

(Ver *Olimpiadas Matemáticas en Venezuela*, p. 107)

# Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen XII, Número 1, Año 2005

I.S.S.N. 1315-4125

Editor

Argimiro Arratia

Comité Editorial

Oswaldo Araujo Eduardo Lima de Sá

Alejandra Cabaña Gerardo Mendoza Joaquín Ortega

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

## Asociación Matemática Venezolana

Presidente

Carlos A. Di Prisco

Capítulos Regionales

**CAPITAL**

Carlos A. Di Prisco, Matemáticas, IVIC  
cdiprisc@ivic.ve

**LOS ANDES**

Oswaldo Araujo, Matemáticas, ULA  
araujo@ciens.ula.ve

**ZULIA-FALCON**

Fernando Sánchez, Matemáticas, LUZ  
fsanchez@luz.ve

**CENTRO-OCCIDENTAL**

Neptalí Romero  
nromero@uicm.ucla.edu.ve

Matemáticas, UCLA

**ORIENTE**

Jacques Laforgue  
laforgue@sucre.udo.edu.ve  
Matemáticas, UDO

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet o escribir a su dirección postal.

Asociación Matemática Venezolana

Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela

amv@usb.ve <http://amv.ivic.ve/>

**Asociación Matemática Venezolana**  
Apartado 47.898, Caracas 1041 – A, Venezuela

**Boletín  
de la  
Asociación  
Matemática  
Venezolana**

**Vol. XII • No. 1 • Año 2005**

**Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**  
**Volumen XII, Número 1, Año 2005**

**ARTÍCULOS**

<b>Dinámica de operadores de composición en espacios de Hilbert funcionales analíticos</b>	
Gerardo R. Chacón, José Giménez & Edixon Rojas	<b>3</b>
<b>Sobre la homología de algunos complejos especiales</b>	
Rafael Sánchez Lamonedá & Imtiaz Manji	<b>21</b>
<b>Some properties of solutions for the generalized thin film equation in one space dimension</b>	
Changchun Liu	<b>43</b>
<b>Uniqueness, nonpositivity and bounds for solutions of elliptic problems via the maximum principle</b>	
Cristian-Paul Danet	<b>53</b>
<b>Boundary value problems in complex analysis I</b>	
Heinrich Begehr	<b>65</b>

**EDUCACIÓN**

<b>Sobre los automatismos en la resolución de problemas</b>	
Javier Peralta	<b>87</b>

**INFORMACIÓN NACIONAL**

<b>Pedro Berrizbeitia, Premio Lorenzo Mendoza Fleury 2005 otorgado por la Fundación Polar</b>	<b>105</b>
<b>Olimpiadas Matemáticas en Venezuela. 2000–2004</b>	
Rafael Sánchez Lamonedá & Jorge Salazar	<b>107</b>

# Dinámica de operadores de composición en espacios de Hilbert funcionales analíticos \*

Gerardo R. Chacón, José Giménez & Edixon Rojas

## Resumen

En este artículo, cuyo carácter es divulgativo, estudiamos algunas propiedades dinámicas de operadores de composición, con símbolo fraccional lineal, que actúan en espacios de Hilbert Funcionales Analíticos. Asimismo, estudiamos la dinámica de semigrupos de operadores de composición en dichos espacios.

## 1. Introducción

Dado un espacio vectorial topológico  $X$ , una función  $T : X \rightarrow X$  y un vector  $x \in X$ , nos avocaremos al estudio de las propiedades espaciales del conjunto *Órbita de  $x$  bajo  $T$* , definido como  $\text{Orb}(x, T) := \{x, T(x), T^2(x), T^3(x), \dots\}$ , donde  $T^n$  denota la composición de  $T$  con sí misma  $n$  veces. Es decir, estudiaremos el comportamiento *dinámico* de la función  $T$ .

Existen esencialmente dos nociones asociadas al hecho de que el conjunto  $\text{Orb}(x, T)$  sea “grande” en  $X$ , estas son: *ciclicidad* e *hiperciclicidad*. Una función  $T$  se dice cíclica si existe un vector  $x \in X$  tal que el espacio generado linealmente por los elementos de  $\text{Orb}(x, T)$  es denso en  $X$ ; en este caso, el vector  $x$  es llamado un *vector cíclico para  $T$* . Asimismo, diremos que un operador lineal  $T : X \rightarrow X$  es hipercíclico si existe un vector  $x \in X$  tal que  $\text{Orb}(x, T)$  es denso en  $X$ . Aquí a un tal vector  $x$  se le denomina *vector hipercíclico para  $T$* . Es claro que todo operador hipercíclico también es cíclico.

Dado un espacio vectorial  $\mathcal{H}$  cuyos vectores son funciones definidas en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , a valores complejos, y una función  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ , definimos el operador lineal

$$C_\varphi(f) := f \circ \varphi.$$

Este operador es conocido como el *Operador de Composición con símbolo  $\varphi$* .

---

\*Investigación parcialmente financiada por el CDCHT-ULA proyecto H-806-04-05-C

Circunscribiremos nuestro interés al estudio de operadores de composición actuando en Espacios de Hilbert de funciones definidas en el disco unitario complejo y con símbolo una *Transformación Fraccional Lineal*. Uno de los aspectos que hace interesante el estudio de estos operadores lo constituye el hecho de que esta teoría proporciona un puente entre la teoría de operadores y la teoría de funciones. Por otra parte, el estudio de la dinámica de operadores es un problema estrechamente relacionado con el célebre problema de los subespacios invariantes; en efecto, si  $\mathcal{B}$  es un espacio de Banach y  $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  un operador lineal, entonces los vectores no cíclicos para  $T$  generan subespacios cerrados propios que son  $T$ -invariantes; por consiguiente, si todo vector no nulo es cíclico para  $T$ , entonces no existen subespacios cerrados propios que sean  $T$ -invariantes.

Adicionalmente, estudiaremos la dinámica de semigrupos de operadores de composición; en particular, la noción introducida por Frankfurt [6] y estudiada posteriormente por Giménez en [8]. Mostraremos en cuales espacios la noción de cuasiciclicidad (Frankfurt) y la noción de ciclicidad coinciden. Finalmente, planteamos algunas interrogantes relacionadas con estos temas que, a nuestro entender, constituyen problemas abiertos. Este artículo, cuyo carácter es divulgativo, contiene también algunos resultados originales de los autores.

En dimensión finita resulta sencillo encontrar un operador lineal cíclico; por ejemplo, dado un espacio vectorial de dimensión  $n$  y una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  del mismo, basta definir a  $T$  como sigue:  $Te_1 := e_2, Te_2 := e_3, \dots, Te_{n-1} := e_n$ . Obsérvese que independientemente de cómo se defina  $Te_n$ , el hecho de que  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset \text{Orb}(e_1, T)$  implica que  $T$  es un operador cíclico. Esto nos permite afirmar que en espacios de dimensión finita, existen abundantes operadores cíclicos. Sin embargo, en estos espacios ningún operador lineal puede ser hipercíclico (ver [18]). De hecho, si el operador adjunto de un operador lineal posee al menos un autovalor, entonces dicho operador no puede ser hipercíclico [18]. Esto nos lleva necesariamente a concluir que la hiperciclicidad de un operador lineal es una propiedad que sólo podría tener lugar en espacios vectoriales de dimensión infinita.

A lo largo de este trabajo, denotaremos por  $H(\Omega)$  al espacio de todas las funciones analíticas definidas en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de  $\Omega$ . El primer ejemplo de un operador lineal hipercíclico se construyó en el espacio  $\mathcal{L}(H(\mathbb{C}))$  ([2]). De hecho, existe toda una clase de operadores hipercíclicos actuando sobre este espacio: Si  $a \neq 0$ , entonces el operador de traslación  $T_a : H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$  definido por  $T_a(f)(z) := f(z+a)$  es hipercíclico. Obsérvese que si denotamos por  $\varphi_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a la función definida como  $\varphi_a(z) := z+a$ , entonces  $T_a(f) = f \circ \varphi_a$ . Es decir, el operador  $T_a$  es un *operador de composición* sobre  $H(\mathbb{C})$ .

Un ejemplo de un operador lineal hipercíclico actuando sobre un espacio de Hilbert es el siguiente ([15]): Sea  $l_2$  el espacio de las sucesiones complejas

cuadrado-sumables con la norma  $\|\{a_n\}_{n=1}^\infty\|_2^2 := \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 = \langle \{a_n\}, \{a_n\} \rangle$ . El operador de *retroceso unilateral*:

$$B(\{a_1, a_2, a_3, \dots\}) := \{a_2, a_3, \dots\},$$

claramente satisface  $\|B(\{a_1, a_2, a_3, \dots\})\|_2 \leq \|\{a_1, a_2, a_3, \dots\}\|_2$ , por lo que  $B$  es una función no expansiva. Mas aún, si multiplicamos a  $B$  por una constante  $\lambda$  de módulo menor que uno obtendremos que, de acuerdo al teorema del punto fijo de Banach ([3]), el conjunto  $\text{Orb}(x, \lambda B)$  es una sucesión convergente para cualquier  $x \in l_2$  y en consecuencia, el operador  $\lambda B$  no es hipercíclico. Sin embargo, como mostraremos mas adelante, si  $|\lambda| > 1$  el operador  $\lambda B$  es hipercíclico. Este fenómeno no es exclusivo de los múltiplos del operador de retroceso unilateral y de hecho existe una gran cantidad de ejemplos similares.

Notemos lo siguiente: el espacio  $l_2$  puede ser visto como el espacio de todas las funciones  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $\|f\|_2^2 := \sum_{n=1}^\infty |f(n)|^2 < \infty$ . Si ahora definimos la función  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  como  $\varphi(n) := n + 1$ , vemos que el operador  $B$  es el operador de composición  $C_\varphi : l_2 \rightarrow l_2$ .

Es fácil ver que  $C_\varphi^*(\{a_n\}_{n=1}^\infty) = \{0, a_1, a_2, \dots\}$  (el operador de *traslación unilateral a la derecha*). Hacemos notar la siguiente relación: si  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  es la base canónica de Schauder de  $l_2$  ( $e_n(m) := \delta_{nm}$ ), entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  los funcionales de evaluación  $\gamma_n : l_2 \rightarrow \mathbb{C}$  definidos como  $\gamma_n(f) := f(n)$  son lineales y continuos, de hecho

$$\gamma_n(f) = \langle f, e_n \rangle$$

con lo que podemos concluir que las funciones  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  “reproducen” (en el sentido que se precisará en la próxima sección) al espacio  $l_2$ .

Por otro lado, observemos también que:

$$C_\varphi^* e_n = e_{n+1} = e_{\varphi(n)}. \quad (1.1)$$

Ecuaciones similares a esta constituyen una herramienta fundamental en el estudio de la dinámica de operadores de composición en espacios de Hilbert funcionales.

Algunos resultados fundamentales concernientes a la teoría dinámica de operadores de composición reseñados en este artículo, los cuales serán acreditados debidamente, pueden ser consultados por el lector en [17, 19]. El aporte de los autores consiste en el tratamiento que se da a la teoría, especialmente la vinculación que se encuentra con la teoría de semigrupos de operadores; en particular, los teoremas 2.4, 5.2, 6.3 y 6.6.

## 2. Espacios de Hilbert Funcionales Analíticos

En esta sección nos ocuparemos del estudio de la dinámica de operadores de composición que actúan en una clase especial de espacios de Hilbert. Restringiremos nuestra atención mayormente al espacio de Hardy  $H^2$ . Otros ejemplos importantes de Espacios de Hilbert Funcionales Analíticos son el espacio de Bergman y el espacio de Dirichlet. El estudio de la ciclicidad en estos últimos, para símbolo fraccional lineal, puede ser hallado en [14].

**Definición 2.1.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert cuyos vectores son funciones analíticas sobre un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$ .  $\mathcal{H}$  se dice un espacio de Hilbert Funcional Analítico (HFA) si para cada  $a \in \Omega$ , el *funcional de evaluación*

$$f \mapsto f(a), \quad f \in \mathcal{H}$$

es continuo.

Si  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \subset H(\Omega)$  es un espacio HFA, entonces el Teorema de Representación de Riesz ([4]) implica que para todo  $w \in \Omega$  existe un único elemento  $K_w \in \mathcal{H}$  tal que

$$f(w) = \langle f, K_w \rangle.$$

A cada elemento de la familia  $\{K_w\}_{w \in \Omega}$  se le conoce con el nombre de *núcleo reproductivo* y aunque dicha familia no es una base ortogonal, es inmediato constatar que la misma genera linealmente al espacio  $\mathcal{H}$ .

El espacio de *Hardy*  $H^2(\mathbb{U})$  definido como:

$$H^2(\mathbb{U}) := \left\{ f \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{U}) : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

es un espacio de Hilbert con el producto interno heredado de manera natural de  $l_2$ .

El conjunto  $\{1, z, z^2, \dots\}$  es una base ortonormal de  $H^2(\mathbb{U})$ . Si  $z \in \mathbb{U}$  y  $f \in H^2(\mathbb{U})$  entonces, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \\ &\leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| \frac{1}{(1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}}}; \end{aligned}$$

estimación de la cual se deduce que los funcionales de evaluación  $f \mapsto f(w)$  son continuos para todo  $w \in \mathbb{U}$  y por lo tanto que  $H^2(\mathbb{U})$  es un espacio HFA. En



consecuencia podemos asegurar la presencia de núcleos reproductivos en dicho espacio que pueden ser exhibidos explícitamente (ver [1, 21]); a saber,

$$K_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \bar{w}^n = \frac{1}{1 - \bar{w}z}.$$

Estos son los llamados *núcleos de Cauchy* o *núcleos de Szegő*.

Un subespacio notable de  $H^2(\mathbb{U})$  es el espacio  $H_0^2(\mathbb{U}) := zH^2(\mathbb{U})$ , constituido por las funciones  $f \in H^2(\mathbb{U})$  tales que  $f(0) = 0$ . La familia  $\{z^n : n = 1, 2, 3, \dots\}$  es una base ortonormal de este espacio, el cual por ser un subespacio de  $H^2(\mathbb{U})$ , es un espacio HFA y por lo tanto posee núcleos reproductivos que en este caso vienen dados como:

$$K_w^0(z) = \frac{z}{1 - \bar{w}z}.$$

Es interesante resaltar el siguiente hecho: como observamos anteriormente, en los espacios de Hilbert funcionales, la familia de núcleos reproductivos genera el espacio, de hecho, en el caso del espacio  $l_2$ , los núcleos reproductivos son precisamente los vectores canónicos  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  y *todos* son necesarios para generar al espacio; es decir, si omitimos alguno de ellos, el espacio generado por los vectores restantes es un subespacio propio de  $l_2$ .

Este fenómeno no es cierto en espacios HFA; en efecto, si  $\mathcal{H}$  es un espacio de este tipo con las funciones definidas en un dominio  $\Omega$  y  $\{z_n\}$  es cualquier sucesión convergente en  $\Omega$ , entonces  $\text{CLS}\{K_{z_n}\} = \overline{\text{LS}\{K_{z_n}\}}^{\|\cdot\|}$  (la clausura de la cápsula lineal de  $\{K_{z_n}\}$ ) coincide con  $\mathcal{H}$ , para demostrar esto basta con observar que como consecuencia del teorema de unicidad para funciones analíticas ([12]),

$$\langle f, K_{z_n} \rangle = 0 \quad \forall n \quad \Leftrightarrow \quad f(z_n) = 0 \quad \forall n \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0.$$

**Definición 2.2.** Si  $t$  es un número real, definimos  $\log^+(t) = \log(t)$  si  $t \geq 1$  y  $\log^+(t) = 0$  si  $t < 1$ . La clase de Nevanlinna  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbb{U})$  es el conjunto de todas las funciones  $f \in H(\mathbb{U})$  tales que

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Denotaremos por  $H^{\infty} = H^{\infty}(\mathbb{U})$  al espacio de todas las funciones  $f \in H(\mathbb{U})$  tales que

$$\sup_{z \in \mathbb{U}} |f(z)| < \infty.$$

Es claro que tanto  $H^2(\mathbb{U})$  como  $H^{\infty}$  están contenidos en  $\mathcal{N}$ .

Por ajustarse mejor a nuestros propósitos, presentamos la siguiente versión del teorema de unicidad para funciones pertenecientes a la clase de Nevanlinna  $\mathcal{N}$  (ver Teor. 15.23 en [16]).

**Proposición 2.3.** *Sea  $f \in \mathcal{N}$ . Si  $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{U}$  es una sucesión de ceros tal que  $\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |\alpha_n| = \infty$ , entonces  $f \equiv 0$ .*

La relación  $\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |\alpha_n| < \infty$  aludida en la proposición anterior es conocida como *condición de Blaschke*.

**Teorema 2.4.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio HFA, tal que  $H^\infty \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{N}$ . Una familia numerable de núcleos reproductivos  $\{K_{\alpha_n}\}_{\alpha_n \in \mathbb{U}}$  genera linealmente a  $\mathcal{H}$  si, y sólo si, la sucesión  $\{\alpha_n\}$  no satisface la condición de Blaschke.*

*Demostración.* Supongamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |\alpha_n| < \infty$ , entonces existe un producto de Blaschke  $B$  cuyos ceros son precisamente la sucesión  $\{\alpha_n\}$ . Luego,  $\langle B, K_{\alpha_n} \rangle = 0$ , por lo tanto  $B \in \{K_{\alpha_n}\}^\perp$  y en consecuencia  $\text{CLS}\{K_{\alpha_n}\} \neq \mathcal{H}$ .

La suficiencia es consecuencia inmediata de la proposición anterior.  $\square$

Finalizamos esta sección observando un hecho bien conocido: en espacios HFA, el comportamiento dinámico observado en la relación (1.1) posee una versión continua bidimensional: si  $C_\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , entonces para todo  $w \in \Omega$ ,

$$C_\varphi^* K_w = K_{\varphi(w)}. \quad (2.1)$$

En efecto, basta observar que para todo  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle C_\varphi^* K_w, f \rangle = \langle K_w, f \circ \varphi \rangle = \overline{(f \circ \varphi)(w)} = \langle K_{\varphi(w)}, f \rangle.$$

### 3. Transformaciones Fraccionales Lineales

**Definición 3.1.** Una Transformación Fraccional Lineal (TFL), es un endomorfismo de  $\hat{\mathbb{C}}$  de la forma  $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , con  $ad - bc \neq 0$ .

Como consecuencia del Principio de Subordinación de Littlewood (ver [18, 21]), se tiene que si la aplicación  $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  es analítica, entonces el operador de composición  $C_\varphi$  definido en  $H^2(\mathbb{U})$  es acotado. Luego nos interesaremos únicamente en las TFL que envían el disco unitario en sí mismo; a esta familia la denotaremos por  $\text{TFL}(\mathbb{U})$ .

Nótese que si  $\varphi \in \text{TFL}(\mathbb{U})$  entonces, a menos que  $\varphi$  sea la identidad,  $\varphi$  posee a lo sumo dos puntos fijos. El comportamiento dinámico de operadores de composición, con símbolo fraccional lineal actuando en espacios HFA, está estrechamente relacionado con una clasificación universal de este tipo de símbolos basada en la localización de sus puntos fijos en  $\overline{\mathbb{U}}$ :

**Hiperbólica:**  $\varphi$  es conjugada conforme a una dilatación positiva; posee dos puntos fijos, ambos en  $\partial\mathbb{U}$ .

**Parabólica:**  $\varphi$  es conjugada conforme a una traslación; posee un punto fijo en  $\partial\mathbb{U}$  de multiplicidad dos.

**Elíptica:**  $\varphi$  es conjugada conforme a una rotación; posee dos puntos fijos en  $\hat{\mathbb{C}}$ , uno en  $\mathbb{U}$  y otro en  $\overline{\mathbb{U}}^c$ .

Por ejemplo, si  $\varphi$  es un automorfismo elíptico que fija el origen, entonces  $\varphi$  es una rotación de ángulo  $\alpha$  para cierto  $\alpha \in \mathbb{R}$ :  $\varphi(z) = e^{i\alpha z}$ ,  $z \in \mathbb{U}$ . En este caso  $C_\varphi$  es un operador unitario y en consecuencia posee una propiedad similar a la del operador de desplazamiento (1.1); esto es,

$$C_\varphi(K_w) = K_{\varphi^{-1}(w)} \quad \text{para todo } w \in \mathbb{U}.$$

Una de las razones que justifica el estudio de la dinámica, así como otras propiedades, de operadores de composición con símbolo fraccional lineal, la constituye el hecho de la existencia de modelos canónicos que permiten, via transformaciones fraccionales lineales, clasificar una amplia gama de funciones analíticas  $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  (ver [19]). En espacios de Hardy, tales modelos facilitan considerablemente el estudio de la dinámica de operadores de composición. El lector interesado, puede hallar una excelente exposición sobre este punto en la ya clásica monografía [19].

#### 4. Operadores de Composición Hipercíclicos en $H^2(\mathbb{U})$

A continuación presentamos algunos resultados relacionados con el comportamiento cíclico de operadores de composición; las pruebas de los mismos pueden ser halladas en [18]. En primer lugar, enunciaremos el siguiente teorema que limita la clase de símbolos que inducen comportamiento hipercíclico en los operadores de composición.

**Teorema 4.1.** *Si  $C_\varphi$  es hipercíclico en  $H^2(\mathbb{U})$ , entonces  $\varphi$  es univalente y no posee puntos fijos en  $\mathbb{U}$ .*

De acuerdo a este resultado, si un operador de composición con símbolo  $\varphi$  en  $TFL(\mathbb{U})$  es hipercíclico en  $H^2(\mathbb{U})$ , entonces  $\varphi$  es necesariamente parabólica o hiperbólica y sin puntos fijos en  $\mathbb{U}$ . De hecho, casi todo símbolo de éste tipo induce operadores de composición hipercíclicos en  $H^2(\mathbb{U})$  como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.** *Si  $\varphi \in TFL(\mathbb{U})$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{U}$ . Entonces:*

1.  $C_\varphi$  es hipercíclico en  $H^2(\mathbb{U})$  excepto en el caso en el cual  $\varphi$  es un no-automorfismo parabólico

2. Si  $\varphi$  es parabólico y no es automorfismo, entonces solamente las funciones constantes pueden ser puntos límites de las órbitas de  $C_\varphi$ .

