wieder wegen $\pi(j) \equiv rj\ (n)$) des weiteren $\alpha_j \alpha_{rj} = 1$.
Zusammen bedeutet das

$$\alpha_j = \alpha_{rj} = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha_j = \alpha_{rj} = -1.$$

Damit ist auch Lemma 2 bewiesen.

Diese Hilfssätze sind der Schlüssel zur Beantwortung unserer beiden Hauptfragen:

1. Wann ist eine induzierte Darstellung d_j bezüglich einer (von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortgesetzten) Involution $*$ selbstkonjugiert?
2. Wann läßt sich in einem selbstkonjugierten Darstellungsmodul eine symplektische Struktur einführen?

Satz 2. *Es sei δ_j: $a \to \zeta^j$ eine Darstellung von N, die bezüglich einer von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbaren Involution $*$ nicht selbstkonjugiert ist, d.h. für die $*$ beschreibende Involution π gelte*

$$\pi(j) \neq j.$$

Ist $j \not\equiv rj\ (n)$, die induzierte Darstellung $d_j = \mathrm{ind}_N^G\, \delta_j$ also irreduzibel, so gilt:
Die induzierte Darstellung d_j vermöge

$$a \to \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{rj} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta^{jt} & 0 \end{pmatrix}$$

ist genau dann selbstkonjugiert bezüglich der Fortsetzung der Involution vermöge $a \to a^*$, $b \to b^* = bc$ mit $c \in \mathbf{C}N$, wenn

$$\pi(j) \equiv rj\ (n)$$

ist.

Beweis. 1. Sei die Darstellung d_j selbstkonjugiert. Dann gibt es eine reguläre Matrix C mit

$$A_a C = C A_{a^*}^T \quad \text{und} \quad A_b C = C A_{b^*}^T\ .$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich die Matrix C unter Beachtung von Lemma 1 in der Form

$$C = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, und es folgt

$$\zeta^{rj} = \zeta^{\pi(j)}, \quad \text{also} \quad \pi(j) \equiv rj\ (n).$$

Bis hierher haben wir die Darstellungsmatrix A_b noch gar nicht benötigt.

2. Wenn umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt ist, so ist die auf N eingeschränkte Darstellung d_j bezüglich $*$ selbstkonjugiert (aber nicht mehr irreduzibel), denn die Darstellungen

$$a \to \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{rj} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a \to \begin{pmatrix} \zeta^{\pi(j)} & 0 \\ 0 & \zeta^{r\pi(j)} \end{pmatrix}$$

sind äquivalent. Nun kommt auch die zweite Gleichung $A_b C = C A_{b*}^T$ ins Spiel. Nach Lemma 2 ist

$$A_{b*}^T = (A_b A_c)^T = \pm A_b^T.$$

Ist $A_c = E$, also $A_{b*}^T = A_b^T$, so setzen wir $x = y$. Ist dagegen $A_c = -E$, so setzen wir $x = -y$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Ist die induzierte Darstellung d_j nicht selbstkonjugiert, so hat die Darstellungsmatrix A_c keine entsprechende Bedeutung.

3.3. Symplektische Struktur

Nach [10] läßt sich in dem zu der irreduziblen Darstellung d_j gehörenden selbstkonjugierten Darstellungsmodul M entweder eine symmetrische oder eine schiefsymmetrische nichtausgeartete und bezüglich der Involution $*$ auch invariante Bilinearform angeben. Ein dort angegebenes Kriterium([10], Seite 134) führt bei der praktischen Überprüfung zu aufwendigen Rechnungen. In unserem Fall ist allein die Darstellungsmatrix A_c verantwortlich für das Auftreten der jeweiligen Form. Unser Hauptergebnis ist