Esta proposición justifica la afirmación hecha en la sección 1 referente al cambio súbito de comportamiento dinámico que experimentan los múltiplos del operador de retroceso unilateral.

La herramienta fundamental para obtener el teorema 4.2 la constituye el llamado Teorema de Kitai ([11]), obtenido por Carol Kitai (1982) en su tesis doctoral.

**Teorema 4.3 (Kitai).** *Sea  $X$  un espacio de Banach separable y  $T : X \rightarrow X$  un operador lineal y continuo tal que:*

- a) *Existe un subconjunto denso  $Y$  de  $X$  en el cual la sucesión de iterados  $\{T^n\}$  converge puntualmente a cero.*
- b) *Existe un subconjunto denso  $Z$  de  $X$  y una aplicación  $S : Z \rightarrow Z$  tal que:*
  - (i)  *$TS$  es la identidad en  $Z$ .*
  - (ii) *La sucesión de iterados  $\{S^n\}$  converge puntualmente en  $Z$  a cero.*

*Entonces  $T$  es hipercíclico.*

A pesar de que el descubrimiento de este resultado es relativamente reciente, la prueba del mismo se sigue de observar el hecho de que un operador  $T$  es hipercíclico en un espacio de Banach separable  $X$  si, y sólo si, para cada par de abiertos no vacíos  $U, V \subset X$  existe un número natural  $n$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Como una aplicación del teorema de Kitai, finalizamos la sección con el siguiente teorema.

**Teorema 4.4 (Rolewicz, [15]).** *Para todo escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $|\lambda| > 1$ , el operador  $\lambda B$  es hipercíclico en  $l_2$ , donde  $B$  es el operador de retroceso unilateral.*

*Demostración.* Aplicamos el teorema de Kitai al operador  $\lambda B$ .

En primer lugar, el espacio  $l_2$  es un espacio de Banach separable y el operador  $B$  es lineal y continuo. Así bastará encontrar a los espacios  $Y$  y  $Z$  y al operador  $S$ .

Obsérvese que el operador  $U = B^*$  es una inversa a la derecha del operador  $B$ , luego si definimos  $S := \lambda^{-1}U$  obtenemos una inversa a la derecha de  $\lambda B$  definida en todo el espacio  $l_2$ . Puesto que

$$\|S^n x\|_2 = |\lambda^{-n}| \|x\|_2 \xrightarrow{n} 0,$$

para todo  $x \in l_2$ , basta tomar  $Z = l_2$  para estar bajo la segunda hipótesis del teorema de Kitai.

Para verificar el cumplimiento de la primera hipótesis tomemos  $Y$  como el espacio de todas las sucesiones eventualmente nulas. Claramente  $Y$  es denso en  $l_2$  y  $\lambda^n B^n y = 0$  para  $n$  suficientemente grande. En consecuencia,  $\lambda B$  es hipercíclico.  $\square$

## 5. Operadores de Composición Cíclicos en $H^2(\mathbb{U})$

Pasamos ahora a estudiar el comportamiento cíclico de los operadores de composición en  $H^2(\mathbb{U})$  con símbolo  $\varphi$  en  $TFL(\mathbb{U})$ . Puesto que ciclicidad es una propiedad “más débil” que hiperciclicidad, es de esperarse que existan operadores de composición cíclicos en  $H^2(\mathbb{U})$  que no sean hipercíclicos. El teorema 4.2 nos dice que si  $\varphi$  no posee puntos fijos en  $\mathbb{U}$  y no es un no-automorfismo parabólico, entonces el operador de composición inducido es hipercíclico (y por lo tanto cíclico) en  $H^2(\mathbb{U})$ ; nos queda entonces preguntarnos ¿qué sucede en los dos casos restantes?; es decir si  $\varphi$  posee puntos fijos en  $\mathbb{U}$  o si es un no-automorfismo parabólico, ¿el operador de composición inducido será cíclico?. Esta pregunta es estudiada por P. S. Bourdon y J. H. Shapiro en su libro *Cyclic Phenomena for Composition Operators* ([19]); acá presentamos algunos de sus resultados. Queremos hacer notar que la herramienta fundamental usada es la presencia de núcleos reproductivos en el espacio  $H^2(\mathbb{U})$ , así como las observaciones hechas al final de la sección 2.

Si  $\varphi$  es elíptica, entonces hay dos posibilidades: que sea conjugada de una rotación por un múltiplo irracional de  $\pi$  o que lo sea de una rotación por un múltiplo racional de  $\pi$ ; en el segundo caso resulta obvio que la órbita de cualquier elemento  $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{U})$  bajo  $C_\psi$  donde  $\psi$  es de la forma  $\psi(z) = \exp(ir\pi)z$  con  $r$  racional, consiste en un conjunto finito y por lo tanto  $\{C_\varphi^n f : n = 0, 1, 2, \dots\}$  tendrá la misma propiedad. En [19] se demuestra que en el primer caso el operador  $C_\varphi$  es cíclico en  $H^2(\mathbb{U})$ .

En el caso  $\varphi$  parabólica, de acuerdo al teorema 4.2, se tiene que el operador  $C_\varphi$  es hipercíclico en  $H^2(\mathbb{U})$  a menos que  $\varphi$  sea un no-automorfismo; sin embargo, en [19] también se muestra que  $C_\varphi$  es cíclico en  $H^2(\mathbb{U})$ .

Los casos restantes son descritos en el siguiente resultado. Recordemos que cada  $\varphi \in TFL(\mathbb{U})$  no parabólica, distinta de la identidad, posee exactamente dos puntos fijos, y como consecuencia del Lema de Schwarz se tiene que ambos no pueden pertenecer a  $\mathbb{U}$ , esto nos deja solamente dos casos.

**Teorema 5.1.** *Sea  $\varphi \in TFL(\mathbb{U})$  no elíptica ni parabólica y distinta de la identidad con un puntos fijos  $z_1 \in \mathbb{U}$  y  $z_2 \in \mathbb{U}^c$ , entonces:*

- (i) *Si  $z_2 \in \partial\mathbb{U}$ , entonces  $C_\varphi$  no es cíclico.*
- (ii) *Si  $z_2 \in \overline{\mathbb{U}^c}$ , entonces  $C_\varphi$  es cíclico.*

En la siguiente tabla resumimos los resultados sobre ciclicidad e hiperciclicidad en  $H^2(\mathbb{U})$  de los operadores de la forma  $C_\varphi$  con  $\varphi \in \text{TFL}(\mathbb{U})$ .

$\varphi$	Característica	Dinámica de $C_\varphi$
Elíptica	$\cong e^{i\pi\alpha}z, \alpha \in \mathbb{I}$	cíclico y no hipercíclico
	$\cong e^{i\pi\alpha}z, \alpha \in \mathbb{Q}$	no cíclico
No Elíptica Ptos. fijos en $\mathbb{U}^c$	No un no-automorf. parab.	hipercíclico
	no-automorf. parab.	cíclico y no hipercíclico
No Elíptica Un pto. fijo en $\mathbb{U}$	Pto. fijo en $\mathbb{U}^c$	cíclico y no hipercíclico
	Pto. fijo en $\partial\mathbb{U}$	no cíclico

Cuadro 1: Comportamiento dinámico de  $C_\varphi$  en  $H^2(\mathbb{U})$  con  $\varphi \in \text{TFL}(\mathbb{U})$

Es importante el hecho de que en los espacios HFA se tiene la “propiedad generalizada de traslación”  $C_\varphi^*(K_w) = K_{\varphi(w)}$  para el adjunto de cualquier operador de composición definido en dicho espacio y para cualquier núcleo reproductivo del mismo; esto nos permite hacernos preguntas mas generales sobre la ciclicidad de los operadores adjuntos de operadores de composición. El siguiente es un resultado parcial que permite “decidir” cuándo un núcleo reproductivo de  $H^2(\mathbb{U})$  es un vector cíclico para el adjunto de un operador de composición.

**Teorema 5.2.** *Sea  $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  analítica y denotemos por  $\varphi_n$  a la  $n$ -iterada composición  $\varphi \circ \dots \circ \varphi$ .*

1. *Si existe  $x \in \mathbb{U}$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\varphi_n(x)|) = \infty$ , entonces  $C_\varphi^*$  es cíclico en  $H^2(\mathbb{U})$  y  $K_x$  es un vector cíclico para dicho operador.*
2. *Si en cambio  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\varphi_n(x)|) < \infty$  para todo  $x \in \mathbb{U}$ , entonces los núcleos reproductivos de  $H^2(\mathbb{U})$  no pueden ser vectores cíclicos para  $C_\varphi^*$ .*

*Demostración.* Para demostrar la primera parte obsérvese que si  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\varphi_n(x)|) = \infty$ , entonces la sucesión  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  no es una sucesión de Blaschke y por lo tanto si  $f \in H^2(\mathbb{U})$  es tal que  $\langle f, (C_\varphi^*)^n K_x \rangle = 0$  para todo entero positivo  $n$ ,

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (C_\varphi)^n f, K_x \rangle \\ &= \langle f \circ \varphi_n, K_x \rangle \\ &= f(\varphi_n(x)) \end{aligned}$$

para todo entero positivo  $n$ . Esto implica que  $f \equiv 0$ . Así  $K_x$  es un vector cíclico para  $C_\varphi^*$ .

Para demostrar la segunda parte del teorema basta tomar  $f \in H^2(\mathbb{U})$  como el producto de Blaschke correspondiente a la sucesión  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$  y observar que para todo entero positivo  $n$ ,

$$\langle f, (C_\varphi^*)^n K_x \rangle = f(\varphi_n(x)) = 0$$

pero  $f \neq 0$ . Esto nos permite concluir que  $K_x$  no es un vector cíclico para  $C_\varphi$  de donde se sigue el resultado.  $\square$

**Nota 5.3.** *En la primera parte del teorema anterior puede sustituirse  $H^2(\mathbb{U})$  por cualquier espacio HFA; sin embargo, para asegurar en la segunda parte la existencia de un vector ortogonal a la órbita de  $K_x$ , es necesario que el espacio contenga a todo producto de Blaschke correspondiente a las sucesiones  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ .*

*Otro punto importante es el siguiente: dada una combinación lineal finita de núcleos reproductivos, digamos  $f := \sum_{i=1}^m \alpha_i K_{w_i}$ , bajo las hipótesis de la segunda parte del resultado anterior, obtenemos que  $\{\varphi_n(w_i)\}_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m}$  es una sucesión de Blaschke y su correspondiente producto de Blaschke es un elemento ortogonal a la órbita de  $f$ . Así, las combinaciones lineales de los núcleos reproductivos en  $H^2(\mathbb{U})$  no pueden ser tampoco vectores cíclicos para  $C_\varphi^*$ .*

*Cabe entonces la siguiente pregunta: bajo las hipótesis de la segunda parte del teorema 5.2, ¿ningún elemento de  $H^2(\mathbb{U})$  puede ser cíclico para  $C_\varphi^*$ ?*

## 6. Dinámica de Semigrupos de Operadores de Composición

En esta sección revisaremos algunos aspectos relacionados a la dinámica de operadores de composición utilizando la teoría de semigrupos. Comenzaremos recordando la noción de semigrupo de operadores.

**Definición 6.1.** Sea  $X$  un espacio vectorial; una función  $T : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$  (el álgebra de los operadores lineales y acotados en  $X$ ), es llamada un semigrupo de operadores si satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $T(t)T(s) = T(t+s)$ , para todo  $s, t \in [0, \infty)$ .
- (ii)  $T(0) = I$  (el operador identidad en  $X$ ).

Denotaremos al operador  $T(t)$  como  $T_t$  y al semigrupo mediante  $(\{T_t\}_{t \geq 0}, X)$ . Si queda claro a partir del contexto que  $\{T_t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ , entonces nos referiremos al semigrupo simplemente como  $\{T_t\}_{t \geq 0}$ .

Recuérdese que los iterados un operador de composición  $C_\varphi^n$  son los operadores de composición  $C_{\varphi^n}$  inducidos por los iterados de  $\varphi$ . Si  $\varphi$  posee “iterados fraccionales”; es decir, si podemos definir iterados de la forma  $\varphi_t$  con  $t \in [0, \infty)$ , esto a su vez induce iterados fraccionales del operador  $C_\varphi$ ; esto es,

$$C_\varphi^t(f) := C_{\varphi_t}(f)$$

para cada  $t \geq 0$ . A continuación estudiaremos un importante semigrupo de operadores de composición inducido por iterados fraccionales.

En [7] J. Giménez encuentra interesantes propiedades de los operadores de composición con símbolo de la forma

$$\phi_a(z) := \frac{z}{az + (a+1)}, \quad a > 0.$$

es fácil ver que para cada  $n$ ,  $(\phi_a)_n \equiv \phi_{(1+a)^n - 1}$ , por lo que parece natural definir  $(\phi_a)_t := \phi_{(1+a)^t - 1}$  para  $t > 0$  y  $(\phi_a)_0$  como la aplicación identidad en  $\mathbb{U}$ . Veamos que  $\{(\phi_a)_t\}_{t \geq 0}$  induce un semigrupo de operadores de composición. En efecto, la propiedad (ii) se tiene directamente de la definición. Veamos que se satisface (i): para esto basta observar que

$$\begin{aligned} ((\phi_a)_t \circ (\phi_a)_s)(z) &= \phi_{(1+a)^t - 1}(\phi_{(1+a)^s - 1}(z)) \\ &= \phi_{(1+a)^t - 1} \left( \frac{z}{[(1+a)^s - 1]z + (1+a)^s} \right) \\ &= \frac{z}{[(1+a)^{t+s} - 1]z + (1+a)^{t+s}} \\ &= (\phi_a)_{t+s}. \end{aligned}$$

Luego estamos en presencia de una familia de iterados fraccionales de  $\phi_a$  que induce un semigrupo de operadores de composición dados por la forma:

$$C_{\phi_a}^t := C_{(\phi_a)_t} = C_{\phi_{(1+a)^t - 1}}.$$

Nótese que para cualquier  $a > 0$ , la aplicación fraccional lineal  $\phi_a$  posee al 0 y al -1 como puntos fijos, luego si tomamos  $\tau(z) := \frac{z}{z+1}$  entonces  $\tau^{-1}(z) = \frac{z}{1-z}$ , por lo tanto:



$$\begin{aligned}
(\tau \circ \phi_a \circ \tau^{-1})(z) &= \tau \left( \phi_a \left( \frac{z}{1-z} \right) \right) \\
&= \tau \left( \frac{z}{a+1-z} \right) \\
&= \frac{z}{a+1}
\end{aligned}$$

y como  $a > 0$  se tiene que  $\phi_a$  es hiperbólica; así, podemos concluir del teorema 5.1 que el operador  $C_{\phi_a}$  no puede ser cíclico en  $H^2(\mathbb{U})$ . Sin embargo, ahora contamos con “mas iterados” en los cuales apoyarnos y esto podría traducirse en un “mejor” comportamiento cíclico en algún sentido, esto motiva la siguiente definición.

**Definición 6.2.** Sea  $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \geq 0}$  un semigrupo de operadores actuado sobre un espacio de Banach  $X$ , diremos que  $\mathcal{T}$  es un *semigrupo cíclico* si existe un elemento  $x \in X$  tal que  $\text{CLS}\{T_t(x) : t > 0\} = X$ . Análogamente, diremos que  $\mathcal{T}$  es un *semigrupo hipercíclico* si existe  $x \in X$  tal que  $\overline{\{T_t(x) : t > 0\}} = X$ .

Obsérvese que si el operador  $T_{t_0}$  es cíclico para algún  $t_0 \geq 0$ , entonces el semigrupo  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  también lo es. Surge entonces de manera natural la pregunta: *si un semigrupo  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  es cíclico, entonces ¿cada operador  $T_t$  también lo es?* Esto es falso en general y la respuesta, como veremos, la obtenemos a partir del semigrupo de operadores de composición definido anteriormente.

Tanto  $\phi_a$  como cada  $(\phi_a)_t$  poseen como puntos fijos al 0 y al -1, por lo tanto el teorema 5.1 nos permite concluir que ningún operador  $C_{\phi_a}^t$  puede ser cíclico en  $H^2(\mathbb{U})$ ; de hecho, en la demostración de 5.1 se concluye que la cápsula lineal de cualquier órbita de  $C_{\phi_a}^t$  tiene codimensión infinita en  $H^2(\mathbb{U})$ . Luego los operadores  $C_{\phi_a}^t$  tampoco pueden ser cíclicos en  $H_0^2$  (ver sección 2); sin embargo, el semigrupo  $\{C_{\phi_a}^t\}_{t \geq 0}$  es cíclico en  $H_0^2$  como mostramos a continuación. Observemos, en primer lugar, que

$$\phi_a(z) = \frac{z}{az + 1 + a} = -\frac{1}{a} \frac{\left(-\frac{a}{1+a}\right)z}{1 + \left(\frac{a}{1+a}\right)z} = -\frac{1}{a} K_{\left(-\frac{a}{1+a}\right)}^0,$$

de modo que cada  $\phi_a \in H_0^2$ .

Fijemos  $s \geq 0$ . Mostraremos que  $(\phi_a)_s$  es un vector cíclico para el semigrupo  $\{C_{\phi_a}^t\}_{t \geq 0}$ . Supongamos que  $g \in H_0^2$  es ortogonal a  $\text{LS}\{C_{\phi_a}^t(\phi_a)_s : t \geq 0\}$ , entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \langle g, C_{\phi_a}^t(\phi_a)_s \rangle \\
&= \langle g, (\phi_a)_s \circ (\phi_a)_t \rangle \\
&= \langle g, (\phi_a)_{s+t} \rangle \\
&= \langle g, \phi_{(1+a)^{t+s}-1} \rangle \\
&= \left\langle g, \frac{-1}{(1+a)^{t+s}-1} K^0 \left( -\frac{(1+a)^{t+s}-1}{(1+a)^{t+s}} \right) \right\rangle \\
&= \frac{-1}{(1+a)^{t+s}-1} g \left( \frac{1}{(1+a)^{t+s}} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Luego  $g$  se anula a lo largo de la curva  $\left\{ \frac{1}{(1+a)^{t+s}} - 1 : t \geq 0 \right\}$  y por el teorema de unicidad para funciones analíticas se tiene que  $g \equiv 0$ . Así, cada  $(\phi_a)_s$ , con  $s \geq 0$  es un vector cíclico para el semigrupo  $\{C_{\phi_a}^t\}_{t \geq 0}$ .

En [6], Frankfurt introduce la noción de *cuasi-ciclicidad* de semigrupos de operadores, mas tarde utilizada por Giménez en [8]; veremos a continuación que las nociones de semigrupos cuasi-cíclicos y cíclicos realmente coinciden en espacios de Banach. Este hecho, hasta donde sabemos no había sido notado anteriormente.

Sea  $X$  es un espacio de Banach. Un semigrupo  $\mathcal{T} := \{T_t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$  se dice *cuasi-cíclico* si existe una familia de vectores  $\{x_t\}_{t > 0} \subset X$  tal que  $T_t x_s = x_{t+s}$ , para todo  $s, t > 0$  y  $\text{CLS}\{x_s : s > 0\} = X$ .

**Teorema 6.3.** *Un semigrupo de operadores actuando en un espacio de Banach es cuasi-cíclico si y solamente si es cíclico.*

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio de Banach y  $\mathcal{T} := \{T_t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$  un semigrupo. Si  $\mathcal{T}$  es cíclico entonces existe un vector  $x_0 \in X$  tal que  $\text{CLS}\{T_t x_0 : t \geq 0\} = X$ , basta entonces definir para cada  $s > 0$ ,  $x_s := T_s x_0$  y se tiene que  $\mathcal{T}$  es cuasi-cíclico.

Recíprocamente, supongamos que  $\mathcal{T}$  es cuasi-cíclico, entonces existe una familia  $\{x_s\}_{s > 0}$  con las propiedades descritas anteriormente; para cada entero positivo  $n$ , definamos

$$A_n := \text{CLS} \left\{ x_s : s > \frac{1}{n} \right\},$$

entonces para cada  $n$ ,  $A_n$  es un subespacio cerrado de  $X$  y  $A_n \subset A_{n+1}$ , luego el teorema de categoría de Baire nos permite asegurar la existencia de un entero positivo  $n_0$  tal que  $A_{n_0}$  tiene interior no vacío y puesto que  $A_{n_0}$  es un subespacio vectorial de  $X$ , concluimos que  $A_{n_0} = X$ . Así, si tomamos  $x_0 := x_{\frac{1}{n_0}}$ , entonces

$$T_s x_0 = T_s x_{\frac{1}{n_0}} = x_{\frac{1}{n_0} + s} \text{ y por lo tanto } \text{CLS}\{T_s x_0 : s > 0\} = \text{CLS} \left\{ x_s : s > \frac{1}{n_0} \right\} = A_{n_0} = X.$$

□

Basados en [7, Teorema 3.5], ahora en el marco de espacios HFA, presentamos la siguiente proposición.

**Teorema 6.4.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio HFA y  $\Phi := \{\phi_t : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U} : t \geq 0\}$  una familia de iterados fraccionales univalentes tales que  $\phi_t$  no posean puntos fijos en  $\mathbb{U}$  si  $t \neq 0$ . Entonces el adjunto,  $\{C_{\phi_t}^*\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , del semigrupo de operadores de composición inducido por  $\Phi$  es cíclico.*

*Demostración.* Tomemos cualquier  $w \in \mathbb{U}$  y sea  $K_w \in \mathcal{H}$  el correspondiente núcleo reproductivo. Las hipótesis sobre  $\Phi$  garantizan que la aplicación  $t \mapsto \phi_t(w)$  define una curva contenida en  $\mathbb{U}$ ; de hecho, esta curva es simple ya que si  $t \geq s$  y  $\phi_t(w) = \phi_s(w)$ , entonces  $(\phi_s \circ \phi_{t-s})(w) = \phi_t(w) = \phi_s(w)$ , lo que implica (ya que  $\phi_s$  es univalente) que  $\phi_{t-s}(w) = w$ ; pero si  $t > s$  entonces  $\phi_{t+s}$  no fija puntos en  $\mathbb{U}$ , así  $t = s$ .

Ahora bien, si  $g \in \mathcal{H}$  entonces del teorema de unicidad para funciones analíticas se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle g, C_{\phi_t}^* K_w \rangle = 0 \quad \forall t \geq 0 &\Leftrightarrow \langle g, K_{\phi_t(w)} \rangle = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow g(\phi_t(w)) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow g \equiv 0. \end{aligned}$$

□

**Nota 6.5.** *Si  $\{t_k\}_{k=1}^\infty \subset [0, \infty)$  es una sucesión convergente y no eventualmente constante, entonces utilizando de nuevo el teorema de unicidad para funciones analíticas y un razonamiento similar al anterior, concluimos que  $\text{LS}\{C_{\phi_{t_k}} K_w : k > 0\} = \mathcal{H}$  para cualquier  $w \in \mathbb{U}$ .*

*Este resultado es una especie de generalización del teorema 5.2 en el siguiente sentido. Bajo las condiciones del teorema anterior:  $\langle g, C_{\phi_{t_k}} K_w \rangle = 0$  para todo  $k$  si, y sólo si,  $g \equiv 0$ ; es decir,  $g(\phi_{t_k}(w)) = 0$  para todo  $k$  si, y sólo si,  $g \equiv 0$ . Esto es, todos los núcleos reproductivos de  $H^2(\mathbb{U})$  son “vectores cíclicos” para la familia  $\{C_{\phi_{t_k}}\}_{k=1}^\infty$ .*

En lo que sigue plantearemos algunas preguntas relacionadas con el comportamiento hipercíclico de semigrupos de operadores de composición. Es fácil ver que si  $X$  es un espacio de Banach separable, entonces  $\{T_t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$  es un semigrupo hipercíclico de operadores si para todo par de abiertos  $U$  y  $V$  en  $X$  existe  $t > 0$  tal que  $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$ . Esto nos permite establecer un criterio muy similar al que proporciona el teorema 4.3, esta vez para parámetro continuo, en relación a la hiperciclicidad de un semigrupo de operadores de composición. La demostración del mismo, se sigue directamente de la demostración del teorema de Kitai (ver [18]).

**Teorema 6.6.** *Dado un espacio de Banach separable  $X$  y un semigrupo de operadores  $\mathcal{T} := \{T_t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$  tales que:*

- (i) Existe un subespacio  $Y$  denso en  $X$  tal que  $\|T_t y\| \xrightarrow[t]{} 0$  para todo  $y \in Y$ .
- (ii) Existe un subespacio  $Z$  denso en  $X$  y una familia (no necesariamente un semigrupo)  $\{S_t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(Z)$  tal que para cada  $t \geq 0$   $T_t S_t$  es la identidad en  $Z$  y  $\|S_t z\| \xrightarrow[t]{} 0$  para todo  $z \in Z$ .

Entonces el semigrupo  $\mathcal{T}$  es hipercíclico.

Es claro que si un operador  $\{T_{t_0}\}$  es hipercíclico, entonces el semigrupo  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  también lo es; el recíproco es un problema abierto propuesto en [20]. En dicho artículo se prueba que todo espacio de Banach complejo, separable e infinito dimensional admite un semigrupo hipercíclico.

Otro problema abierto es el siguiente (ver [18, 13]): ¿Satisface todo operador hipercíclico el criterio de hiperciclicidad (Teorema 4.3)? En virtud del Teorema 6.6 planteamos la siguiente pregunta para el caso de semigrupos: ¿Satisface todo semigrupo hipercíclico el criterio de hiperciclicidad?

Hacemos notar que si un semigrupo de operadores  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  satisface el criterio de hiperciclicidad dado en el Teorema 6.6, entonces cada operador  $T_t$  satisface el criterio de hiperciclicidad (4.3). Por lo tanto una respuesta afirmativa a esta segunda pregunta responde a su vez a la primera. Cabe también preguntarse: Si cada operador  $T_t$  satisface el criterio de hiperciclicidad (4.3) ¿Satisface el semigrupo  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  el criterio de hiperciclicidad (6.6)?

## 7. Algunos Comentarios Finales

**Definición 7.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $T : X \rightarrow X$  una función. Se dice que  $T$  depende sensiblemente de las condiciones iniciales si existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  y todo  $x \in X$  existe un punto  $y \in B(x, \varepsilon)$  tal que  $d(T^n x, T^n y) > \delta$  para algún entero no negativo  $n$ .

**Definición 7.2 (Devaney).** Con las hipótesis de la definición anterior,  $T$  se dice una aplicación caótica si satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo par de abiertos  $U$  y  $V$  en  $X$  existe un entero no negativo  $n$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$
2.  $T$  depende sensiblemente de las condiciones iniciales.
3. Existe un subconjunto denso de puntos con órbita (respecto a  $T$ ) finita.

En [18] encontramos una demostración del siguiente hecho: Si  $X$  es un espacio de Banach y  $T : X \rightarrow X$  es una aplicación continua, hipercíclica y tal que existe un subconjunto denso de  $X$  de puntos cuya órbita bajo  $T$  es finita (puntos periódicos), entonces  $T$  es caótica. Vemos así que la teoría del caos

está íntimamente relacionada con la noción de hiperciclicidad. Para mayor información sobre las relaciones del caos con los temas tratados en este artículo, recomendamos [5, 10, 18].

En cuanto a ciclicidad, en el libro de Bourdon y Shapiro ([19]) se resuelve totalmente el problema de identificar a los símbolos analíticos que inducen operadores de composición en el espacio  $H^2(\mathbb{U})$  y en [14] se hace lo correspondiente para operadores de composición con símbolo fraccional lineal actuando en espacios tipo Dirichlet.

Finalmente, para un excelente resumen acerca del trabajo hecho en los últimos años sobre hiperciclicidad de operadores lineales, recomendamos [9].

#### AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen a los árbitros de la primera versión sus útiles y minuciosas observaciones.

#### Referencias

- [1] N. Aronszajn, *Theory of Reproducing Kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.
- [2] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théoreme elementaire sur les fonctions entieres*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.
- [3] B. Bollobás, *Linear Analysis: An Introductory Course*, Cambridge University Press, 1990.
- [4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotical Dynamical Systems*, second ed., Addison-Wesley, 1989.
- [6] R. Frankfurt, *Quasicyclic Subnormal Semigroups*, Can. J. Math. **XXIX** (1977), 1230–1246.
- [7] J. Giménez, *Joint Hyponormality of Composition Operators with Linear Fractional Symbols*, Integr. equ. oper. theory **43** (2002), 385–396.
- [8] ———, *Subnormal Semigroups of Composition Operators*, Por aparecer en Proc. Amer. Math. Soc., 2005.
- [9] K. G. Grosse-Erdmann, *Universal Families and Hipercyclic Operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1999), 345–381.

- [10] A. Peris J. Bonét, F. Martínez-Giménez, *Linear Chaos on Fréchet Spaces*, 2001.
- [11] C. Kitai, *Invariant Closed Sets for Linear Operators*, Ph.D. thesis, Univ. of Toronto, 1982.
- [12] R. E. Greene & S. G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, John Wiley & Sons, INC., 1997.
- [13] J. Bés & A. Peris, *Hereditarily Hipercyclic Operators*, J. Functional Analysis **167** (1999), 94–112.
- [14] E. Gallardo-Gutiérrez. & A. Montes Rodríguez, *The Role of the Spectrum in the Cyclic Behavior of the Composition Operators*, Memoirs of the AMS,, 2004.
- [15] S. Rolewicz, *On Orbits of Elements*, Studia Math. **33** (1969), 17–22.
- [16] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*, Editorial Alhambra, S.A., 1973.
- [17] J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [18] ———, *Notes on the Dynamics of Linear Operators*, Notas no publicadas. Disponibles en <http://www.math.msu.edu/~shapiro>, 2001.
- [19] P. S. Bourdon & J. H. Shapiro, *Cyclic Phenomena for Composition Operators*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1997.
- [20] A. Martín T. Bermúdez, A. Bonilla, *On the Existence of Chaotic and Hipercyclic Semigroups on Banach Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2435–2441.
- [21] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1990.

GERARDO R. CHACÓN  
DPTO. DE MEDICIÓN Y EVALUACIÓN ULA.  
grchacon@ula.ve

JOSÉ GIMÉNEZ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS ULA.  
jgimenez@ula.ve

EDIXON ROJAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS ULA.  
edixonr@ula.ve

# Sobre la homología de algunos complejos especiales

Rafael Sánchez Lamonedá & Imtiaz Manji

## Resumen

En dos artículos publicados en el journal of Algebra, [7] y [8], I. Manji y R. Sánchez dieron un criterio de acilicidad para los complejos de Schur y asociaron a este un algoritmo para el estudio de las homologías de estos complejos y similares. Utilizando esos resultados, en este artículo estudiamos las homologías de dos complejos especiales, el complejo de Cayley-Koszul y el complejo  $S_k\phi$ .

## 1 Introducción

Sea  $R_0$  un anillo noetheriano. Dada una forma bilineal

$$A = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j \in R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_g],$$

le podemos asociar un complejo llamado de *Cayley-Koszul* y al cual denotaremos por  $\mathcal{K}_A$ . El interés en estos complejos surge en los trabajos sobre *hiperdeterminantes* que aparecen en [6] y en [11]. Cuando  $R_0$  es un cuerpo, el estudio de su homología ha sido tratada previamente por Boffi [3] y Bruns y Vetter [5]. El principal resultado de Boffi es el cálculo de la homología de  $\mathcal{K}_A$  cuando  $f = g$  y  $(a_{ij})$  es una matriz inversible sobre el cuerpo  $R_0$  de característica cero. Posteriormente Bruns y Vetter demostraron que la suposición sobre la característica es superflua. En este trabajo presentamos un estudio de las homologías de estos complejos cuando están definidos sobre un anillo noetheriano en vez de un cuerpo. Además complementamos con un estudio de las homologías de  $S_k\phi$  donde  $\phi : G \rightarrow F$  es un morfismo entre módulos libres de rangos finitos con  $\text{rang } G \leq \text{rang } F$ . En el caso de  $\mathcal{K}_A$ , calculamos su homología cuando  $f = g$  y la profundidad de los ideales de menores  $t \times t$  de la matriz  $(a_{ij})$  es al menos  $2(f - t) + 1$  para cada  $t$ . Esto generaliza el resultado de Boffi y además nos permite obtener otros resultados interesantes en el caso genérico. En relación al complejo  $S_k\phi$ , calculamos una cota superior para los grados de sus homologías no nulas. Ambos estudios son ejemplos interesantes de aplicación de las técnicas explicadas y publicadas en [7] y [8].

## 2 El Complejo de Cayley-Koszul

Sea entonces  $R_0$  un anillo noetheriano y consideremos dos  $R_0$ -módulos libres  $F_0$  y  $G_0$  de rangos  $f$  y  $g$ , respectivamente. Fijemos bases  $\{f_i\}$  y  $\{g_i\}$  de  $F_0$  y  $G_0$  respectivamente, y  $R = S(F_0^* \oplus G_0^*)$ . Tenemos entonces la identificación de  $R$  con el anillo de polinomios  $R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_g]$ . Las variables  $x_i$  y  $y_j$  las identificamos con los duales de los elementos de las bases elegidas previamente para  $F_0$  y  $G_0$ , respectivamente.

Denotemos por  $A$  la forma bilineal  $A = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j \in R$ , y sean  $F$  y  $G$  los  $R$ -módulos  $F_0 \otimes R$  y  $G_0 \otimes R$ , respectivamente. Definamos ahora los  $R$ -homomorfismos

$$\psi: R \rightarrow F \oplus G \text{ y } \phi: F \oplus G \rightarrow R$$

por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \sum_i x_i(f_i \otimes 1) + \sum_j y_j(g_j \otimes 1) \\ \phi(f_i \otimes 1) &= \frac{\partial A}{\partial x_i} \quad ; \quad \phi(g_j \otimes 1) = -\frac{\partial A}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Claramente la composición  $\phi \circ \psi$  es igual a cero y entonces  $\phi$  induce un morfismo  $\bar{\phi}: M \rightarrow R$ , donde  $M$  es el *coker* de  $\psi$ .

**Definición 1.**  $\mathcal{K}_A$  es el complejo de Koszul

$$\mathcal{K}(\wedge\phi) : \dots \rightarrow \wedge^i M \rightarrow \wedge^{i-1} M \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^2 M \rightarrow M \xrightarrow{\bar{\phi}} R \rightarrow 0.$$

El complejo  $\mathcal{K}_A$  es un cociente del complejo de Koszul

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\phi) : 0 \rightarrow \wedge^{f+g}(F \oplus G) \rightarrow \wedge^{f+g-1}(F \oplus G) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \wedge^2(F \oplus G) \rightarrow \wedge^1(F \oplus G) \xrightarrow{\bar{\phi}} R \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Con mayor precisión, existe una sucesión exacta

$$\mathcal{K}(\phi)[-1] \rightarrow \mathcal{K}(\phi) \rightarrow \mathcal{K}_A \rightarrow 0,$$

donde la primera aplicación es la multiplicación por  $\psi(1) \in \wedge^1(F \oplus G)$ . Consideremos ahora la potencia simétrica  $S_j(\phi_0)$ , donde el morfismo  $\phi_0: F_0 \oplus G_0 \rightarrow F_0^* \oplus G_0^*$  viene dado en términos de las bases que elegimos al comienzo por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & (-a_{ij}) \\ (a_{ij}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Explícitamente  $S_j(\phi_0)$  es el sumando homogéneo,

$$\dots \rightarrow \wedge^2(F_0 \oplus G_0) \otimes S_{j-2}(F_0^* \oplus G_0^*) \rightarrow$$



$$\rightarrow \wedge^1(F_0 \oplus G_0) \otimes S_{j-1}(F_0^* \oplus G_0^*) \rightarrow S_j(F_0^* \oplus G_0^*) \rightarrow 0$$

de  $\mathcal{K}(\phi)$ .

Es fácil ver que la aplicación

$$\mathcal{K}(\phi)[-1] \longrightarrow \mathcal{K}(\phi)$$

se restringe a un morfismo

$$S_{j-2}(\phi_0)[-1] \longrightarrow S_j(\phi_0),$$

más aún, ella es una suma directa de estos morfismos. En consecuencia  $\mathcal{K}_A$  es una suma directa de los complejos

$$\mathcal{K}_A^j := \text{coker}(S_{j-2}(\phi_0)[-1] \longrightarrow S_j(\phi_0)).$$

En nuestro artículo [8] Cor.2.3 demostramos una proposición que luego tenía una interesante interpretación por medio de un algoritmo o juego combinatorio. Este algoritmo nos permitió obtener información sobre las homología de los complejos de Schur. Como será de importancia principal en nuestro presente trabajo, lo enunciamos a continuación como la

**Proposición 2.** *Sea  $\varphi : G \longrightarrow F$  un homomorfismo de  $R$ -módulos libres, con  $n = \text{rang } G \leq \text{rang } F = m$  y  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  una partición. Entonces*

- (i)  $H_*(L_\lambda(\varphi)) = 0$  si  $*$   $>$   $\Delta_1 + \dots + \Delta_n$ .
- (ii)  $\text{Supp}(H_*(L_\lambda(\varphi))) \subseteq V(I_n(\varphi))$  si  $*$   $>$   $0$ .
- (iii) Para cada  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $\text{Supp}(H_*(L_\lambda(\varphi))) \subseteq V(I_{n-j}(\varphi))$ , cuando  $*$   $>$   $\Delta_1 + \dots + \Delta_j$ .  $\square$

Ahora estamos listos para prestar nuestra atención a los grupos de homología  $H_*(\mathcal{K}_A)$ . Para ello introduciremos un complejo doble de primer cuadrante  $\mathbf{D}^j = \mathbf{D}_A^j$ , el cual tiene la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{3} & \wedge^3 H_0 \otimes S_{j-3} H_0^* & \leftarrow & \wedge^2 H_0 \otimes S_{j-4} H_0^* & \leftarrow & \wedge^1 H_0 \otimes S_{j-5} H_0^* & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathbf{2} & \wedge^2 H_0 \otimes S_{j-2} H_0^* & \leftarrow & \wedge^1 H_0 \otimes S_{j-3} H_0^* & \leftarrow & S_{j-4} H_0^* & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 \mathbf{1} & \wedge^1 H_0 \otimes S_{j-1} H_0^* & \leftarrow & S_{j-2} H_0^* & \leftarrow & \dots & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 \mathbf{0} & S_j H_0^* & & & & & \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & 
 \end{array}$$

Donde  $H_0 = F_0 \oplus G_0$ . Las columnas están indicadas de izquierda a derecha, comenzando a la izquierda con la columna cero. Las filas están indicadas de abajo a arriba, comenzando con la fila cero. El complejo en la  $i$ -ésima columna de  $\mathbf{D}^j$  es  $S_{j-2i}(\phi)$  trasladado  $i$  lugares hacia arriba, y los morfismos horizontales son las multiplicaciones por  $\psi(1)$ . Nuestro primer resultado nos da información sobre las homología del complejo total  $\mathbf{Tot} \mathbf{D}^j$ .

**Lema 3.** 1. Si  $j \leq f + g$ , entonces

$$H_*(\mathbf{Tot} \mathbf{D}^j) \cong H_*(\mathcal{K}_A^j).$$

2. Si  $j > f + g$ , entonces

$$H_*(\mathbf{Tot} \mathbf{D}^j) \cong \begin{cases} R_0, & \text{si } j \equiv f + g \pmod{2} \text{ y } * = j, \\ H_*(\mathcal{K}_A^j) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

*Demostración.* Las filas de  $\mathbf{D}^j$  están compuestas de las ramas homogéneas y truncadas del complejo

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\psi} \wedge^1(F \oplus G) \rightarrow \cdots \rightarrow \wedge^i(F \oplus G) \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots$$

dual del complejo de Koszul (a veces se define este como el complejo de Koszul) el cual es exacto, con la excepción del término

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \wedge^{f+g}(F_0 \oplus G_0) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots .$$

Este término aparece en  $\mathbf{D}^j$  si y sólo si  $j \geq f + g$  y  $j \equiv f + g \pmod{2}$ . En este caso el término  $\wedge^{f+g}(F_0 \oplus G_0) (\cong R_0)$  aparece en la columna  $\frac{1}{2}(j - f - g)$  y tiene grado total  $j$ . El resultado sigue ahora al considerar los  $E_2$ -términos de la sucesión espectral estándar asociada al complejo doble  $\mathbf{D}^j$ .  $\square$

**Lema 4.** Existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_n(S_j(\phi_0)) \rightarrow H_n(\mathbf{Tot} \mathbf{D}^j) \rightarrow H_{n-2}(\mathbf{Tot} \mathbf{D}^{j-2}) \rightarrow H_{n-1}(S_j(\phi_0)) \rightarrow \cdots$$

para cada  $j$ .

*Demostración.* Solo hay que aplicar la sucesión de homología asociada a la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow S_j(\phi_0) \rightarrow \mathbf{Tot} \mathbf{D}^j \rightarrow \mathbf{Tot} \mathbf{D}^{j-2}[-2] \rightarrow 0 \quad \square$$

Ahora usaremos estos lemas para estudiar la homología de  $H_*(\mathcal{K}_A)$ .

Fijemos una forma bilineal

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \in R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_g],$$

y un entero positivo  $j$ . Denotemos por  $I_t(A)$  al ideal generado por los menores  $t \times t$  de la matriz  $(a_{ij})$ , y sea  $J_t(A)$  el ideal

$$\sum_{k+l=t} I_k(A)I_l(A).$$

A la forma  $A$  le asociamos una sucesión binaria  $\mathbf{r}^j(A) = (r_1^j(A), \dots, r_j^j(A))$ , definida de la siguiente manera: Comenzamos con

$$r_1^j(A) = \begin{cases} 1, & \text{si grado } J_1(A) > 0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

luego continuamos inductivamente

$$r_t^j(A) = \begin{cases} 1, & \text{si grado } J_t(A) > r_1^j(A) + \dots + r_{t-1}^j(A), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

para  $t = 2, \dots, j$ .

Es importante destacar que el ideal  $J_t(A)$  es simplemente el ideal generado por los menores  $t \times t$  de  $\phi_0$ . En particular si  $j > f + g$ , entonces  $r_t^j(A) = 1$  para  $t = f + g + 1, \dots, j$ .

**Lema 5.** *Sea  $N$  el número de ceros que hay en una sucesión binaria  $\mathbf{r}^j(A)$ . Sea  $t(i)$  el índice correspondiente al  $i$ -ésimo cero en  $\mathbf{r}^j(A)$ . Entonces*

1.  $H_*(S_j(\phi_0)) = 0$  para  $* > N$ .
2.  $\text{Supp } H_*(S_j(\phi_0)) \subseteq \mathbf{V}(J_{f+g-t(i)+1}(A))$  para  $* \geq i$ .

*Demostración.* Simplemente considere esto como un caso especial de la Proposición 2, aplicada al complejo de Schur  $L_\lambda(\phi_0) (= S_j(\phi_0))$ , cuando  $\lambda = (1^j, 0, \dots, 0)$ , donde  $1^j$  significa que el 1 se repite  $j$  veces. Ahora si, podemos establecer los teoremas que nos indican el comportamiento de las homologías de los complejos Cayley-Koszul.