Satz 3. *Es sei δ_j: $a \to \zeta^j$ eine bezüglich einer von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbaren Involution $*$ nicht selbstkonjugierte Darstellung des Normalteilers N, also $\pi(j) \neq j$. Ist auch die induzierte Darstellung*

$$d_j = \operatorname{ind}_N^G \delta_j\colon\ a \to \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{rj} \end{pmatrix},\ b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta^{jt} & 0 \end{pmatrix}$$

irreduzibel, also $j \not\equiv rj\ (n)$, und bezüglich einer Fortsetzung der Involution gemäß

$$a \to a^*,\ b \to b^* = bc \quad \text{mit} \quad c \in \mathbf{C}N$$

selbstkonjugiert, dann gilt:

Im zugehörigen Darstellungsmodul M läßt sich genau dann eine symplektische Struktur einführen, wenn für die Darstellungsmatrix A_c des Elements c gilt $A_c = -E$. Genau dann läßt sich in M eine symmetrische Struktur einführen, wenn $A_c = +E$ ist.

Beweis. Nach Lemma 2 ist $A_c = \pm E$.

1. Es sei $(M, *, \phi)$ ein symplektischer Modul, also

$$A_a C = C A_{a^*}^T, \quad A_b C = C A_{b^*}^T$$

mit einer regulären schiefsymmetrischen Matrix C. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

annehmen. Dann ergibt sich aus der ersten Gleichung die Bedingung $\pi(j) \equiv rj\ (n)$ für das Selbstkonjugiertsein von M. Aus der zweiten Gleichung

$$\begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{rj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^{\pi(j)} & 0 \\ 0 & \zeta^{r\pi(j)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta^{jt} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j & 0 \\ 0 & \alpha_{rj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{jt} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir $\alpha_j = \alpha_{rj} = -1$, also $A_c = -E$.

2. Wenn umgekehrt $A_c = -E$ ist, so ergibt sich aus den beiden Gleichungen

$$A_a C = C A_{a^*}^T \quad \text{und} \quad A_b C = -C A_b^T$$

sofort

$$C = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x \neq 0.$$

Folglich ist $(M, *, \phi)$ ein symplektischer Modul.

Analog zeigt man die Behauptung über die symmetrische Struktur. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Anstelle von $C = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ mit $x \neq 0$ hätten wir oben auch die dazu kogrediente Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nehmen können. Über einem irreduziblen Darstellungsmodul für eine Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik Null gibt es nämlich bis auf isometrische Isomorphie höchstens eine symplektische Struktur.

Ist δ_j: $a \to \zeta^j$ ein bezüglich einer Involution $*$ in $\mathbf{C}N$ nicht selbstkonjugierter Darstellungsmodul, so kann folgendes eintreten: Es gibt zwei verschiedene Fortsetzungen von $*$ zu einer Involution in $\mathbf{C}G$ gemäß

$$b^* = bc^{(1)}, \ b^* = bc^{(2)},$$

so daß die induzierte Darstellung $d_j = \mathrm{ind}_N^G\,\delta_j$ bezüglich beider Fortsetzungen selbstkonjugiert ist, aber bei der ersten eine symplektische, bei der zweiten eine symmetrische Struktur trägt (Beispiel 7).

4. Beispiele

Beispiel 1. Die symmetrische Gruppe $S_3 = \langle a, b\colon a^3 = 1,\, b^2 = 1,\, bab^{-1} = a^2\rangle$ ist metazyklisch. In $\mathbf{C}N$, $N = \langle a\rangle$ ist durch $\pi = (13)$ die Involution

$$a \to a^* = \zeta a^{-1}, \quad \zeta = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

definiert. Sie ist nicht zu einer Involution in $\mathbf{C}G$ fortsetzbar, denn sie respektiert das zu der Darstellung vom Grad 2 vermöge $a \to \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}$, $b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gehörende Idempotent

$$e = \frac{1}{3}(2 - a - a^2)$$

nicht.