**Teorema 6.** *Sea  $N$  el número de ceros que hay en una sucesión binaria  $\mathbf{r}^j(A)$ .*

1. *Si  $j > f + g$  o  $j$  no es congruente con  $f + g \pmod{2}$ , entonces*

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) = 0$$

*para  $* \geq N$ .*

2. *Si  $j \leq f + g$  y  $j \equiv f + g \pmod{2}$ , entonces*

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } * \geq N \text{ y } * \neq j, \\ R_0, & \text{si } * = j \end{cases}$$

*Demostración* Es suficiente considerar  $N \leq * \leq f + g$ . Sabemos, por el lema 4, que  $H_*(\mathcal{K}_A^j) \cong H_*(\text{Tot}\mathbf{D}^j)$ . Más aún

$$H_n(\text{Tot}\mathbf{D}^j) \cong H_{n+2}(\text{Tot}\mathbf{D}^{j+2})$$

si  $n \geq N$  (lemas 4 y 5). Iterando esto obtenemos, para cada  $t \geq 0$ :

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) \cong H_{*+2t}(\text{Tot}\mathbf{D}^{j+2t}).$$

Tenemos entonces, por el lema 3.19, que si  $j > f + g$ , o  $j \not\equiv f + g \pmod{2}$ , o  $* \neq j$ :

$$H_{*+2t}(\text{Tot}\mathbf{D}^{j+2t}) \cong H_{*+2t}(\mathcal{K}_A^{j+2t})$$

pero el término  $H_{*+2t}(\mathcal{K}_A^{j+2t})$  es cero para  $t$  suficientemente grande. Esto demuestra (1) y parte de (2). Supongamos ahora  $* = j$ , entonces por hipótesis  $* + 2t = j + 2t$  y  $j + 2t \equiv f + g \pmod{2}$ . Entonces para  $t$  suficientemente grande,

$$H_{*+2t}(\text{Tot}\mathbf{D}^{j+2t}) \cong R_0 \quad \square$$

**Teorema 7.** Sean  $j$  un entero positivo y  $N$  el número de ceros que hay en una sucesión binaria  $\mathbf{r}^j(A)$ . Sea  $t(i)$  el índice correspondiente al  $i$ -ésimo cero de  $\mathbf{r}^j(A)$ . Entonces

$$\text{Supp } H_{i-1}(\mathcal{K}_A^j) \subseteq \mathbf{V}(J_{f+g-t(i)+1}(A)).$$

*Demostración:* Sea  $\mathfrak{p}$  un ideal primo de  $R_0$  que no contiene a  $J_{f+g-t(i)+1}(A)$ . Entonces la localización  $H_n(S_j(\phi_0))_{\mathfrak{p}} = 0$  para  $n \geq i$ . Localizando la sucesión exacta del lema 4, tenemos que

$$H_n(\text{Tot } \mathbf{D}^j)_{\mathfrak{p}} \cong H_{n+2}(\text{Tot } \mathbf{D}^{j+2})_{\mathfrak{p}}$$

para  $n \geq i - 1$ . Por lo tanto, para cada  $t \geq 0$ , vale

$$H_n(\text{Tot } \mathbf{D}^j)_{\mathfrak{p}} \cong H_{n+2t}(\text{Tot } \mathbf{D}^{j+2t})_{\mathfrak{p}}$$

si  $n \geq i - 1$ . Ahora bien, si  $n \leq f + g$ , entonces

$$H_n(\text{Tot } \mathbf{D}^j)_{\mathfrak{p}} \cong H_n(\mathcal{K}_A^j)_{\mathfrak{p}}.$$

Tomando  $n = i - 1 (\leq f + g)$ , obtenemos

$$H_{i-1}(\mathcal{K}_A^j)_{\mathfrak{p}} \cong H_{i-1+2t}(\text{Tot } \mathbf{D}^{j+2t})_{\mathfrak{p}} \cong H_{i-1+2t}(\mathcal{K}_A^j + 2t)_{\mathfrak{p}}$$

pero el último término es cero para  $t$  suficientemente grande  $\square$

Analícemos ahora el caso especial en el cual  $f = g$ .

¿Cómo es la homología de  $\mathcal{K}_A$  cuando  $f = g$ ?

Dada una forma bilineal  $A$  como antes, sea  $j$  es un entero positivo, definimos

$$\lambda = \begin{cases} (\underbrace{2, \dots, 2}_{j/2}, 0, \dots) & \text{si } j \text{ es par} \\ (\underbrace{2, \dots, 2}_{(j-1)/2}, 1, 0, \dots) & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases}$$

A continuación analizaremos los resultados anteriores desde un punto de vista algorítmico, o dicho de otra manera, con un enfoque combinatorio. El algoritmo consiste en marcar sucesivamente las casillas de la representación gráfica de la partición  $\lambda$ , en función de la información que nos da el grado de los ideales de menores  $I_j(A)$  y se procede de la siguiente manera:

**Algoritmo**

1. Al inicio no hay casillas marcadas.
2. Para  $i = 1, \dots, \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$  proceda así: Si la cantidad de casillas marcadas desde la primera hasta la  $i$ -ésima fila es estrictamente menor que grado  $I_{f-i+1}(A)$ , marque una casilla (en la fila  $i$ ). Repita el procedimiento tantas veces sea posible.
3. Ultimo paso: Definimos  $\widehat{\lambda}_i$  cantidad de casillas **no** marcadas en la  $i$ -ésima fila de la partición  $\lambda$ . Entonces, concluimos:

- a) Si  $j \geq 2f$  o  $j$  es impar, tenemos

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) = 0 \text{ si } * \geq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 + \dots$$

- b) Si  $j \leq 2f$  y  $j$  es par, tenemos

$$H_*(\mathcal{K}_A^j) = \begin{cases} R_0 & \text{si } * = j \\ 0 & \text{si } * \geq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 + \dots \text{ y } * \neq j \end{cases}$$

Si observamos que:

$$I_t(A)^2 \subseteq J_{2t}(A) \subseteq J_{2t-1}(A) \subseteq I_t(A)$$

este algoritmo nos permite obtener una interpretación interesante de los teoremas anteriores.

**Teorema 8.** *Sea  $R$  el anillo de polinomios  $R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_f]$ , sea  $A = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j \in R$ . Si y grado  $I_t(A) \geq 2(f-t) + 1$  para cada  $t$ , entonces*

$$H_*(\mathcal{K}_A) = \begin{cases} R_0 & \text{si } * = 2, 4, \dots, 2f \\ R/J_A & \text{si } * = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $R/J_A$  es el ideal generado por las derivadas parciales de  $A$ .

Ilustraremos el teorema y el algoritmo con un par de ejemplos:

1. Sea  $S$  un anillo noetheriano,  $f \geq 1$ , y consideremos  $f^2$  indeterminadas independientes,  $Z_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq f$ . Denotemos por  $R_0$  el anillo de polinomios  $S[Z_{ij}]$ . Sea  $A = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j \in R_0[x_1, \dots, x_f, y_1, \dots, y_f]$ , nuestra forma bilineal en  $R_0$ , donde  $a_{ij} = Z_{ij}$ . Observemos que de esta forma la matriz  $(a_{ij})$  es genérica sobre  $R_0$ . En este caso tenemos

$$\text{grad } I_t(A) = (f - t + 1)^2 \geq 2(f - t) + 1.$$

Entonces se satisfacen las hipótesis del teorema anterior y podemos concluir que:

$$H_*(\mathcal{K}_A) = \begin{cases} R_0 & \text{si } * = 2, 4, \dots, 2f \\ R/J_A & \text{si } * = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Sean  $S$  un anillo noetheriano,  $n \geq 3$  un entero impar y  $R_0 = S[Z_{ij}]$ , con  $1 \leq i < j \leq n$ , el anillo de polinomios en  $\frac{1}{2}n(n-1)$  indeterminadas. Consideremos  $A = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$  la forma bilineal sobre  $R_0$ , donde  $(a_{ij})$  es la matriz genérica alternante:

$$a_{ji} = \begin{cases} Z_{ij} & \text{si } i < j \\ -Z_{ji} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Entonces  $I_f(A) = 0$  y

$$\text{grad } I_t(A) = \text{grad } I_{t-1}(A) = \binom{f-t+2}{2}.$$

para cada entero par  $t$ , con  $2 \leq t \leq f-1$ .

A continuación con el uso del algoritmo, estudiaremos la homología  $H_*(\mathcal{K}_A^j)$ , donde  $j$  es un entero par y no negativo.

Si  $j = 0$ , entonces

$$\mathcal{K}_A^0 : \dots \rightarrow 0 \rightarrow R_0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Si  $j = 2$ , entonces el algoritmo resulta:

○ ○

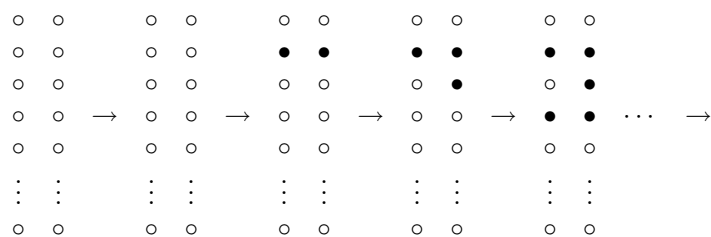
Podemos concluir entonces que  $H_2(\mathcal{K}_A^2) \cong R_0$  y  $H_*(\mathcal{K}_A^2) = 0$ , a menos que  $* = 0, 1, 2$ .

Si  $j = 4$ , entonces el algoritmo resulta:

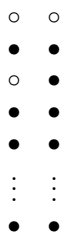


En este caso concluimos que  $H_4(\mathcal{K}_A^4) \cong R_0$  y  $H_*(\mathcal{K}_A^4) = 0$ , a menos que  $* = 0, 1, 4$ .

Si  $j \geq 6$ , entonces los pasos sucesivos del algoritmo son:



y el resultado final es



de donde concluimos que  $H_*(\mathcal{K}_A^j) = 0$ , a menos que  $* = 0, 1, 2$ , o cuando  $* = j$  y  $j \leq 2f$ , en cuyo caso  $H_*(\mathcal{K}_A^j) \cong R_0$ . El hecho de que hay una casilla no marcada en la tercera fila implica que  $\text{Supp } H_2(\mathcal{K}_A^j) \subseteq \mathbf{V}(I_{f-2}(A))$ , el cual es el lugar geométrico del subesquema cerrado de codimensión 3 definido por los Pfaffianos maximales de  $(a_{ij})$ .

### 3 El Complejo $S_k(\phi.)$

Dedicamos esta sección al estudio de la homología del complejo  $S_k(\phi)$  en términos de la aplicación  $\phi$ , para  $\phi : G \rightarrow F$  con  $G$  y  $F$   $R$ -módulos libres con  $n = \text{rang}(G) \leq \text{rang}(F) = m$ . Los complejos  $S_k(\phi)$  son objetos familiares en álgebra conmutativa y teoría de representaciones. Ellos juegan un papel central en el desarrollo de una teoría general de los complejos de Schur y el estudio de resoluciones libres finitas para ideales generados por los menores de una matriz, [1]. También hay un resultado muy conocido de Avramov, [2], en el cual se

establece la aciclicidad de estos complejos en términos de los ideales generados por menores. En el caso en el cual  $\phi$  es una aplicación genérica, G. Boffi ha estudiado la homología de  $S_k(\phi)$ , y la de su dual, [3]. Recordemos que  $S_k(\phi)$  es el complejo,

$$0 \longrightarrow \wedge^k G \longrightarrow \wedge^{k-1} G \otimes S_1 F \longrightarrow \dots \longrightarrow \wedge^j G \otimes S_{k-j} F \xrightarrow{d_j} \dots \longrightarrow S_k F \longrightarrow 0$$

donde el  $j$ -ésimo término es  $\wedge^j G \otimes S_{k-j} F$ , y la diferencial del complejo denotada por  $d_j$  es definida mediante la fórmula,

$$d_j(g_1 \wedge \dots \wedge g_j \otimes f_1^{\alpha_1} \dots f_1^{\alpha_t}) = \sum_{i=1}^j (-1)^{i-1} g_1 \wedge \dots \wedge \hat{g}_i \wedge \dots \wedge g_j \otimes \phi(g_i) f_1^{\alpha_1} \dots f_1^{\alpha_t}.$$

Consideremos ahora para un entero positivo  $k$

$$R_1^k(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{grad } I_n(\phi) > 0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

luego continuamos inductivamente

$$R_j^k(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{grad } I_{n-j+1}(\phi) > R_1^k(\phi) + \dots + R_{j-1}^k(\phi), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

para  $j = 2, \dots, k$ . Obsérvese que si  $n > k$ , entonces  $R_j^k(\phi) = 1$  para  $n < j \leq k$ .

**Definición 9.** La sucesión  $(R_1^k(\phi), R_2^k(\phi), \dots, R_k^k(\phi))$  es la sucesión binaria asociada al par  $(\phi, k)$ .

**Proposición 10.** Consideremos la sucesión binaria  $(R_1^k(\phi), R_2^k(\phi), \dots, R_k^k(\phi))$  asociada al par  $(\phi, k)$ . Sea  $N = N_k(\phi)$  el número de ceros en esta sucesión. Denotemos por  $j(i)$  el índice que corresponde al  $i$ -ésimo cero de la sucesión. Entonces,

1.  $H_i(S_k \phi) = 0$  para  $i > N$ .
2.  $\text{rad ann}(H_i(S_k \phi)) \supseteq \text{rad}(I_{n-j(i)+1}(\phi))$  para  $1 \leq i \leq N$ .

Es claro que esta proposición es un caso especial de la proposición 2, por ello omitimos su demostración.

Ahora necesitamos una serie de definiciones y lemas técnicos. Sea como antes,  $(R_1^k(\phi), R_2^k(\phi), \dots, R_k^k(\phi))$  la sucesión binaria asociada al par  $(\phi, k)$ .

**Definición 11.** La sucesión canónica asociada al par  $(\phi, k)$  es la sucesión de enteros o negativos  $(M_0^k \phi, M_1^k \phi, \dots, M_k^k \phi)$ , donde  $M_0^k \phi = 0$ , y  $M_j^k \phi = R_1^k(\phi) + \dots + R_j^k(\phi)$ , para  $j = 1, \dots, k$ .



Esta sucesión canónica satisface una serie de propiedades elementales de fácil demostración las cuales recopilamos en el siguiente

**Lema 12.** *Sea  $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$  la sucesión canónica asociada al par  $(\phi, k)$ , entonces:*

1.  $0 \leq M_{j-1}^k\phi \leq M_j^k\phi$ .
2.  $\text{grad } I_{n-j+1}(\phi) \geq M_j^k\phi$ .
3. Si  $M_j^k\phi = M_{j-1}^k\phi$ , entonces  $\text{grad } I_{n-j+1}(\phi) = M_{j-1}^k\phi$ .
4. Si  $M_j^k\phi > 0$  para algún  $j$  y  $M_i^k\phi = M_{i-1}^k\phi$ , para algún  $i > j$ , entonces el ideal  $I_{n-j+1}(\phi)$  contiene un **no divisor de cero**  $\alpha$  tal que  $\alpha R \neq R$ .
5.  $0 \leq M_j^k\phi - M_{j-1}^k\phi \leq 1$ .
6.  $M_j^k\phi_{\mathfrak{p}} \geq M_j^k\phi$ , donde  $\phi_{\mathfrak{p}}$  es la localización en el ideal primo  $\mathfrak{p}$  de  $R$ .  
Sea  $\alpha \in R$  y hagamos  $\bar{\phi} = \phi \otimes 1 : G \otimes R/(\alpha) \longrightarrow F \otimes R/(\alpha)$ . Entonces
7. Si  $R$  es un anillo local y  $\alpha$  es un no divisor de cero tal que  $\alpha R \neq R$ , entonces  $M_j^k\phi_{\geq} M_j^k\bar{\phi}$ .
8. Si  $\alpha$  es un no divisor de cero perteneciente a  $I_j\phi$ , entonces

$$\text{grad } I_j(\phi) = \text{grad } I_j(\bar{\phi}) + 1.$$

Estas fórmulas las aplicaremos libremente en lo que falta de esta sección. Definamos ahora la condición

(\*)  $M_i^k\phi > 0$  para algún  $i$  y  $M_j^k\phi = M_{j-1}^k\phi$  para algún  $j > j_0$ , donde  $j_0 = \min\{i : M_i^k\phi > 0\}$

Nótese que si la sucesión canónica  $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$  satisface (\*), entonces el ideal  $I_{n-j_0+1}$  contiene un no divisor de cero  $\alpha$  tal que  $\alpha R \neq R$ .

**Lema 13.** *Supongamos que la sucesión canónica  $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$  asociada al par  $(\phi, k)$  satisface (\*). Sea  $\alpha$  un no divisor de cero en  $I_{n-j_0+1}\phi$  tal que  $\alpha R \neq R$ . Sea  $\bar{\phi} = \phi \otimes 1 : G \otimes R/(\alpha) \longrightarrow F \otimes R/(\alpha)$ . Si  $R$  es un anillo local, entonces*

$$0 \leq M_j^k\phi - M_{j-1}^k\bar{\phi} \leq 1.$$

para cada  $j = 1, \dots, k$ .

*Demostración.* Para simplificar la notación escribamos  $M_j = M_j^k\phi$  y  $\bar{M}_j = M_j^k\bar{\phi}$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ . La demostración se hará por inducción sobre  $j$ . Si

$j < j_0$ , entonces  $M_j = 0$ . Por el lema 12 tenemos que  $\overline{M}_j = 0$ . Por lo tanto la conclusión del lema vale si  $j < j_0$ . Supongamos por inducción que

$$0 \leq M_{j-1} - \overline{M}_{j-1} \leq 1,$$

para algún  $j \geq j_0$ . Necesitamos demostrar que

$$0 \leq M_j - \overline{M}_j \leq 1.$$

Supongamos entonces que  $j \geq j_0$ . La hipótesis de inducción implica que o bien tenemos que  $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1}$ , o bien  $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1$ . Trataremos cada caso por separado.

*CASO 1:*  $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1}$

Existen exactamente dos posibilidades. O bien  $M_j = M_{j-1} + 1$  o  $M_j = M_{j-1}$ . Analicemos ambos casos por separado:

Supongamos primero que  $M_j = M_{j-1} + 1$ . Entonces

$$M_j - \overline{M}_j = M_{j-1} + 1 - \overline{M}_j = \overline{M}_{j-1} + 1 - \overline{M}_j = 1 - (\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1}).$$

Pero  $0 \leq \overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} \leq 1$ , por lo tanto se obtiene el resultado deseado.

Supongamos ahora que  $M_j = M_{j-1}$ . Como  $j \geq j_0$ ,  $\alpha$  es un no divisor de cero en  $I_{n-j+1}\phi$ . Aplicando el lema previo tenemos:

$$\begin{aligned} M_j - 1 &= \text{grad } I_{n-j+1}\phi - 1 \\ &= \text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} \\ &\geq \overline{M}_j \\ &\geq \overline{M}_{j-1} \\ &= M_{j-1} \\ &= M_j \end{aligned}$$

*CASO 2:*  $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1$

De nuevo eberemos considerar los dos subcasos anteriores, o  $M_j = M_{j-1}$ , o bien  $M_j = M_{j-1} + 1$ .

Si  $M_j = M_{j-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} M_j - \overline{M}_j &= M_{j-1} - \overline{M}_j \\ &= \overline{M}_{j-1} + 1 - \overline{M}_j, \\ &= 1 - (\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1}) \end{aligned}$$

Pero  $0 \leq \overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} \leq 1$ , por lo tanto se obtiene el resultado deseado.

Para finalizar queda analizar qué sucede cuando  $M_j = M_{j-1} + 1$ .

Demostremos primero que

$$\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} = 1.$$

En efecto, la otra posibilidad es

$$\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} = 0.$$

En cuyo caso se obtiene que

$$\text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} = \overline{M}_{j-1}.$$

Pero como  $\alpha$  es un no divisor de cero en  $I_{n-j+1}\phi$ . Aplicando el lema previo tenemos:

$$\begin{aligned} \text{grad } I_{n-j+1}\phi &= \text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} + 1 \\ &= \overline{M}_{j-1} + 1 \\ &= \overline{M}_{j-1} \\ &= M_j - 1 \\ &< M_j, \end{aligned}$$

lo cual produce una contradicción y tenemos que

$$\overline{M}_j - \overline{M}_{j-1} = 1.$$

Pero también es cierto que

$$M_j - M_{j-1} = 1.$$

y entonces restando la primera igualdad menos la segunda obtenemos

$$M_j - \overline{M}_j = M_{j-1} - \overline{M}_{j-1} = 0$$

y ahora la demostración está completa  $\square$

Con las mismas notaciones del lema anterior tenemos

**Lema 14.** *Supongamos que la sucesión canónica  $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$  asociada al par  $(\phi, k)$  satisface (\*). Sea  $\alpha$  un no divisor de cero en  $I_{n-j_0+1}\phi$  tal que  $\alpha R \neq R$ . Sea  $\overline{\phi} = \phi \otimes 1 : G \otimes R/(\alpha) \rightarrow F \otimes R/(\alpha)$ . Si  $R$  es un anillo local, entonces*

$$1. M_j^k(\overline{\phi}) = M_{j-1}^k(\overline{\phi}).$$

$$2. M_t^k(\phi) = M_t^k(\overline{\phi}) + 1.$$

para todo  $t \geq \min(k, n)$ .

*Demostración.* De nuevo simplificamos la notación como lo hicimos en el lema anterior y demostremos para comenzar que

$$M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1.$$

Por el lema anterior la otra posibilidad es que

$$M_{j-1} = \overline{M}_{j-1}.$$

Pero entonces la condición  $M_j = M_{j-1}$  implica

$$\text{grad } I_{n-j+1}\phi = M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} \leq \overline{M}_j.$$

Pero por otro lado como  $\alpha$  es un no divisor de cero en  $I_{n-j+1}\phi$ , tenemos

$$\text{grad } I_{n-j+1}\phi = \text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} + 1 \geq \overline{M}_j + 1,$$

lo cual es una contradicción.

Para demostrar la parte 1 del lema basta observar que la única otra posibilidad es

$$\overline{M}_j = \overline{M}_{j-1} + 1.$$

En cuyo caso  $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1$  implica que

$$\text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} + 1 \geq \overline{M}_j = \overline{M}_{j-1} + 1 = M_{j-1}.$$

Por otra parte como  $M_j = M_{j-1}$ ,

$$\text{grad } I_{n-j+1}\phi = M_{j-1}.$$

Por lo tanto,

$$\text{grad } I_{n-j+1}\overline{\phi} \geq M_{j-1} = \text{grad } I_{n-j+1}\phi.$$

como  $\alpha$  es un no divisor de cero en  $I_{n-j+1}\phi$ , tenemos una contradicción con el lema 12(8).

Demostremos ahora (2). Sea  $t' = \max\{i : M_i = M_{i-1}\}$ . Claramente  $t' \leq \min(k, n)$ . Por lo tanto es suficiente demostrar la proposición para  $t \geq t'$ . Procederemos por inducción comenzando con  $t = t'$ . Es claro que  $t' \geq j_0$ . Aplicando la primera parte del lema y la igualdad  $M_{j-1} = \overline{M}_{j-1} + 1$ , pero con  $t'$  en lugar de  $j$ , obtenemos que

$$M_{t'} = M_{t'-1} = \overline{M}_{t'-1} + 1 = \overline{M}_{t'} + 1.$$

Hemos demostrado entonces (2) para  $t = t'$ . Supongamos por inducción que

$$M_t = \overline{M}_t + 1,$$

entonces necesitamos demostrar que

$$M_{t+1} = \overline{M}_{t+1} + 1.$$

La maximalidad de  $t'$ , junto a la hipótesis de inducción nos dice que

$$M_{t+1} = M_t + 1 = \overline{M}_t + 2.$$

Tenemos entonces solo dos posibilidades que analizar:  $\overline{M}_t = \overline{M}_{t+1}$ , o  $\overline{M}_t = \overline{M}_{t+1} - 1$ . Si  $\overline{M}_t = \overline{M}_{t+1}$ , entonces la igualdad  $M_{t+1} = M_t + 1 = \overline{M}_t + 2$ , implica  $M_{t+1} = \overline{M}_{t+1} + 2$ , lo cual contradice al lema anterior. Por otra parte, si  $\overline{M}_t = \overline{M}_{t+1} - 1$ , entonces de nuevo por la igualdad  $M_{t+1} = M_t + 1 = \overline{M}_t + 2$ , obtenemos que

$$M_{t+1} = \overline{M}_{t+1} + 1$$

y la demostración está completa  $\square$

Solo nos resta demostrar otro lema técnico y podremos establecer nuestros resultados sobre la homología de  $S_k\phi$ .

**Lema 15.** *Sea  $\phi : G \rightarrow F$  un homomorfismo de  $R$ -módulos finitamente generados. Supongamos que  $\text{rang } G \leq \text{rang } F$ . Sea  $k$  un entero positivo. Sea  $(M_0^k\phi, M_1^k\phi, \dots, M_k^k\phi)$  la sucesión canónica asociada al par  $(\phi, k)$ . Si  $M_t^k\phi = 0$ , para algún  $t \geq 1$ , y*

$$M_t^k\phi < M_{t+1}^k\phi < \dots < M_k^k\phi,$$

entonces

$$H_t(S_k\phi) \neq 0.$$

*Demostración.* Sea  $n = \text{rang } G$  y  $m = \text{rang } F$ . Por simplicidad hagamos de nuevo  $M_j = M_j^k\phi$ . Debemos proceder por casos.

*CASO 1 :  $t = \min(k, n)$ .* Supongamos que  $H_t(S_k\phi) = 0$ . Como  $t = \min(k, n)$ , la sucesión

$$0 \rightarrow \Lambda^t G \otimes S_{k-t}F \xrightarrow{d_t} \Lambda^{t-1} G \otimes S_{k-t+1}F \rightarrow$$

es exacta. Denotemos ahora  $I(d_t) = I_r(d_t)$ , donde  $r = \text{rang}(d_t)$ . Como  $M_t = 0$  tenemos

$$M_0 = M_1 = \dots = M_t = 0.$$

en consecuencia,

$$\text{grad } I_n\phi = \text{grad } I_{n-1}\phi = \dots = \text{grad } I_{n-t+1}\phi = 0.$$

Ahora tenemos exactamente dos posibilidades.  $t = k$  o  $t = n$ . Si  $t = k$ , entonces poniendo  $t = k$  en la sucesión exacta anterior y dualizando, obtenemos la sucesión exacta

$$\Lambda^{k-1} G^* \otimes F^* \xrightarrow{d_k^*} \Lambda^k G^* \rightarrow \Lambda^k \text{coker}(\phi^*) \rightarrow 0.$$

Como  $\text{rang}(\Lambda^k G^*) = \binom{n}{k}$ ,

$$\begin{aligned} \text{rad}(I_{\binom{n}{k}} d_k) &= \text{rad}(I_{\binom{n}{k}} d_k^*) = \text{rad } \text{ann}(\Lambda^k \text{coker}(\phi^*)) = \\ &= \text{rad}(I_{n-k+1}\phi^*) = \text{rad}(I_{n-k+1}\phi). \end{aligned}$$

([2], Lema 2). Por lo tanto  $\text{grad}(I_{\binom{n}{k}} d_k) = 0$ . Como  $d_k$  es inyectiva,  $\text{rang } d_k = \binom{n}{k}$ . Por lo tanto  $\text{grad } I(d_k) = 0$ , y de acuerdo al criterio de exactitud de Buchsbaum-Eisenbud, la sucesión considerada al principio no es exacta, lo cual es una contradicción.

Ahora supongamos que  $t = n$ . De la definición de  $d_n$ , se deduce que  $I_1(d_n) = I_1(\phi)$ . Como  $\text{grad } I_1(\phi) = 0$ , tenemos que  $\text{grad } I_j(d_n) = 0$  para  $j \geq 1$ . Por lo tanto si  $\text{rang } d_n > 0$ , entonces  $\text{grad } I(d_n) = 0$ , y se contradice la exactitud de la sucesión considerada. Si por otra parte  $\text{rang } d_n = 0$ , entonces  $\text{rang } (\bigwedge^n G \otimes S_{k-n} F) = 0$ , lo cual implica que  $k < n$ , y se contradice la minimalidad de  $n$ .

*CASO 2*:  $1 \leq t < \min(k, n)$ . Como  $M_t = M_{t-1} = 0$ , entonces

$$\text{grad } I_{n-t+1}(\phi) = 0.$$

Esto quiere decir que cada elemento no nulo en  $I_{n-t+1}(\phi)$ , es un divisor de cero. Un argumento clásico de evasión de ideales primos, nos da un ideal primo  $\mathfrak{p}$  tal que  $\mathfrak{p} \supset I_{n-t+1}(\phi)$ , con

$$\text{grad}(\mathfrak{p}) = \text{grad}(I_{n-t+1}(\phi)) = 0.$$

En este caso,

$$\text{grad}(I_{n-t+1}(\phi_{\mathfrak{p}})) = \text{grad}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) = 0,$$

donde  $\phi_{\mathfrak{p}}$  es la localización de  $\phi$  en  $\mathfrak{p}$ . Como  $\text{grad}(I_{n-t}(\phi)) \geq M_{t+1} > 0$ , entonces  $\mathfrak{p}$  no contiene a  $I_{n-t}(\phi)$ . En consecuencia  $\phi_{\mathfrak{p}}$  se descompone dando lugar al isomorfismo

$$\phi_{\mathfrak{p}} \approx \phi' + 1,$$

donde  $\phi' : G' \rightarrow F'$  es un isomorfismo de  $R_{\mathfrak{p}}$ -módulos libres finitamente generados con

$$t = \text{rang } G' \leq \text{rang } F' = m - n + t.$$

Claramente,

$$I_j(\phi_{\mathfrak{p}}) = I_{j-n+t}(\phi'),$$

para todo  $j$ . Como  $\text{grad}(I_{n-t+1}(\phi_{\mathfrak{p}})) = 0$ , entonces  $\text{grad}(I_1(\phi')) = 0$ . En consecuencia

$$M_0^k \phi' = M_1^k \phi' = \dots = M_t^k \phi',$$

y

$$M_k^k \phi' > M_{k-1}^k \phi' > \dots > M_t^k \phi'.$$

Como  $t < \min(k, n)$ , entonces  $\min(k, t) = t$ . Aplicando el CASO 1 a  $\phi'$  obtenemos,  $H_t(S_k \phi') \neq 0$ . Por lo tanto,

$$H_t(S_k \phi_{\mathfrak{p}}) \cong H_t(S_k \phi') \neq 0.$$

Como la formación de potencias simétricas conmuta con el cambio de anillos, tenemos  $H_t(S_k\phi) \neq 0$  lo cual es una contradicción y completa la demostración del lema  $\square$

**Teorema 16.** *Sea  $\phi : G \rightarrow F$  un homomorfismo de  $R$ -módulos libres finitamente generados, con  $\text{grad } G \leq \text{grad } F$ . Sea  $k$  un entero positivo y  $S_k\phi$  la  $k$ -ésima potencia simétrica de  $\phi$ . Sea  $N = N_k(\phi)$  el número de ceros que ocurren en la sucesión binaria  $(R_1^k\phi, \dots, R_k^k\phi)$ . Si  $N > 0$ , entonces*

$$H_N(S_k\phi) \neq 0.$$

**Nota.** A la luz de la *proposición 10*,  $H_i(S_k\phi) = 0$ , para  $i > N$ .

*Demostración.* Sea  $n = \text{rang } G$ . Denotemos por  $M_j = M_j^k\phi$  a los términos de la sucesión canónica asociada a  $(\phi, k)$ . Supongamos primero que  $R$  es un anillo local. Sea  $m_\phi = M_{\min(k,n)}$ . Ahora procederemos por inducción sobre  $m_\phi$ , comenzando con  $m_\phi = 0$ . Sea  $t = \min(k, n)$ , entonces  $M_t = 0$  y

$$M_t < M_{t+1} < \dots < M_k.$$

Por lo tanto,  $N = N_k(\phi) = t$  y por el lema 15, tenemos que

$$H_N(S_k\phi) \neq 0.$$

Supongamos que  $m_\phi > 0$ , y que la proposición es cierta para homomorfismos  $\psi$ , con  $m_\psi < m_\phi$ . Sea

$$j_0 = \min\{i : M_i > 0\}.$$

Entonces existen exactamente dos posibilidades a considerar.  $M_j = M_{j-1}$ , para algún  $j > j_0$  o  $M_{j_0} < M_{j_0+1} < \dots < M_k$ .

*CASO 1.* Supongamos que  $M_{j_0} < M_{j_0+1} < \dots < M_k$ . Si  $j_0 = 1$ , entonces claramente

$$R_1^k\phi = \dots = R_k^k\phi = 1,$$

y en consecuencia  $N = 0$ . Por lo tanto supongamos que  $j_0 \geq 2$ . Las condiciones

$$M_{j_0} < M_{j_0+1} < \dots < M_k$$

y

$$M_{j_0-1} = 0,$$

implican  $N = j_0 - 1$ . Aplicando entonces el lema anterior con  $t = j_0 - 1$ , nos da

$$H_N(S_k\phi) \neq 0,$$

como queríamos.

*CASO 2.* Supongamos ahora que  $M_j = M_{j-1}$ , para algún  $j > j_0$ . Hagamos  $j' = \max\{j : M_j = M_{j-1}\} = \max\{j : R_j^k\phi = 0\}$ , por lo tanto de acuerdo a

la Proposición 10 tenemos que  $j' = j(N)$ . Entonces por las propiedades de la sucesión canónica  $(M_0, M_1, \dots, M_k)$ , existe un no divisor de cero  $\alpha$  en  $I_{n-j_0+1}\phi$  tal que  $\alpha R \neq R$ . Como  $j' > j_0$ , entonces, de nuevo por la Proposición 10,

$$I_{n-j_0+1}\phi \subseteq \text{rad}(I_{n-j'+1}\phi) \subseteq \text{rad ann}(H_N(S_k\phi)).$$

Para algún  $p$  suficientemente grande,  $\beta = \alpha^p \in \text{ann}(H_N(S_k\phi))$ . Como  $\beta$  es un no divisor de cero en  $R$ , la multiplicación por  $\beta$  determina la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\beta} R \longrightarrow R/(\beta) \longrightarrow 0.$$

Como la formación de potencias simétricas conmuta con el cambio de anillos, al tensorizar la sucesión anterior con  $S_k\phi$  obtenemos la sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow S_k\phi \xrightarrow{\beta} S_k\phi \longrightarrow S_k(\bar{\phi}) \longrightarrow 0,$$

donde  $\bar{\phi} = \phi \otimes 1 : G \otimes R/(\beta) \longrightarrow F \otimes R/(\beta)$ . Esta sucesión de complejos nos da las sucesiones exacta en homología

$$H_{N+1}(S_k\phi) \longrightarrow H_{N+1}(S_k\bar{\phi}) \xrightarrow{\delta} H_N(S_k\phi) \longrightarrow H_N(S_k\phi).$$

Por la Proposición 10,  $H_{N+1}(S_k\phi) = 0$ , por lo tanto  $\delta$  es inyectiva y tenemos el isomorfismo

$$H_{N+1}(S_k\bar{\phi}) \cong H_N(S_k\phi). \quad (1)$$

Sea  $N' = N_k(\bar{\phi})$ . Aplicando el Lema 14(2) con  $t = k$ , tenemos,

$$N' = k - M_k^k \bar{\phi} = k - M_k + 1 = N + 1 > 0 \quad (2)$$

Aplicando ahora el Lema 14(2) con  $t = \min(k, n)$  tenemos,

$$m_{\bar{\phi}} = m_{\phi} - 1 < m_{\phi}.$$

Ahora la hipótesis de inducción aplicada a  $\bar{\phi}$ , da

$$H_{N'}(S_k\bar{\phi}) \neq 0.$$

La conclusión, en el caso local, sigue ahora de (1) y (2). Consideremos ahora el caso general, es decir  $R$  un anillo noetheriano, y sea  $j$  el índice correspondiente al  $N$ -ésimo cero de la sucesión binaria  $(R_1^k\phi, \dots, R_k^k\phi)$ . Entonces,

$$M_j^k = M_{j-1}^k \stackrel{def}{=} d,$$

y

$$\text{grad } I_{n-j+1}\phi = d.$$



De nuevo un argumento de evasión de ideales primos, nos da un ideal primo  $\mathfrak{p}$  que contiene a  $I_{n-j+1}\phi$ , con

$$\text{grade } \mathfrak{p} = \text{grad } I_{n-j+1}\phi = d.$$

En este caso

$$\text{grade } \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \text{grad } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}) = d.$$

Por lo tanto,

$$M_j^k\phi = d \text{grad } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}) \geq M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Por otra parte,

$$M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \geq M_j^k\phi.$$

Luego,

$$M_j^k\phi = M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Como

$$M_k^k\phi > \cdots > M_j^k\phi,$$

por el Lema 12(5)(6), tenemos

$$M_k^k(\phi_{\mathfrak{p}}) > \cdots > M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Por lo tanto,

$$N_k(\phi_{\mathfrak{p}}) = N_k(\phi) = N,$$

y en consecuencia

$$H_N(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) \neq 0.$$

Como la formación de potencias simétricas conmuta con el cambio de anillos tenemos que

$$H_N(S_k\phi) \neq 0$$

y la demostración está completa  $\square$

Finalizamos nuestro análisis con el

**Teorema 17.** *Sea  $\phi : G \longrightarrow F$  un homomorfismo de  $R$ -módulos libres finitamente generados, con  $\text{grad } G \leq \text{grad } F$ . Sea  $k$  un entero positivo y  $S_k\phi$  la  $k$ -ésima potencia simétrica de  $\phi$ . Sea  $N = N_k(\phi)$  el número de ceros que ocurren en la sucesión binaria  $(R_1^k\phi, \dots, R_k^k\phi)$ . Hagamos  $j(i)$  igual al índice correspondiente al  $i$ -ésimo cero en la sucesión  $(R_1^k\phi, \dots, R_k^k\phi)$ . Si  $i = 1 \cdots, N$  y  $R_{j(i)+1}^k\phi = \cdot$  entonces*

$$\text{grad } H_i(S_k\phi) = \text{grad } I_{n-j(i)+1}\phi.$$

*Demostración.* Sea  $n = \text{rang } G$  y  $j = j(i)$ . Como  $R_j^k \phi = 0$ , tenemos

$$M_j^k \phi = M_{j-1}^k \phi \stackrel{\text{def}}{=} d,$$

y

$$\text{grad } I_{n-j+1} \phi = d.$$

Ahora usamos de nuevo el argumento clásico de evasión de ideales primos y obtenemos un ideal primo  $\mathfrak{p}$  que no contiene a  $I_{n-j+1} \phi$  y tal que

$$\text{grade } \mathfrak{p} = \text{grad } I_{n-j+1} \phi = d.$$

En este caso

$$\text{grade } \mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}} = \text{grad } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}) = d.$$

Por lo tanto,

$$M_j^k \phi = d \text{grad } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}) \geq M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Por otra parte,

$$M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \geq M_j^k \phi.$$

Luego,

$$M_j^k \phi = M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

Como  $R_{j+1}^k \phi = 1$ , tenemos

$$\text{grad } I_{n-j}(\phi) \geq M_{j+1}^k \phi > M_j^k \phi = d = \text{grade } \mathfrak{p}.$$

En consecuencia  $\mathfrak{p} \not\supseteq I_{n-j}(\phi)$  y por lo tanto,

$$I_1(\phi_{\mathfrak{p}}) = I_2(\phi_{\mathfrak{p}}) = \cdots = I_{n-j}(\phi_{\mathfrak{p}}) = R_{\mathfrak{p}},$$

y

$$R_{j+1}^k(\phi_{\mathfrak{p}}) = R_{j+2}^k(\phi_{\mathfrak{p}}) = \cdots = R_k^k(\phi_{\mathfrak{p}}) = 1.$$

De aquí sigue,

$$\begin{aligned} N_k(\phi_{\mathfrak{p}}) &= k - \sum_{t=1}^k R_t^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \\ &= k - \left( \sum_{t=1}^j R_t^k(\phi_{\mathfrak{p}}) + \sum_{t=j+1}^k R_t^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \right) \\ &= k - (M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}) + k - 1) \\ &= j - M_j^k(\phi_{\mathfrak{p}}) \\ &= j - M_j^k(\phi) \\ &= i. \end{aligned}$$

Ahora de acuerdo al teorema anterior, tenemos,

$$H_i(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) \neq 0.$$

Pero entonces, de acuerdo a la Proposición 10, obtenemos las inclusiones

$$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \supseteq \text{rad ann } H_i(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) \supseteq \text{ann } I_{n-j+1}(\phi_{\mathfrak{p}}).$$

En particular se sigue que

$$\text{grad ann } H_i(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) = d$$

y de nuevo por un argumento de cambio de anillos tenemos,

$$\begin{aligned} d &= \text{grad ann } H_i(S_k(\phi_{\mathfrak{p}})) \\ &= \text{grad ann } H_i(S_k(\phi))_{\mathfrak{p}} \\ &\geq \text{grad ann } H_i(S_k(\phi)). \end{aligned}$$

Por otra parte la Proposición 10, implica

$$\text{grad ann } H_i(S_k(\phi)) \geq \text{grad } I_{n-j+1}(\phi) = d.$$

En consecuencia

$$\text{grad } H_i(S_k(\phi)) = \text{grad ann } H_i(S_k(\phi)) = d = \text{grad } I_{n-j+1}(\phi),$$

como queríamos y se completa así la demostración del teorema.  $\square$

## Referencias

- [1] K.Akin, D.A. Buchsbaum, J. Weyman. *Schur functors and Schur complexes*, Adv. in Math. 44 (1982), 207-278.
- [2] L. Avramov. *Complete intersections and symmetric algebras*, J. of Algebra. 73 (1981), 248-263.
- [3] G. Boffi. *Bilinear forms and (hyper)determinants*, Adv. in Math. 123 (1996), 91-103.
- [4] D. Buchsbaum, D. Eisenbud, . *What makes a complex exact?*, J. of Algebra. 25 (1973), 259-268.
- [5] W. Bruns, U. Vetter, *A remark on Koszul complexes*, Contributions to Algebra and Geometry. 39 (1998), N° 2, 249-254.
- [6] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Hyperdeterminants*, Adv. in Math. 96 (1992), 226-263.
- [7] I. Manji, R. Sánchez. *On the homology of the Schur complex*, J. of Algebra. 182 (1996), 274-286.

- [8] I. Manji, R. Sánchez. *A note on the homology of the Schur complex*, J. of Algebra. 211 (1999), 514-523.
- [9] J. Weyman. *Calculating discriminants by higher direct images*, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 367-389.

RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS,  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA,  
CARACAS, VENEZUELA  
`rsanchez@euler.ciens.ucv.ve`

IMTIAZ MANJI  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS,  
CARLETON UNIVERSITY, 1125 COLONEL BY DRIVE,  
OTTAWA, CANADA K1S5B6

# Some properties of solutions for the generalized thin film equation in one space dimension

Changchun Liu

## Abstract

In this paper, the author studies a generalized thin film equation in one space dimension. Some results on the finite speed of propagation of perturbations and regularity of solutions are established.

## 1 Introduction

In this paper, we consider the variant version of the thin film equation, namely

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(|\nabla \Delta u|^{p-2} \nabla \Delta u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad p > 2, \quad (1.1)$$

where  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  is a bounded domain with smooth boundary.

The equation (1.1) is a typical higher order equations, which have a sharp physical background and a rich theoretical connotation. It was J.R.King [6] who first derived the equation. Equation (1.1) describes the surface tension driven evolution of the height  $u(x, t)$  of a thin liquid film on a solid surface in lubrication approximation [6, 7, 9]. The exponent  $p$  is related to the rheological properties of the liquid:  $p = 2$  corresponds to a Newtonian liquid, whereas  $p \neq 2$  emerges when considering “power-law” liquids. When  $p > 2$  the liquid is said to be “shear-thinning”.

J.R.King [6] studied Cauchy problem of the equation for one-dimensional, exploiting local analyses about the edge of the support and special closed form solutions such as travelling waves, separable solutions, instantaneous source solutions.

On the basis of physical consideration, as usual the equation (1.1) is supplemented with the natural boundary value conditions

$$u = \Delta u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (1.2)$$

The boundary value conditions (1.2) is a reasonable for the thin film equation or the Cahn-Hilliard equation, (see [1, 2, 4]) and initial value condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.3)$$

This equation is something quite like the  $p$ -Laplacian equation, but many methods used in the  $p$ -Laplacian equation such as those methods based on maximum principle are no longer valid for this equation. Because of the degeneracy, the problem (1.1)-(1.3) does not admit classical solutions in general. So, we introduce weak solutions in the following sense

**Definition** A function  $u$  is said to be a weak solution of the problem (1.1)-(1.3), if the following conditions are satisfied:

- 1)  $u \in L^\infty(0, T; W^{3,p}(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $u, \Delta u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,
- 2)  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ , where  $p'$  is the conjugate exponent of  $p$ ;
- 2) For any  $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$ , the following integral equality holds:

$$\iint_{Q_T} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt + \iint_{Q_T} |\nabla \Delta u|^{p-2} \nabla \Delta u \nabla \varphi dxdt = 0;$$

- 3)  $u(x, 0) = u_0(x)$ , in  $L^2(\Omega)$

In [8] they prove the existence and uniqueness of weak solution for dimension  $N \leq 2$ . This paper is a further step in the study of the properties of solutions, we proved the finite speed of propagation of perturbations and regularity of solutions of the problem (1.1)-(1.3) for one dimensional case.

In addition, through out this paper, we set  $I = (0, 1)$ .

## 2 Finite speed of propagation of perturbations

In this section, we are going to prove the following theorem.