Beispiel 2. G sei wie im Beispiel 1 die symmetrische Gruppe S_3. Die durch die Permutation $\pi = (12)$ in $\mathbf{C}N$ definierte Involution

$$a \to a^* = a^{-1}$$

ist auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbar. Mögliche Elemente c aus $\mathbf{C}N$ für eine Fortsetzung gemäß $b^* = bc$ sind nach Licht ([9], Seite 51):

$$\begin{aligned} c^{(1)} &= \pm 1, \\ c^{(2)} &= \pm\Big(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}a^2\Big). \end{aligned}$$

Beispiel 3. Es sei $G = \langle a, b\colon a^6 = 1,\, b^2 = a^3,\, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ die verallgemeinerte Quaternionengruppe Q_3. In der Gruppenalgebra $\mathbf{C}N$ des zyklischen Normalteilers $N = \langle a\rangle$ der Ordnung 6 über dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen gibt es 76 Involutionen, von denen genau 12 von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbar sind. Sie sind definiert durch die Permutationen
(1), (15), (24), (15)(24),
(36), (15)(36), (24)(36), (15)(24)(36),
(12)(45), (14)(25),
(12)(45)(36), (14)(25)(36).

Beispiel 4. Wir betrachten wieder die verallgemeinerte Quaternionengruppe

$$G = \langle a, b\colon a^6 = 1,\, b^2 = a^3,\, bab^{-1} = a^{-1}\rangle = Q_3.$$

Jede Involution $*$ aus $\mathbf{C}N$, die durch eine Permutation π mit $M_1 = \{0,1,2,3,4,5\}$, $M_2 = M_3 = \emptyset$ definiert ist (das sind gerade die ersten vier der im Beispiel 3 angegebenen Involutionen), ist auf 16 verschiedene Arten durch ein Element $c \in \mathbf{C}N$ gemäß $b^* = bc$ fortsetzbar:
Nach L. Gutierrez-Barrios ([4], Seite 39) sind das die durch die Summenformeln

$$c = \pm \left(1 - \frac{d}{3} \sum_{k=0}^{6/d-1} a^{dk} \right) a^g$$

oder

$$c = \pm \left(1 - \frac{d}{3} \sum_{k=0}^{6/d-1} (-a)^{dk} \right) a^g$$

ausgedrückten Elemente. Dabei durchläuft d alle Teiler von 6 und $g < 6$ ist eine positive ganze Lösung der Kongruenz $g \cdot 4 \equiv 0 \ (6)$.

Beispiel 5. Die metazyklische Gruppe

$$G = \langle a, b\colon a^6 = 1,\ b^4 = 1,\ bab^{-1} = a^5 \rangle \cong Z_2 \times Q_3$$

ist nicht isomorph zu einer metazyklischen Gruppe mit einem zyklischen Normalteiler der Ordnung 12. Genau die Involutionen $*$ aus $\mathbf{C}N$ mit $N = \langle a \rangle$ sind zu Involutionen in $\mathbf{C}G$ fortsetzbar, für welche die definierende Permutation $\pi \in S_6$ die Bedingung

$$\pi(rj) \equiv r\pi(j) \ (n) \quad \text{für alle } j = 0,1,2,4,5$$

erfüllt. Darüber hinaus gilt: Die Einschränkung jeder von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbaren Involution auf die Gruppenalgebra $\mathbf{C}H$ mit $H = \langle a, b^2 \rangle$ ist eine Involution in $\mathbf{C}H$. So definiert etwa $\pi = (12)(45)$ in $\mathbf{C}N$ die Involution

$$a \to a^* = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{3}a^5.$$

Sie kann fortgesetzt werden zu einer Involution in $\mathbf{C}G$ gemäß

$$b \to b^* = b \left(\frac{1}{3} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{3} a^2 + \frac{1 - i\sqrt{3}}{3} a^4 \right).$$

Bei Einschränkung auf die Gruppenalgebra $\mathbf{C}H$ wird das Element b^2 abgebildet auf

$$(b^*)^2 = b^2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^4 \right).$$

Beispiel 6. In der metazyklischen Gruppe

$$G = \langle a, b\colon a^{20} = 1,\ b^4 = 1,\ bab^{-1} = a^3 \rangle$$

definiert die Permutation $\pi = (1, 9)$, die die Zahlen 1 und 9 vertauscht, eine Involution $*$ in $\mathbf{C}N$, welche der im Fall $m = 2$ notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Fortsetzbarkeit von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ nicht genügt, denn

$$\pi(r \cdot 1) = \pi(3) = 3 \neq r\pi(1) = 7.$$

Dennoch ist diese Involution fortsetzbar zu einer Involution in $\mathbf{C}G$, welche die zentralen orthogonalen Idempotente geeignet permutiert.