**Theorem 2.1** Assume  $p > 2$ ,  $\text{supp } u_0 \subset [x_1, x_2]$ ,  $0 < x_1 < x_2 < 1$ , and  $u$  is the weak solution of the problem (1.1)-(1.3), then for any fixed  $t > 0$ , we have

$$\text{supp } u(x, \cdot) \subset [x_1(t), x_2(t)] \cap [0, 1],$$

where  $x_1(t) = x_1 - C_1 t^{\frac{1}{3p-2}}$ ,  $x_2(t) = x_2 + C_2 t^{\frac{1}{3p-2}}$ ,

$$C_1 = C \left( \int_0^T \int_0^{x_1} |D^3 u|^p dx d\tau \right)^{\frac{p-2}{2(3p-2)}}, \quad C_2 = C \left( \int_0^T \int_{x_2}^1 |D^3 u|^p dx d\tau \right)^{\frac{p-2}{2(3p-2)}},$$

$$C = 2^{3p-2} (2p+1)^p (p-1)^{p-1} (1+p^{-p}).$$

To prove the Theorem 2.1 we need the following result

**Lemma 2.2** The weak solution  $u$  of the problem (1.1)-(1.3), satisfying for any  $0 \leq \rho \in C^2(\bar{I})$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(x) |Du(x, t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(x) |Du_0(x)|^2 dx \\ &= - \iint_{Q_t} |D^3 u|^{p-2} D^3 u D^2(\rho(x) Du) dx, \end{aligned}$$

where  $Q_t = (0, 1) \times (0, t)$ ,  $D = \frac{\partial}{\partial x}$ .

*Proof.* Similar to the discussion in [8], we can also easily prove that for any  $0 \leq \rho \in C^2(\bar{\Omega})$ ,

$$f_\rho(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x) |Du(x, t)|^2 dx \in C([0, T]).$$

Consider the functional

$$\Phi_\rho[v] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x) |Dv(x)|^2 dx.$$

It is easy to see that  $\Phi_\rho[v]$  is a convex functional on  $H_0^1(\Omega)$ .

For any  $\tau \in (0, T)$  and  $h > 0$ , we have

$$\Phi_\rho[u(\tau + h)] - \Phi_\rho[u(\tau)] \geq \langle u(\tau + h) - u(\tau), -D(\rho(x)Du(\tau)) \rangle.$$

By  $\frac{\delta \Phi_\rho[v]}{\delta v} = -D(\rho(x)Dv)$ , for any fixed  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ , integrating the above inequality with respect to  $\tau$  over  $(t_1, t_2)$ , we have

$$\int_{t_2}^{t_2+h} \Phi_\rho[u(\tau)] d\tau - \int_{t_1}^{t_1+h} \Phi_\rho[u(\tau)] d\tau \geq \int_{t_1}^{t_2} \langle u(\tau+h) - u(\tau), -D(\rho(x)Du(\tau)) \rangle d\tau.$$

Multiplying both sides of the above equality by  $\frac{1}{h}$ , and letting  $h \rightarrow 0$ , we obtain

$$\Phi_\rho[u(t_2)] - \Phi_\rho[u(t_1)] \geq \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, -D(\rho(x)Du(\tau)) \right\rangle d\tau.$$

Similarly, we have

$$\Phi_\rho[u(\tau)] - \Phi_\rho[u(\tau - h)] \leq \langle (u(\tau) - u(\tau - h)), -D(\rho(x)Du(\tau)) \rangle.$$

Thus

$$\Phi_\rho[u(t_2)] - \Phi_\rho[u(t_1)] \leq \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, -D(\rho(x)Du(\tau)) \right\rangle d\tau,$$

and hence

$$\Phi_\rho[u(t_2)] - \Phi_\rho[u(t_1)] = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, -D(\rho(x)Du(\tau)) \right\rangle d\tau.$$

Taking  $t_1 = 0, t_2 = t$ , we get from the definition of solutions that

$$\begin{aligned} \Phi_\rho[u(t)] - \Phi_\rho[u(0)] &= \int_0^t \langle -D(|D^3u|^{p-2}D^3u), -D(\rho(x)Du(\tau)) \rangle d\tau \\ &= - \int_0^t \langle |D^3u|^{p-2}D^3u, D^2(\rho(x)Du(\tau)) \rangle d\tau. \end{aligned}$$

This completes the proof.

*Proof of Theorem 2.1* By Lemma 2.2, take  $\rho(x) = (x - y)_+^s$ ,  $y \in [x_2, 1)$ , we have

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (x - y)_+^s |Du(x, t)|^2 dx = - \int_0^t \int_0^1 |D^3 u|^{p-2} D^3 u D^2 [(x - y)_+^s Du] dx d\tau.$$

Denote the left side of above equality by  $J$ , then we have

$$\begin{aligned} J &= - \int_0^t \int_0^1 |D^3 u|^{p-2} D^3 u D^2 [(x - y)_+^s Du] dx d\tau \\ &= - \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^s |D^3 u|^p dx d\tau \\ &\quad - 2s \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^{s-1} D^2 u |D^3 u|^{p-2} D^3 u dx d\tau \\ &\quad - s(s-1) \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^{s-2} |D^3 u|^{p-2} D^3 u Du dx d\tau \\ &\leq - \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^s |D^3 u|^p dx d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^s |D^3 u|^p dx d\tau \\ &\quad + C_1 \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^{s-p} |D^2 u|^p dx d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^s |D^3 u|^p dx d\tau + C_2 \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^{s-2p} |Du|^p dx d\tau \\ &\leq - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^s |D^3 u|^p dx d\tau + C_1 \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^{s-p} |D^2 u|^p dx d\tau \\ &\quad + C_2 \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^{s-2p} |Du|^p dx d\tau, \end{aligned}$$

using Hardy inequality [5], we have

$$\int_0^1 (x - y)_+^{s-2p} |Du|^p dx \leq C \int_0^1 (x - y)_+^{s-p} |D^2 u|^p dx.$$

Hence

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^1 (x - y)_+^s |Du|^p dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^s |D^3 u|^p dx d\tau \\ &\leq C_1 \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^{s-p} |D^2 u|^p dx d\tau. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Thus

$$\sup_{0 < \tau \leq t} \int_0^1 (x - y)_+^s |Du|^p dx \leq C_1 \int_0^t \int_0^1 (x - y)_+^{s-p} |D^2 u|^p dx d\tau, \tag{2.2}$$



and

$$\int_0^t \int_0^1 (x-y)_+^s |D^3 u|^p dx d\tau \leq C_1 \int_0^t \int_0^1 (x-y)_+^{s-p} |D^2 u|^p dx d\tau. \quad (2.3)$$

For (2.2) again using Hardy inequality, we have

$$\sup_{0 < \tau \leq t} \int_0^1 (x-y)_+^s |Du|^p dx \leq C \int_0^t \int_0^1 (x-y)_+^s |D^3 u|^p dx d\tau. \quad (2.4)$$

Let

$$E_s(y) = \int_0^t \int_0^1 (x-y)_+^s |D^3 u|^p dx d\tau, \quad E_0(y) = \int_0^t \int_y^1 |D^3 u|^p dx d\tau.$$

In (2.3), set  $s = 2p + 1$  and using Nirenberg inequality [3], we have

$$\begin{aligned} & E_{2p+1}(y) \\ & \leq C_1 \iint_{Q_t} (x-y)_+^{p+1} |D^2 u|^p dx d\tau \\ & \leq C \int_0^t \left( \int_0^1 (x-y)_+^{p+1} |D^3 u|^p dx \right)^a \left( \int_\Omega (x-y)_+^{p+1} |Du|^2 dx \right)^{(1-a)p/2} d\tau, \end{aligned}$$

where  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p+2} + a(\frac{1}{p} - \frac{2}{p+2}) + (1-a)\frac{1}{2}$ , therefore

$$0 < a = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{p} - \frac{2}{p+2} - \frac{1}{2}} < 1.$$

Using (2.4) we obtain

$$\begin{aligned} & E_{2p+1}(y) \\ & \leq C \left( \iint_{Q_t} (z-z_0)_+^{p+1} |D^3 u|^p dx d\tau \right)^{(1-a)p/2} \int_0^t \int_0^1 ((x-y)_+^{p+1} |D^3 u|^p dx)^a d\tau \\ & \leq C [E_{p+1}(y)]^{(1-a)p/2} \left( \iint_{Q_t} (x-y)_+^{p+1} |D^3 u|^p dx d\tau \right)^a t^{1-a} \\ & \leq C E_{p+1}(y)^{(1-a)p/2+a} t^{1-a}. \end{aligned}$$

Denote  $\lambda = 1 - a$ ,  $\gamma = a + (1 - a)p/2$ . Applying Hölder's inequality, we have

$$\begin{aligned} & E_{2p+1}(y) \\ & \leq Ct^\lambda \left[ \iint_{Q_t} (x-y)_+^{p+1} |D^3 u|^p dx d\tau \right]^\gamma \\ & \leq Ct^\lambda \left[ \iint_{Q_t} (x-y)_+^{2p+1} |D^3 u|^p dx d\tau \right]^{\frac{(p+1)\gamma}{(2p+1)}} \left[ \int_0^t \int_y^1 |D^3 u|^p dx d\tau \right]^{\frac{p\gamma}{(2p+1)}} \\ & \leq Ct^\lambda [E_{2p+1}(y)]^{(p+1)\gamma/(2p+1)} [E_0(y)]^{p\gamma/(2p+1)}. \end{aligned}$$

Therefore

$$E_{2p+1}(y) \leq Ct^{\lambda/\sigma} [E_0(y)]^{p\gamma/((2p+1)\sigma)}, \quad \sigma = 1 - \frac{p+1}{2p+1}\gamma > 0.$$

Using Hölder's inequality again, we get

$$E_1(y) \leq [E_{2p+1}(y)]^{1/(2p+1)} [E_0(y)]^{2p/(2p+1)} \leq Ct^{\gamma_1} [E_0(y)]^{1+\theta},$$

where

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{\sigma(2p+1)}, \quad \theta = \frac{p\gamma}{\sigma(2p+1)^2} - \frac{1}{2p+1} > 0.$$

Noticing that  $E_1'(y) = -E_0(y)$ , we obtain

$$E_1'(y) \leq -Ct^{-\gamma_1/(\theta+1)} [E_1(y)]^{1/(\theta+1)}.$$

If  $E_1(x_2) = 0$ , then  $\text{supp}u \subset [0, x_2]$ . If  $E_1(x_2) > 0$ , then there exists a maximal interval  $(x_2, x_2^*)$  in which  $E_1(y) > 0$ ,  $E_1(x_2^*) = 0$  and

$$\left[ E_1(y)^{\theta/(\theta+1)} \right]' = \frac{\theta}{\theta+1} \frac{E_1'(y)}{[E_1(y)]^{1/(\theta+1)}} \leq -Ct^{-\gamma_1/(\theta+1)}.$$

Integrating the above inequality over  $(x_2, x_2^*)$ , we have

$$E_1(x_2^*)^{\theta/(\theta+1)} - E_1(x_2)^{\theta/(\theta+1)} \leq -Ct^{-\gamma_1/(\theta+1)}(x_2^* - x_2),$$

which implies that

$$x_2^* \leq x_2 + Ct^\mu (E_0(x_2))^{\theta/(\theta+1)} \equiv x_2(t), \quad \mu = \frac{\gamma_1}{\theta+1} = \frac{1}{3p-2} > 0.$$

Results in [8] imply that  $E_0(y)$  can be controlled by a constant  $C$  independent of  $y$ . Therefore

$$\text{supp}u(\cdot, t) \subset [0, x_2(t)].$$

Similarly, we have

$$\text{supp}u(\cdot, t) \subset [x_1(t), 1].$$

We have thus completed the proof of Theorem 2.1.

### 3 Regularity of solutions

**Theorem 3.1** *If  $u$  is weak solution of the problem(1.1)-(1.3), then for any  $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in Q_T$ , we have*

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leq C(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}),$$

where  $C$  is a constant depending only on  $p$ .

*Proof.* Let

$$u_\varepsilon(x, t) = J_\varepsilon u(x, t) = \int_0^T \int_{|x-y|<\varepsilon} j_\varepsilon(x-y, t-s) u(y, s) dy ds$$

where  $j_\varepsilon(x, t)$  is a mollifier.

For any  $x_1, x_2 \in I$ , we have

$$\begin{aligned} & u_\varepsilon(x_1, t) - u_\varepsilon(x_2, t) \\ &= \int_0^T \int_R j_\varepsilon(x_1 - y, t - s) u(y, s) dy ds - \int_0^T \int_R j_\varepsilon(x_2 - y, t - s) u(y, s) dy ds \\ &= \int_0^T \int_R \frac{\partial j_\varepsilon(zx_1 + (1-z)x_2 - y, t - s)}{\partial z} u(y, s) dz dy ds \\ &= \int_0^T \int_R \int_0^1 D_x j_\varepsilon(zx_1 + (1-z)x_2 - y, t - s) (x_1 - x_2) u(y, s) dz dy ds \\ &= - \int_0^T \int_R \int_0^1 D_y j_\varepsilon(zx_1 + (1-z)x_2 - y, t - s) (x_1 - x_2) u(y, s) dz dy ds \\ &= \int_0^T \int_R \int_0^1 j_\varepsilon(zx_1 + (1-z)x_2 - y, t - s) D_y u(y, s) dz dy ds (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} & |u_\varepsilon(x_1, t) - u_\varepsilon(x_2, t)| \\ &\leq \int_0^T \int_R \int_0^1 |j_\varepsilon(zx_1 + (1-z)x_2 - y, t - s)| |D_y u(y, s)| dz dy ds |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

by  $u \in L^\infty(0, T; W^{3,p}(\Omega))$ , hence using Sobolev embedding theorem, we have  $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty(Q_T)$  and  $u \in L^\infty(Q_T)$ . Thus we obtain

$$|u_\varepsilon(x_1, t) - u_\varepsilon(x_2, t)| \leq C|x_1 - x_2|. \quad (3.1)$$

Set  $0 < \varepsilon < t_1 < t_2 < T$ . Let  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $I_\rho = I_{(\Delta t)^{1/2}}(x_0) = (x_0 - (\Delta t)^{1/2}, x_0 + (\Delta t)^{1/2})$ ,  $x_0 \in I$ , choose  $\rho$  sufficiently small, such that  $I_\rho \subset I$ ,  $\varphi \in C_0^1(I_\rho)$ , we

can obtain

$$\begin{aligned}
& \int_{I_\rho} \varphi(x)(u_\varepsilon(x, t_2) - u_\varepsilon(x, t_1)) dx \\
&= \int_{I_\rho} \varphi(x) \int_0^1 \frac{\partial u_\varepsilon(x, st_2 + (1-s)t_1)}{\partial s} ds dx \\
&= \Delta t \int_{I_\rho} \varphi(x) \int_0^1 \int_0^T \int_{|x-y|<\varepsilon} u(y, \tau) \cdot \\
&\quad \cdot j_{\varepsilon t}(x-y, st_2 + (1-s)t_1 - \tau) dy d\tau ds dx \\
&= -\Delta t \int_{I_\rho} \varphi(x) \int_0^1 \int_0^T \int_{|x-y|<\varepsilon} u(y, \tau) \cdot \\
&\quad \cdot j_{\varepsilon \tau}(x-y, st_2 + (1-s)t_1 - \tau) dy d\tau ds dx.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Fixed  $(x, t) \in Q_T$ ,  $0 < \varepsilon < t < T - \varepsilon$ , we have  $j_\varepsilon(x-y, t-\tau) \in C_0^1(Q_T)$ , from definition of weak solution

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{|x-y|<\varepsilon} j_{\varepsilon \tau}(x-y, st_2 + (1-s)t_1 - \tau) u(y, \tau) dy d\tau \\
&= - \int_0^T \int_{|x-y|<\varepsilon} |D_y^3 u|^{p-2} D_y^3 u D_y j_\varepsilon(x-y, st_2 + (1-s)t_1 - \tau) u(y, \tau) dy d\tau,
\end{aligned}$$

hence (3.2) is converted into

$$\begin{aligned}
& \int_{I_\rho} \varphi(x)(u_\varepsilon(x, t_2) - u_\varepsilon(x, t_1)) dx \\
&= \Delta t \int_{I_\rho} \varphi(x) \int_0^1 \int_0^T \int_{|x-y|<\varepsilon} |D_y^3 u|^{p-2} D_y^3 u \cdot \\
&\quad \cdot D_y j_\varepsilon(x-y, st_2 + (1-s)t_1 - \tau) u(y, \tau) dy d\tau ds dx \\
&= \Delta t \int_0^1 \int_{I_\rho} D_x \varphi(x) \int_0^T \int_{|x-y|<\varepsilon} |D_y^3 u|^{p-2} D_y^3 u \cdot \\
&\quad \cdot j_\varepsilon(x-y, st_2 + (1-s)t_1 - \tau) u(y, \tau) dy d\tau dx ds.
\end{aligned}$$

Taking

$$\varphi(x) = \varphi_h(x) = \int_{-h}^{(\Delta t)^{1/2} - |x-x_0| - 2h} \delta_h(s) ds,$$

where  $\delta(s) \in C_0^1(\mathbb{R})$ ;  $\delta(s) \geq 0$ ;  $\delta(s) = 0$ , as  $|s| \geq 1$ ;  $\int_{\mathbb{R}} \delta(s) ds = 1$ . For  $h > 0$  define  $\delta_h(s) = \frac{1}{h} \delta(\frac{s}{h})$ .

Hence

$$\int_{I_\rho} \varphi_h(x)(u_\varepsilon(x, t_2) - u_\varepsilon(x, t_1)) dx$$

$$= \Delta t \int_0^1 \int_{I_\rho} \delta_h((\Delta t)^{1/2} - |x - x_0| - 2h) \frac{x_0 - x}{|x - x_0|} J_\varepsilon(|D^3 u|^{p-2} D^3 u) dx ds,$$

Noting that for  $x \in I_\rho$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_h(x) = 1$ , and if  $|x - x_0| < (\Delta t)^{1/2} - h$ , then  $\delta_h((\Delta t)^{1/2} - |x - x_0| - 2h) = 0$ .  $\delta_h \leq \frac{C}{h}$ , and

$$m(I_\rho \setminus I_{(\Delta t)^{1/2} - |x - x_0| - 2h}) \leq Ch.$$

By  $J_\varepsilon(|D^3 u|^{p-2} D^3 u) \leq C$ , therefore

$$\left| \int_{I_\rho} \varphi_h(x) (u_\varepsilon(x, t_2) - u_\varepsilon(x, t_1)) dx \right| \leq C\Delta t.$$

Letting  $h \rightarrow 0$ , we obtain

$$\left| \int_{I_\rho} (u_\varepsilon(x, t_2) - u_\varepsilon(x, t_1)) dx \right| \leq C\Delta t.$$

Applying the mean value theorem, we see that for some  $x^* \in I_\rho$  such that

$$|u_\varepsilon(x^*, t_2) - u_\varepsilon(x^*, t_1)| \leq C(\Delta t)^{1/2}.$$

Taking this into account and using (3.1), it follows that

$$\begin{aligned} & |u_\varepsilon(x, t_2) - u_\varepsilon(x, t_1)| \\ & \leq |u_\varepsilon(x, t_2) - u_\varepsilon(x^*, t_2)| + |u_\varepsilon(x^*, t_2) - u_\varepsilon(x^*, t_1)| + |u_\varepsilon(x^*, t_1) - u_\varepsilon(x, t_1)| \\ & \leq C(\Delta t)^{1/2}, \end{aligned}$$

letting  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we know that  $u$  is Hölder continuous. This completes the proof.

## References

- [1] F. Bai, C. M. Elliott, A. Gardiner, A. Spence & A.M.Stuart, *The viscous Cahn-Hilliard equation, part I: computations*, Nonlinearity, 8(1995), 131-160.
- [2] E. Beretta, M. Bertsch and R. Dal Passo, *Nonnegative solutions of a fourth order nonlinear degenerate parabolic equation*, Arch. Rational Mech. Anal., 129(2)(1995), 175-200.
- [3] F. Bernis, *Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations*, Houston J. Math. 14(3)(1988), 319-352.

- [4] C. M. Elliott and A. M. Stuart, *The viscous Cahn-Hilliard equation. Part II Analysis*, J. Diff. Equations, 128(1996), 387–414.
- [5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. P’olya, *Inequalities*, Cambridge University press, Cambridge, 1952.
- [6] J. R. King, *Two generalisations of the thin film equation*, Math. Comput. Modelling, 34(7-8)(2001), 737-756.
- [7] J. R. King, *Thin film flows and higher order degenerate parabolic equations*, IUTAM Symposium on Free Surface Flows, A. C. King & Y. D. Shikhmurzaev (eds), Kluwer Academic Publishers, 2001, 7-18.
- [8] Liu Changchun, Yin Jingxue and Gao Hongjun, *A generalized thin film equation*, Chin. Ann. Math., 25B(3)(2004), 347-358.
- [9] A. Oron, S. H. Davis and G. Bankoff, *Long scale evolution of thin liquid films*, Rev. Mod. Phys. 69(1997), 931-980.

CHANGCHUN LIU  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, JILIN UNIVERSITY,  
CHANGCHUN 130012, CHINA  
lcc@email.jlu.edu.cn

# Uniqueness, nonpositivity and bounds for solutions of elliptic problems via the maximum principle

Cristian-Paul Danet

## Abstract

A class of nonlinear fourth order elliptic equations is considered. The classical maximum principle is used to deduce that certain functionals defined on solutions of the equation attain a maximum on the boundary of the domain. These maximum principles are then used to prove some uniqueness results and various a priori bounds.

## 1 Introduction

Several authors have used the idea to develop maximum principles for functionals defined on solutions of fourth and higher order elliptic equations (see [1]-[3],[5]-[9],[11],[12], [14],[15]-[18]).

In this paper we shall use this idea in the study of nonlinear fourth order equations of the form

$$\Delta^2 u - G(x, u, \Delta u) + F(x, u) = 0 \quad (1)$$

The maximum principle for second order elliptic equations is well known. Here (Section 2) we shall show that a similar result holds for solutions of boundary value problems involving equation (1), if  $F$  and  $G$  are selected appropriately. This is an extension of a result in [8]. Further, in Section 2, we extend some principles in [2] and [14].

In Section 3 we will be able to conclude from the elementary character of the result on maximum principles derived in Section 2, the uniqueness of solutions for some nonlinear boundary value problems. The nonpositivity of solutions of a nonlinear Dirichlet problem follows also from the maximum principle (see Section 4).

Section 5 of this paper indicates further possible applications of our maximum principles. For instance, we obtain a priori estimates for the gradient of the solution  $u$  and for  $\Delta u$ . Some estimates will lead bounds on quantities important in various physical problems. It is indicated in Section 6 how some results can be extended to the case when  $\Delta u$  is replaced by an uniformly elliptic operator.

## 2 Maximum Principles

Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$  and let  $u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$  be a solution for the equation

$$\Delta^2 u - G(x, u, \Delta u) + F(x, u) = 0 \quad (2)$$

in  $\Omega$ . We assume that  $F(x, u) = \alpha(x) \cdot f(u)$ , where  $\alpha$  and  $f$  satisfy

$$\alpha \in C^2(\overline{\Omega}), \alpha > 0, \Delta \alpha \leq 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}), f \leq 0, f' \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \quad (4)$$

We define the function

$$P = \frac{\int_0^{\Delta u} h(s) ds}{\alpha} + \int_0^u f(s) ds \quad (5)$$

where  $h$  is a smooth function to be specified later. Denoting the derivative with respect to  $x_i$  by a subscript  $i$  and using the summation convention we get

$$\begin{aligned} P_{,i} &= \frac{h(\Delta u) \cdot (\Delta u)_{,i}}{\alpha} - \frac{\alpha_{,i} \cdot \int_0^{\Delta u} h(s) ds}{\alpha^2} + f(u) \cdot u_{,i} \\ \Delta P &= \frac{h(\Delta u) \cdot \Delta^2 u}{\alpha} + \frac{h'(\Delta u) \cdot (\Delta u)_{,i} \cdot (\Delta u)_{,i}}{\alpha} - \frac{2\alpha_{,i} \cdot h(\Delta u) (\Delta u)_{,i}}{\alpha^2} \\ &\quad - \frac{\Delta \alpha \cdot \int_0^{\Delta u} h(s) ds}{\alpha^2} + \frac{2\alpha_{,i} \alpha_{,i} \cdot \int_0^{\Delta u} h(s) ds}{\alpha^3} + f'(u) u_{,i} u_{,i} + f(u) \Delta u \end{aligned}$$

Now using equation (2), adding and subtracting  $\frac{(\Delta u)_{,i} (\Delta u)_{,i}}{\alpha}$ ,  $\frac{\alpha_{,i} \alpha_{,i} h^2(\Delta u)}{\alpha^3}$  we obtain

$$\begin{aligned} \Delta P &= h(\Delta u) \cdot G(x, u, \Delta u) + \left| \frac{(\Delta u)_{,i}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha_{,i} h(\Delta u)}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \right|^2 + \\ &\quad + \frac{(\Delta u)_{,i} (\Delta u)_{,i}}{\alpha} [h'(\Delta u) - 1] + \frac{2\alpha_{,i} \alpha_{,i}}{\alpha^3} \left( \int_0^{\Delta u} h(s) ds - \frac{h^2(\Delta u)}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta \alpha}{\alpha^2} \int_0^{\Delta u} h(s) ds + f(u) (\Delta u - h(\Delta u)) + f'(u) u_{,i} u_{,i}. \end{aligned}$$

If we assume that

$$h(s) \geq s, \quad h'(s) \geq 1 \quad \text{in } I = (a, b), \quad a < 0, b > 0 \quad (6)$$

$$\int_0^\xi h(s) ds \geq \frac{h^2(\xi)}{2} \quad \forall \xi \in I \quad (7)$$

$$h(s) \cdot G(x, t, s) \geq 0 \quad \forall (x, t, s) \in \Omega \times \mathbb{R} \times I \quad (8)$$

we have  $\Delta P \geq 0$  in  $\Omega$ , and by the maximum principle for elliptic operators [4] we arrive at our first result:



THEOREM 1. If  $u$  is a  $C^4(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$  solution of (2) in  $\Omega$ , where  $F(x, u) = \alpha(x) \cdot f(u)$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f \leq 0$ ,  $f' \geq 0$  in  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\Delta\alpha \leq 0$  in  $\Omega$  and if  $h \in C^1(I)$  satisfies (6), (7), and (8) then

$$P = \frac{\int_0^{\Delta u} h(s)ds}{\alpha} + \int_0^u f(s)ds$$

takes its maximum on  $\partial\Omega$ . If  $\alpha \equiv \text{const}$  in  $\Omega$  then the condition (7) is not needed.

REMARK 1. If we take  $h(s) = s$  (which clearly satisfies (6), (7)) the condition  $f \leq 0$  in Theorem 1 can be omitted. Further, if we choose  $G(x, t, s) = \beta(x) \cdot s^k$ ,  $k = 1, 3, \dots$ ,  $\beta \geq 0$  in  $\Omega$  we obtain the maximum principle derived in [5], Section 2.

REMARK 2. The special case  $P(x) = (\Delta u)^2 + 2 \int_0^u f(s)ds$  was also used independently by the author in [2].

A consequence of Theorem 1 is the following weak maximum principle:

COROLLARY 2. Let  $u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$  be a solution for the problem

$$\begin{cases} \Delta^2 u - G(x, u, \Delta u) + F(x, u) = 0 & \text{in } \Omega \\ \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (9)$$

where  $F$  and  $G$  satisfy the requirements

$$F(x, u) = \alpha(x) \cdot f(u)$$

$$\alpha \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \alpha > 0 \text{ in } \Omega \quad (10)$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \quad f > 0, \quad f' \geq 0 \text{ in } \mathbb{R} \quad (11)$$

$$s \cdot G(x, t, s) \geq 0 \text{ in } \Omega \times \mathbb{R} \times I \quad (12)$$

Then

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

*Proof.* In view of Theorem 1, the continuous function in  $\overline{\Omega}$

$$P = \frac{(\Delta u)^2}{2\alpha} + \int_0^u f(s)ds$$

attains its maximum on  $\partial\Omega$ , i.e.

$$P(x) \leq P(x_0)$$

for all  $x \in \overline{\Omega}$  and for some  $x_0 \in \partial\Omega$ .

Since  $\Delta u = 0$  on  $\partial\Omega$  and  $f > 0$  in  $\mathbb{R}$  we obtain the desired result.  $\square$

If the condition  $f > 0$  in  $\mathbb{R}$  is not satisfied, it is still possible to derive a similar maximum principle.

COROLLARY 3. *Let  $u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$  be a solution for the boundary value problem*

$$\begin{cases} \Delta^2 u - G(x, u, \Delta u) + \alpha(x) \cdot u^k = 0 & \text{in } \Omega \\ \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

where  $k = 1, 3, \dots$ ,  $\alpha$  and  $G$  satisfy the conditions (10) and (12).

Then

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

REMARK 3. It is of course possible to prove a strong maximum principle for solutions of the boundary value problems (9) and (13), i.e. if  $u$  is a non-constant solution of the problem (9) ((13)), then  $u$  ( $|u|$ ) cannot attain its maximum in any interior point of  $\Omega$ .

The proof can be obtained as follows.

If  $u \not\equiv \text{const.}$ , then  $|\nabla u|^2 = u_{,i} u_{,i} \not\equiv 0$ . Since  $f' \geq 0$  in  $\mathbb{R}$  we see that  $\Delta P \not\equiv 0$  in  $\Omega$ . Hence  $P$  is a non-constant function and we obtain the proof from the strong maximum principle of Hopf [13].

REMARK 4. Our Corollary 3 contains the earlier result in [8].

REMARK 5. We note that other maximum principles can be obtained if  $f$  is an odd, nondecreasing function (see [11]).

REMARK 6. The condition  $\Delta u = 0$  on  $\partial\Omega$  cannot be omitted in Corollary 3. This is shown by the following one dimensional example:

$$\begin{cases} u^{(4)} + 4u = 0 & \text{in } \Omega = (0, \frac{\pi}{3}) \\ u''(0) = -2 \\ u''(\frac{\pi}{3}) = 2e^{-\pi} \end{cases} \quad (14)$$

The function  $u(x) = e^{-x} \cdot \sin(x)$  satisfies (14) and

$$\max_{\partial\Omega} |u| = u\left(\frac{\pi}{3}\right) < \max_{\bar{\Omega}} |u| = u\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

We now consider the equation

$$\Delta^2 u - G(x, u, \Delta u) + F(x, u) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (15)$$

where  $\Omega$  is a bounded domain in  $\mathbb{R}^2$  and  $G(x, u, \Delta u) = \varphi(u^2) \cdot \Delta u$ , and show that under appropriate conditions the function

$$R = 2|\nabla u|^2 - 2u\Delta u + \int_0^{u^2} \varphi(s) ds$$

takes its maximum on  $\partial\Omega$ .

We compute

$$\begin{aligned} R_{,k} &= 4u_{,i}u_{,ik} - 2u_{,k}\Delta u - 2u\Delta u_{,k} + 2uu_{,k}\varphi(u^2) \\ \Delta R &= 4u_{,i}u_{,ikk} + 4u_{,ik}u_{,ik} - 2(\Delta u)^2 - 4u_{,i}u_{,ikk} - 2u\Delta^2 u + \\ &\quad + 2u\Delta u\varphi(u^2) + 2|\nabla u|^2\varphi(u^2) + 4u^2|\nabla u|^2\varphi'(u^2) = \\ &= 4u_{,ik}u_{,ik} - 2(\Delta u)^2 + 2uF(x, u) + 2|\nabla u|^2\varphi(u^2) + 4u^2|\nabla u|^2\varphi'(u^2). \end{aligned}$$

Now, if  $\varphi$  and  $F$  satisfy

$$\varphi(0) \geq 0 \tag{16}$$

$$\varphi'(s) \geq 0 \quad \text{for } s \geq 0 \tag{17}$$

$$s \cdot F(x, s) \geq 0 \quad \text{for } (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R} \tag{18}$$

we obtain that  $R$  is subharmonic in  $\Omega$ , since in two dimensions, we have

$$2u_{,ij}u_{,ij} \geq (\Delta u)^2$$

Consequently, we deduce the following extension of Schaefer's result [14] which extends a classical result of Miranda (see [19], p.175).

**THEOREM 4.** *Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^2$ . If  $u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$  is a solution of (15), where the function  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$  satisfies (16), (17) and  $F$  satisfies (18), then*

$$R = 2|\nabla u|^2 - 2u\Delta u + \int_0^{u^2} \varphi(s)ds$$

*assumes its maximum on  $\partial\Omega$ .*

**REMARK 7.** If  $\varphi \equiv 1$  and  $F(x, u) = f(u)$ , where  $sf(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$  then Theorem 3 in [2] becomes a particular case of our theorem.

The following theorem now generalizes Theorem 1 in [2].

**THEOREM 5.** *Let  $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$  be a solution of (2), where  $\Omega$  is a bounded domain in  $\mathbb{R}^N, N \leq 4$ . If  $G(x, u, \Delta u) = \gamma\Delta u, \gamma \geq 0$  and if  $f \in C^1(\mathbb{R})$  is an increasing function, then*

$$S = \gamma|\nabla u|^2 - 2\nabla u \nabla(\Delta u) + 2u_{,ij}u_{,ij}$$

*attains its maximum value on the boundary of  $\Omega$ .*

The proof of the preceding theorem is based on an inequality due to Payne [12] and the maximum principle. See [2] for details.

Theorem 5 may be used to derive gradient bounds (see Section 5).

### 3 Uniqueness results

Often we deduce uniqueness theorems for second order boundary value problems with the help of maximum principles.

A corresponding remark is true in our case.

**COROLLARY 6.** *Suppose that  $\alpha, f, G$  satisfy the requirements of Theorem 1, except  $f \leq 0$  in  $\mathbb{R}$ . If  $f(0) = 0$  and  $G(x, 0, 0) = 0, \forall x \in \Omega$ , then the trivial solution is the only classical solution of the problem*

$$\begin{cases} \Delta^2 u - G(x, u, \Delta u) + \alpha(x) \cdot f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (19)$$

The proof is achieved exactly as that of Theorem 2, [5].

**COROLLARY 7.** *The boundary value problem*

$$\begin{cases} \Delta^2 u - A(x, \Delta u) + \alpha(x) \cdot u = \varphi(x) & \text{in } \Omega \\ u = \psi(x) & \text{on } \partial\Omega \\ \Delta u = \chi(x) & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (20)$$

where

i)  $\varphi, \chi \in C^0(\overline{\Omega}), \psi \in C^2(\overline{\Omega})$ ,

ii)  $\alpha > 0$  and  $\Delta\alpha \leq 0$  in  $\Omega$ ,

iii) the function  $A = A(x, z)$  is non-increasing in  $z$  for every  $x \in \Omega$ ,

iv) the function  $A = A(x, z)$  is continuously differentiable with respect to the  $z$  variable in  $\Omega \times \mathbb{R}$ ,

has a unique solution.

*Proof.* If  $u$  and  $v$  are two solutions of (20), the difference  $w = u - v$  satisfies the homogeneous problem

$$\begin{cases} \Delta^2 w + \beta(x)\Delta w + \alpha(x) \cdot w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \Delta w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (21)$$

where  $\beta \leq 0$  in  $\Omega$ . Note that we have used the mean value theorem. Using Corollary 6 we obtain  $w \equiv 0$  in  $\Omega$ . Hence  $u = v$ .  $\square$

With the help of the Theorem 4 we can now prove the following extensions of Theorem 4 and Theorem 5 in [14].

**COROLLARY 8.** *Let  $\Omega$  be a bounded plane domain, with smooth boundary. If  $u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$  is a solution of*

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \varphi(u^2)\Delta u + F(x, u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (22)$$

where  $\varphi, F$  satisfy the conditions of Theorem 4 and  $F(x, 0) = 0$  in  $\Omega$ , then  $u \equiv 0$ .

If  $F(x, 0) \neq 0$  for some  $x \in \Omega$ , then no classical solution of (22) exists.

*Proof.* By Theorem 4 we have

$$2|\nabla u|^2 - 2u\Delta u + \int_0^{u^2} \varphi(s)ds \leq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Integrating over  $\Omega$ , we obtain

$$4 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} \left( \int_0^{u^2} \varphi(s)ds \right) \leq 0$$

and hence  $|\nabla u| \equiv 0$  in  $\Omega$ . Consequently  $u \equiv 0$  in  $\Omega$  (because we seek only smooth solutions).  $\square$

If  $F(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega$  and  $\varphi, F$  satisfy the requirements of Theorem 4 we then obtain the following result.

**COROLLARY 9.** *The only  $C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$  solution of the boundary value problem*

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \varphi(u^2)\Delta u + F(x, u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (23)$$

*is the trivial solution. Here  $\Omega$  is assumed to be a bounded smooth plane domain, with curvature  $K$  of  $\partial D$  positive.*

*Proof.* In view of Theorem 4 the function  $R$  attains its maximum at a point  $P$  on  $\partial\Omega$ . We employ the Hopf maximum principle [13] to obtain  $\frac{\partial R}{\partial n}(P) > 0$  if  $R$  is not a constant in  $\bar{\Omega}$ .

Since  $u = 0$  on  $\partial\Omega$  we have  $|\nabla u| = \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|$  on  $\partial\Omega$ , and hence

$$\frac{\partial R}{\partial n} = 4 \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \quad \text{on } \partial\Omega.$$

Now we follow Schaefer [14].

By the boundary conditions the relation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + K \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \Delta u \quad \text{on } \partial\Omega \quad (\text{see [19], p.46})$$

becomes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = -K \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{on } \partial\Omega.$$

Thus at  $P$  we find

$$\frac{\partial R}{\partial n} = -4K \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \quad (24)$$

which is a contradiction. Consequently,  $R \equiv \text{const}$  in  $\bar{\Omega}$ .

If  $R \equiv \text{const}$  in  $\bar{\Omega}$ , we obtain  $\frac{\partial R}{\partial n} = 0$  on  $\partial\Omega$ .

By (24) it follows that  $|\nabla u|^2 = 0$  on  $\partial\Omega$  and hence

$$R \equiv 0 \quad \text{in } \bar{\Omega}.$$

The result follows on integrating over  $\Omega$ .  $\square$

## 4 Nonpositivity

In [5] the functional  $P = \frac{(\Delta u)^2}{p} + 2 \int_0^u f(s)ds$  was used to deduce that  $u \leq 0$  in  $\bar{\Omega}$  if  $u$  is a classical solution of

$$\begin{cases} \Delta^2 u - q(x)(\Delta u)^K + p(x)f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where  $f > 0$  in  $\mathbb{R}$ ,  $f' \geq 0$  in  $\mathbb{R}$ ,  $p > 0$ ,  $\Delta p \leq 0$ ,  $q \geq 0$ , in  $\Omega$  and  $K = 2m - 1 > 0$ . We relax here the boundary conditions and state:

COROLLARY 10. *If  $u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$  is a solution of*

$$\begin{cases} \Delta^2 u - G(x, u, \Delta u) + \alpha(x)f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u \leq 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

*under the conditions of Corollary 2, then  $u \leq 0$  in  $\bar{\Omega}$ .*

## 5 Bounds

We may use the functional  $S$  to derive bounds for the gradient of the solution of the boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \gamma \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (25)$$

under the conditions of Theorem 5.

Following Payne [12], we can show that

$$\max_{\bar{\Omega}} |\nabla u|^2 \leq C \cdot \max_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \quad (26)$$

where  $u$  is a solution of (25) and  $\gamma$  is a positive constant.

Note that the constant  $C$  depends only on the diameter of  $\Omega$ .

REMARK 8. If  $\gamma = 0$  and  $f(u) = -\delta$ ,  $\delta > 0$ , the problem (25) may be interpreted as the equation of a thin elastic plate under a constant load, clamped on the boundary.

From the subharmonicity of the functional P we obtain bounds for  $\Delta u$  for the equation:

$$\Delta^2 u - G(x, u, \Delta u) + \alpha(x)f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (27)$$

under the conditions of Corollary 2 (except  $f > 0$  in  $\mathbb{R}$ ) and  $f(0) = 0$ .

$$\max_{\bar{\Omega}} \frac{(\Delta u)^2}{\alpha} \leq \max_{\partial\Omega} \frac{(\Delta u)^2}{\alpha} + 2 \max_{\partial\Omega} \left( \int_0^u f(s) ds \right)$$

If the nonlinearities  $G$  and  $f$  satisfy  $G(x, u, \Delta u) \equiv 0$  and  $f(u) = K_1 u + K_2 u^3$ , the equation (27) where  $\alpha \equiv 1$ ,  $K_1, K_2$  are positive constants, occurs in the bending of cylindrical shells and in plate theory [10].

If  $u$  is a smooth solution of

$$\Delta^2 u - G(x, u, \Delta u) + \alpha(x)f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

such that  $u(y) \geq 0$  for some  $y \in \bar{\mathbb{R}}$ , then Theorem 1 tells us that

$$\max_{\bar{\Omega}} \left( \int_0^{\Delta u} h(s) ds \right) \leq \max_{\partial\Omega} \left( \int_0^{\Delta u} h(s) ds \right) + \max_{\partial\Omega} \left( \int_0^u f(s) ds \right).$$

Here  $\alpha \equiv \text{const.} > 0$ ,  $h(s) \leq s$ ,  $h'(s) \geq 1$  in  $I$ ,  $f, f' \geq 0$  in  $\mathbb{R}$  and (8) is fulfilled. Note that such a function  $h$  exists. For example:  $h(s) = s - \frac{1}{s+\gamma}$ , ( $s > -\gamma$ ),  $\gamma > 0$ .

As a final consequence of our maximum principles we consider the problem

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \gamma \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (28)$$

under the conditions of Theorem 5.

Using the relation  $\int_{\Omega} u_{,ij} u_{,ij} = \int_{\Omega} (\Delta u)^2$  if  $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$  on  $\partial\Omega$  and Theorem 5 we obtain

$$\gamma \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2 \int_{\Omega} (\Delta u)^2 \leq 2\mathcal{A} \max_{\partial\Omega} (\Delta u)^2,$$

where  $\mathcal{A}$  is the area(volume) of  $\Omega$ .

Choosing  $\gamma = 0$  and  $f(u) = -c$ , where  $c$  is a positive constant, we obtain a bound for the potential energy of the plate in the clamped plate problem, namely

$$E_p = \int_{\Omega} (\Delta u)^2 \leq \mathcal{A} \max_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \quad (29)$$

where  $\mathcal{A}$  is the area of  $\Omega$ .

REMARK 9. A sharper form of (29) was obtained in [12].

## 6 Concluding remarks

It is possible to extend Theorem 1 to the case of more general elliptic equations

$$L(Lu) - G(x, u, Lu) + \alpha(x)f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (30)$$

where  $Lu = a_{ij}(x)u_{,ij}$ ,  $L$  is uniformly elliptic in  $\Omega$ , i.e.  $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda\xi_i\xi_i$  for any vector  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$  and some constant  $\lambda > 0$  and  $a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega})$ .

The function  $P = \frac{\int_0^{Lu} h(s)ds}{\alpha} + \int_0^u f(s)ds$  can be used.  $P$  satisfies

$$\begin{aligned} a_{ij}P_{,ij} = & \frac{h(Lu)G(x,u,Lu)}{\alpha} + \frac{a_{ij}(Lu)_{,i}(Lu)_{,j}}{\alpha} (h'(Lu) - 1) + \\ & \frac{2\alpha_{,i}\alpha_{,j}a_{ij}}{\alpha^3} \left( \int_0^{Lu} h(s)ds - \frac{h^2(Lu)}{2} \right) - \frac{a_{ij}\alpha_{,ij}}{\alpha^2} \int_0^{Lu} h(s)ds \\ & + \frac{a_{ij}}{\alpha} \left[ (Lu)_{,i} - \frac{h(Lu)}{\alpha}\alpha_{,i} \right] \left[ (Lu)_{,j} - \frac{h(Lu)}{\alpha}\alpha_{,j} \right] \\ & + f(u)(Lu - h(Lu)) + a_{ij}u_{,i}u_{,j}f'(u) \end{aligned} \quad (31)$$

If  $\alpha \in C^2(\Omega)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $L(\alpha) \leq 0$  in  $\Omega$  and  $f, h$  satisfy (4),(6)-(8), then the right side of (31) can be made nonnegative.