Beispiel 7. Wie in den Beispielen 1 und 2 sei $G = \langle a, b\colon a^3 = 1, b^2 = 1, bab^{-1} = a^2 \rangle$ die symmetrische Gruppe S_3. Sie hat eine über $\mathbf{C}$ irreduzible Darstellung vom Grad 2, nämlich

$$d\colon\ a \to \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix},\ b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich der von $\mathbf{C}N$ auf $\mathbf{C}G$ fortsetzbaren Involution $*$ gemäß $a^* = a^2$ mit den beiden Fortsetzungen

$$\begin{aligned} b^* &= bc^{(1)}, \quad c^{(1)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}a^2 \quad \text{und} \\ b^* &= bc^{(2)}, \quad c^{(2)} = -1 \end{aligned}$$

gilt $A_{c^{(1)}} = E$ bzw. $A_{c^{(2)}} = -E$.

Literatur

[1] Borewicz, Z. I.: *Über symplektische Räume mit Operatorgruppen.* Mat. Zap. **3** (1970), 36–50 (russisch).

[2] Faddejew, D. K.: *Zur Struktur der reduzierten multiplikativen Gruppe eines zyklischen Körpers.* Isv. Akad. Nauk SSSR **24** (1960), 145–152 (russisch).

[3] Gräbe, H.-G.; Rosenbaum, K.: *Induzierte symplektische Moduln bezüglich beliebiger Involutionen.* Wiss. Z. PH Erfurt/Mühlhausen, Math.-Nat. Reihe **21** (1985), Heft 1, 143–148.

[4] Gutierrez-Barrios, L.: *Einfache symplektische Moduln über irreduziblen Darstellungsmoduln der verallgemeinerten Quaternionengruppe.* Dissertation Erfurt 1990.

[5] Jakowlew, A. W.: *Die Galoisgruppe des algebraischen Abschlusses eines lokalen Körpers.* Isv. Akad. Nauk SSSR **32** (1968), 1283–1322 (russisch).

[6] Jannsen, U.; Wingberg, K.: *Die Struktur der absoluten Galoisgruppe p-adischer Zahlkörper.* Inv. Math. **70** (1982), 71–98.

[7] Koch, H.: *Über Darstellungsräume und die Struktur der multiplikativen Gruppe eines p-adischen Zahlkörpers.* Math. Nachr. **26** (1963), 67–100.

[8] Kurtz, B. G.: *Symplektische Moduln über Zwischenkörpern des Kreisteilungskörpers.* Dissertation Erfurt 1983.

[9] Licht, B.: *Einfache symplektische Moduln bezüglich der Diedergruppe.* Dissertation Erfurt 1986.

[10] Mahrhold, W.; Rosenbaum, K.: *Involutionen in halbeinfachen Algebren.* Beitr. Alg. Geom. **11** (1981), 133–144.

[11] Rosenbaum, K.; Bärwolf, A.: *Die absolut irreduziblen Darstellungen der metazyklischen Gruppen.* Wiss. Z. PH Erfurt/Mühlhausen, Math.-Nat. Reihe **28** (1992), Heft 1, 37–50.

[12] Rosenbaum, K.: *Zur Angabe aller Involutionen in einer Gruppenalgebra.* Acta Fac. Paed. Ostraviensis, Ser. A **16** (1981), 45–51.

Eingegangen am 5.4.1994, revidierte Fassung am 30.3.1995.