In the paper [11], the authors obtained similar results for more equations of the form

$$L(b(x)g(u)Lu) - G(x, u, u_{,i}, Lu) + \alpha(x)f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

but under the restriction  $h(s) = s$ .

ACKNOWLEDGEMENT. The manuscript was written at the Technical University of Munich. The author is grateful to this institution. The work was supported by an KAAD grant.

## References

- [1] C. Cosner and P.W. Schaefer, "On the development of functionals which satisfy a maximum principle", *Appl. Anal.*, **26**(1987), 45-60.
- [2] C.-P. Danet, "Some Maximum principles for fourth order elliptic equations", *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, **28**(2001), 134-140.
- [3] D.R. Dunninger, "Maximum principles for solutions of some fourth order elliptic equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **37**(1972), 655-658.
- [4] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer - Verlag, Berlin., 2001.
- [5] V.B. Goyal and P.W. Schaefer, "On a subharmonic functional in fourth order nonlinear elliptic problems", *J. Math. Anal. Appl.*, **83**(1981), 20-25.



- 
- [6] V.B. Goyal and P.W. Schaefer, "Liouville theorems for elliptic systems and nonlinear equations of fourth order", *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **91A**(1982), 235-242.
- [7] V.B. Goyal and P.W. Schaefer, "Comparison principles for some fourth order elliptic problems", *Lecture Notes in Mathematics* **No. 964**(1982), Springer-Verlag, Berlin, 272-279.
- [8] V.B. Goyal and K.P. Singh, "Maximum principles for a certain class of semilinear elliptic partial differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **69**(1979), 1-7.
- [9] S. Goyal and V.B. Goyal, "Liouville-type and uniqueness results for a class of elliptic equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **151**(1990), 405-416.
- [10] V. Komkov, "Certain estimates for solutions of nonlinear elliptic differential equations applicable to the theory of thin plates", *SIAM J. Appl. Math.*, **28**(1975), 24-34.
- [11] C.E. Nichols, P.W. Schaefer, "A maximum principle in nonlinear fourth order elliptic equations", *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **No. 109**(1987), Dekker, New York.
- [12] L.E. Payne, "Some remarks on maximum principles", *J. Analyse Math.*, **30**(1976), 421-433.
- [13] M.H. Protter and H.F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [14] P.W. Schaefer, "On a maximum principle for a class of fourth order semilinear elliptic equations", *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A.*, **77**(1977), 319-323.
- [15] P.W. Schaefer, "Uniqueness in some higher order elliptic boundary value problems", *Z. Angew. Math. Mech.*, **29**(1978), 693-697.
- [16] P.W. Schaefer, "Some maximum principles in semilinear elliptic equations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **98**(1986), 97-102.
- [17] P.W. Schaefer, "Pointwise estimates in a class of fourth order nonlinear elliptic equations", *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, **38**(1987), 477-479.
- [18] P.W. Schaefer, "Solution, gradient and laplacian bounds in some nonlinear fourth order elliptic equations", *SIAM J. Math. Anal.*, **18**(1987), 430-434.
- [19] R.P. Sperb, *Maximum principles and their applications*, Academic Press, New York, 1981.

CRISTIAN-PAUL DANET  
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS,  
UNIVERSITY OF CRAIOVA  
AL.I. CUZA ST.13,200585 CRAIOVA, ROMANIA  
[cristiandanet@yahoo.com](mailto:cristiandanet@yahoo.com)

# Boundary value problems in complex analysis I

Heinrich Begehr

## Abstract

A systematic investigation of basic boundary value problems for complex partial differential equations of arbitrary order is started in these lectures restricted to model equations. In the first part [3] the Schwarz, the Dirichlet, and the Neumann problems are treated for the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation. The fundamental tools are the Gauss theorem and the Cauchy-Pompeiu representation. The principle of iterating these representation formulas is introduced which will enable treating higher order equations. Those are studied in a second part of these lectures.

The whole course was delivered at the Simón Bolívar University in Caracas in May 2004.

## 1 Introduction

Complex analysis is one of the most influential areas in mathematics. It has consequences in many branches like algebra, algebraic geometry, geometry, number theory, potential theory, differential equations, dynamical systems, integral equations, integral transformations, harmonic analysis, global analysis, operator theory and many others. It also has a lot of applications e.g. in physics. Classical ones are elasticity theory, fluid dynamics, shell theory, underwater acoustics, quantum mechanics etc.

In particular the theory of boundary value problems for analytic functions as the Riemann problem of linear conjugacy and the general Riemann-Hilbert problem has had a lot of influence and even has initiated the theory of singular integral equations and index theory.

Complex analysis is one of the main subjects in university curricula in mathematics. It is in fact a simply accessible theory with more relations to other subjects in mathematics than other topics. In complex analysis all structural concepts in mathematics are stressed. Algebraic, analytic and topological concepts occur and even geometry is involved. Also questions of ordering sets may be discussed in connection with complex analysis. Gauss, Cauchy, Weierstraß and Riemann were the main initiators of complex analysis and there was more

than a century of rapid development. Nowadays complex analysis is not anymore in the center of mathematical research. But there are still activities in this area and problems not yet solved. One of these subjects, complex methods for partial differential equations, will be presented in these lectures.

Almost everything in this course is elementary in the sense that the results are just consequences of the main theorem of calculus in the case of several variables, i.e. of the Gauss divergence theorem. Some nonelementary results will be used as properties of some singular integral operators. They will be just quoted and somebody interested in the background has to consult references given. Everything else is just combinatorics. Hierarchies of differential equations, of integral representation formulas, of kernel functions, of Green and Neumann functions arise by iterating processes leading from lower to higher order subjects. In this sense everything is evident. As Kronecker once has expressed it, mathematics is the science where everything is evident. The beauty of mathematics is partly reflected by esthetic formulas. All this will be seen below.

## 2 The complex Gauss theorems

In complex analysis it is convenient to use the complex partial differential operators  $\partial_z$  and  $\partial_{\bar{z}}$  defined by the real partial differential operators  $\partial_x$  and  $\partial_y$  as

$$2\partial_z = \partial_x - i\partial_y, \quad 2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y. \quad (1)$$

Formally they are deducible by treating

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

as independent variables using the chain rule of differentiation.

A complex-valued function  $w = u + iv$  given by two real-valued functions  $u$  and  $v$  of the real variables  $x$  and  $y$  will be denoted by  $w(z)$  although being rather a function of  $z$  and  $\bar{z}$ . In case when  $w$  is independent of  $\bar{z}$  in an open set of the complex plane  $\mathbb{C}$  it is an analytic function. It then is satisfying the Cauchy-Riemann system of first order partial differential equations

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (2)$$

This is equivalent to

$$w_{\bar{z}} = 0 \quad (2')$$

as follows from

$$2\partial_{\bar{z}}w = (\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u). \quad (3)$$

In that case also

$$\begin{aligned} 2\partial_z w &= (\partial_x - i\partial_y)(u + iv) = \partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u) \\ &= 2\partial_x w = -2i\partial_y w = 2w' . \end{aligned} \quad (4)$$

Using these complex derivatives the real Gauss divergence theorem for functions of two real variables being continuously differentiable in some regular domain, i.e. a bounded domain  $D$  with smooth boundary  $\partial D$ , and continuous in the closure  $\bar{D} = D \cup \partial D$  of  $D$ , easily can be given in complex forms.

**Gauss Theorem (real form)** Let  $(f, g) \in C^1(D; \mathbb{R}^2) \cap C(\bar{D}; \mathbb{R}^2)$  be a differentiable real vector field in a regular domain  $D \subset \mathbb{R}^2$  then

$$\int_D (f_x(x, y) + g_y(x, y)) dx dy = - \int_{\partial D} (f(x, y) dy - g(x, y) dx) . \quad (5)$$

**Remark** The two-dimensional area integral on the left-hand side is taken for  $\operatorname{div}(f, g) = f_x + g_y$ . The boundary integral on the right-hand side is just the one dimensional integral of the dot product of the vector  $(f, g)$  with the outward normal vector  $\nu = (\partial_s y, -\partial_s x)$  on the boundary  $\partial D$  with respect to the arc length parameter  $s$ . This Gauss Theorem is the main theorem of calculus in  $\mathbb{R}^2$ .

**Gauss Theorems (complex form)** Let  $w \in C^1(D; \mathbb{C}) \cap C(\bar{D}; \mathbb{C})$  in a regular domain  $D$  of the complex plane  $\mathbb{C}$  then

$$\int_D w_{\bar{z}}(z) dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z) dz \quad (6)$$

and

$$\int_D w_z(z) dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z) d\bar{z} . \quad (6')$$

**Proof** Using (3) and applying (5) shows

$$\begin{aligned} 2 \int_D w_{\bar{z}}(z) dx dy &= \int_D (u_x(z) - v_y(z)) dx dy + i \int_D (v_x(z) + u_y(z)) dx dy \\ &= - \int_{\partial D} (u(z) dy + v(z) dx) - i \int_{\partial D} (v(z) dy - u(z) dx) \\ &= i \int_{\partial D} w(z) dz \end{aligned}$$

This is formula (6). Taking complex conjugation and observing

$$\overline{\partial_{\bar{z}}w} = \partial_z \bar{w}$$

and replacing  $\bar{w}$  by  $w$  leads to (6').

**Remark** Formula (6) contains the Cauchy theorem for analytic functions

$$\int_{\gamma} w(z) dz = 0$$

as particular case. If  $\gamma$  is a simple closed smooth curve and  $D$  the inner domain bounded by  $\gamma$  then this integral vanishes as (2') holds.

### 3 Cauchy-Pompeiu representation formulas

As from the Cauchy theorem the Cauchy formula is deduced from (6) and (6') representation formulas can be deduced.

**Cauchy-Pompeiu representations** *Let  $D \subset \mathbb{C}$  be a regular domain and  $w \in C^1(D; \mathbb{C}) \cap C(\bar{D}; \mathbb{C})$ . Then using  $\zeta = \xi + i\eta$  for  $z \in D$*

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \quad (7)$$

and

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \quad (7')$$

hold.

**Proof** Let  $z_0 \in D$  and  $\varepsilon > 0$  be so small that

$$\overline{K_{\varepsilon}(z_0)} \subset D, \quad K_{\varepsilon}(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Denoting  $D_{\varepsilon} = D \setminus \overline{K_{\varepsilon}(z_0)}$  and applying (6) gives

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial D_{\varepsilon}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - \int_{D_{\varepsilon}} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = 0.$$

Introducing polar coordinates

$$\int_{\overline{K_{\varepsilon}(z_0)}} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = \int_0^{\varepsilon} \int_0^{2\pi} w_{\bar{\zeta}}(z_0 + te^{i\varphi}) e^{-i\varphi} d\varphi dt$$

and it is seen that

$$\int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = \int_{D_\varepsilon} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} + \int_{\overline{K_\varepsilon(z_0)}} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0}$$

exists and hence

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = \int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} .$$

Once again using polar coordinates

$$\int_{\partial D_\varepsilon} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - \int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} ,$$

where

$$\int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = i \int_0^{2\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi ,$$

is seen to give

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - 2\pi i w(z_0) .$$

This proves (7). Formula (7') can be either deduced similarly or by complex conjugation as in the preceding proof.

**Definition 1** For  $f \in L_1(D; \mathbb{C})$  the integral operator

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} , \quad z \in \mathbb{C} ,$$

is called Pompeiu operator.

The Pompeiu operator, see [10], is investigated in detail in connection with the theory of generalized analytic functions in Vekua's book [12], see also [1]. Its differentiability properties are important here in the sequel. For generalizations, see e.g. [2], for application [6, 3].

**Theorem 1** If  $f \in L_1(D; \mathbb{C})$  then for all  $\varphi \in C_0^1(D; \mathbb{C})$

$$\int_D Tf(z)\varphi_{\bar{z}}(z) dx dy + \int_D f(z)\varphi(z) dx dy = 0 \tag{8}$$

Here  $C_0^1(D; \mathbb{C})$  denotes the set of complex-valued functions in  $D$  being continuously differentiable and having compact support in  $D$ , i.e. vanishing near the boundary.

**Proof** From (7) and the fact that the boundary values of  $\varphi$  vanish at the boundary

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D \varphi_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = (T\varphi_{\bar{\zeta}})(z)$$

follows. Thus interchanging the order of integration

$$\int_D Tf(z) \varphi_{\bar{z}}(z) dx dy = -\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \int_D \varphi_{\bar{z}}(z) \frac{dx dy}{\zeta - z} d\xi d\eta = -\int_D f(\zeta) \varphi(\zeta) d\xi d\eta$$

Formula (8) means that

$$\partial_{\bar{z}} Tf = f \tag{9}$$

in distributional sense.

**Definition 2** Let  $f, g \in L_1(D; \mathbb{C})$ . Then  $f$  is called *generalized (distributional) derivative of  $g$  with respect to  $\bar{z}$*  if for all  $\varphi \in C_0^1(D; \mathbb{C})$

$$\int_D g(z) \varphi_{\bar{z}}(z) dx dy + \int_D f(z) \varphi(z) dx dy = 0 .$$

This derivative is denoted by  $f = g_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} g$ .

In the same way generalized derivatives with respect to  $z$  are defined. In case a function is differentiable in the ordinary sense it is also differentiable in the distributional sense and both derivatives coincide.

Sometimes solutions to differential equations in distributional sense can be shown to be differentiable in the classical sense. Then generalized solutions become classical solutions to the equation. An example is the Cauchy-Riemann system (2'), see [12, 1].

More delicate is the differentiation of  $Tf$  with respect to  $z$ . For  $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$  obviously  $Tf$  is analytic and its derivative

$$\partial_z Tf(z) = \Pi f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2} . \tag{10}$$

That this holds in distributional sense also for  $z \in D$  almost everywhere when  $f \in L_p(D; \mathbb{C})$ ,  $1 < p$ , and the integral on the right-hand side is understood as a



Cauchy principal value integral

$$\int_D f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus K_\varepsilon(z)} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

is a deep result of Calderon-Zygmund [7].

With respect to boundary value problems a modification of the Cauchy-Pompeiu formula is important in the case of the unit disc  $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ .

**Theorem 2** Any  $w \in C^1(\mathbb{D}; \mathbb{C}) \cap C(\overline{\mathbb{D}}; \mathbb{C})$  is representable as

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} w(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Im} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left( \frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\overline{zw_{\bar{\zeta}}(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta, \quad |z| < 1. \end{aligned} \tag{11}$$

**Corollary 1** Any  $w \in C^1(\mathbb{D}; \mathbb{C}) \cap C(\overline{\mathbb{D}}; \mathbb{C})$  can be represented as

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} w(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left( \frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta \\ &\quad + i \operatorname{Im} w(0), \quad |z| < 1. \end{aligned} \tag{12}$$

**Proof** For fixed  $z, |z| < 1$ , formula (6) applied to  $\mathbb{D}$  shows

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \frac{\bar{z} d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| < 1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta} d\xi d\eta = 0.$$

Taking the complex conjugate and adding this to (7) in the case  $D = \mathbb{D}$  gives for  $|z| < 1$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left( \frac{\zeta w(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\overline{zw_{\bar{\zeta}}(\zeta)}}{\zeta - z} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left( \frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\overline{zw_{\bar{\zeta}}(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta,$$

where  $\bar{\zeta} d\zeta = -\zeta d\bar{\zeta}$  for  $|\zeta| = 1$  is used. This is (11). Subtracting  $i \operatorname{Im} w(0)$  from (11) proves (12).

**Remark** For analytic functions (12) is the Schwarz-Poisson formula

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} w(\zeta) \left( \frac{2\zeta}{\zeta - z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} + i \operatorname{Im} w(0) . \quad (12')$$

The kernel

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{2\zeta}{\zeta - z} - 1$$

is called the Schwarz kernel. Its real part

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - 1 = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

is the Poisson kernel. The Schwarz operator

$$S\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \varphi(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

for  $\varphi \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R})$  is known to provide an analytic function in  $\mathbb{D}$  satisfying

$$\operatorname{Re} S\varphi = \varphi \text{ on } \partial\mathbb{D}$$

see [11] in the sense

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} S\varphi(z) = \varphi(\zeta) , \quad \zeta \in \partial\mathbb{D} ,$$

for  $z$  in  $\mathbb{D}$  tending to  $\zeta$ . Poisson has proved the respective representation for harmonic functions, i.e. to solutions for the Laplace equation

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$$

in  $\mathbb{D}$ .  $\operatorname{Re} w$  for analytic  $w$  is harmonic.

The Schwarz operator can be defined for other simply and even multi-connected domains, see e.g. [1].

Formula (12) is called the Cauchy-Schwarz-Poisson-Pompeiu formula. Rewriting it according to

$$w_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D} , \quad \operatorname{Re} w = \varphi \text{ on } \partial\mathbb{D} , \quad \operatorname{Im} w(0) = c ,$$

then

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \varphi(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta + ic \quad (12'')$$

is expressed by the given data. Applying the result of Schwarz it is easily seen that taking the real part on the right-hand side and letting  $z$  tend to a boundary point  $\zeta$  this tends to  $\varphi(\zeta)$ .

Differentiating with respect to  $\bar{z}$  as every term on the right-hand side is analytic besides the  $T$ -operator applied to  $f$  this gives  $f(z)$ . Also for  $z = 0$  besides  $ic$  all other terms on the right-hand side are real.

Hence, (12'') is a solution to the so-called Dirichlet problem

$$w_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \operatorname{Re} w = \varphi \text{ on } \partial\mathbb{D}, \operatorname{Im} w(0) = c.$$

This shows how integral representation formulas serve to solve boundary value problems. The method is not restricted to the unit disc but in this case the solutions to the problems are given in an explicit way.

#### 4 Iteration of integral representation formulas

Integral representation formulas for solutions to first order equations can be used to get such formulas for higher order equations via iteration. The principle will be elucidated by iterating the main theorem of calculus in one real variable.

**Main Theorem of Calculus** *Let  $(a, b)$  be a segment of the real line  $a < b$  and  $f \in C^1((a, b); \mathbb{R}) \cap C([a, b]; \mathbb{R})$ . Then for  $x, x_0 \in (a, b)$*

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt. \quad (13)$$

Assuming now  $f \in C^2((a, b); \mathbb{R}) \cap C^1([a, b]; \mathbb{R})$  then besides (13) also

$$f'(x) = f'(x_0) + \int_{x_0}^x f''(t) dt.$$

Inserting this into (13) and applying integration by parts gives

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - t) f''(t) dt.$$

**Taylor Theorem** *Let  $f \in C^{n+1}((a, b); \mathbb{R}) \cap C^n([a, b]; \mathbb{R})$ , then*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \quad (14)$$

**Proof** In case  $n = 0$  formula (14) is just (13). Assuming (14) to hold for  $n - 1$  rather than for  $n$  and applying (13) to  $f^{(n)}$  and inserting this in (14) provides (14) for  $n$  after partial integration.

Applying this iteration procedure to the representations (7) and (7') leads to a hierarchy of kernel functions and higher order integral representations of Cauchy-Pompeiu type.

**Theorem 3** *Let  $D \subset \mathbb{C}$  be a regular domain and  $w \in C^2(D; \mathbb{C}) \cap C^1(\bar{D}; \mathbb{C})$ , then*

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad (15)$$

and

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\bar{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (15')$$

**Proof** (1) For proving (15) formula (7) applied to  $w_{\bar{z}}$  giving

$$w_{\bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_{\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta} - \zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta} - \zeta}$$

is inserted into (7) from what after having interchanged the order of integrations

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_{\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \psi(z, \tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \psi(z, \tilde{\zeta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \quad (16)$$

follows with

$$\psi(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - \tilde{\zeta})(\zeta - z)} = \frac{1}{\zeta - z} \frac{1}{\pi} \int_D \left( \frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\xi d\eta.$$

Formula (7) applied to the function  $\bar{z}$  shows

$$\frac{\bar{\zeta} - z}{\tilde{\zeta} - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{(\zeta - \tilde{\zeta})(\zeta - z)} - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - \tilde{\zeta})(\zeta - z)} = \tilde{\psi}(z, \tilde{\zeta}) - \psi(z, \tilde{\zeta}) \quad (17)$$

with a function  $\tilde{\psi}$  analytic in both its variables. Hence by (6)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_{\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \tilde{\psi}(z, \tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \tilde{\psi}(z, \tilde{\zeta}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = 0.$$

Subtracting this from (16) and applying (17) gives (15).

(2) In order to show (15') formula (7') giving

$$w_{\bar{\zeta}}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_{\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \frac{d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}}{\bar{\zeta} - \zeta}$$

is inserted in (7) so that after interchanging the order of integrations

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_{\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \Psi(z, \zeta) d\bar{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \Psi(z, \zeta) d\tilde{\xi}d\tilde{\eta} \tag{18}$$

with

$$\Psi(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - \tilde{\zeta})(\zeta - z)} .$$

The function  $\log |\tilde{\zeta} - z|^2$  is a  $C^1$ -function in  $D \setminus \{\tilde{\zeta}\}$  for fixed  $\tilde{\zeta} \in D$ . Hence formula (7) may be applied in  $D_\varepsilon = D \setminus \{z : |z - \tilde{\zeta}| \leq \varepsilon\}$  for small enough positive  $\varepsilon$  giving for  $z \in D_\varepsilon$

$$\log |\tilde{\zeta} - z|^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \log |\tilde{\zeta} - \zeta|^2 \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} .$$

As for  $\varepsilon < |z - \tilde{\zeta}|$

$$\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta - \tilde{\zeta}| < \varepsilon} \frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}}{\tilde{\zeta} - z + te^{i\varphi}} d\varphi dt$$

exists and tends to zero with  $\varepsilon$  tending to zero and because for  $\varepsilon < |z - \tilde{\zeta}|$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - \tilde{\zeta}| = \varepsilon} \log |\tilde{\zeta} - \zeta|^2 \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{2 \log \varepsilon}{2\pi i} \int_{|\zeta - \tilde{\zeta}| = \varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

this relation results in

$$\log |\tilde{\zeta} - z|^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \log |\tilde{\zeta} - \zeta|^2 \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \tilde{\Psi}(z, \tilde{\zeta}) - \Psi(z, \tilde{\zeta}) \tag{19}$$

where the function  $\tilde{\Psi}$  is analytic in  $z$  but anti-analytic in  $\tilde{\zeta}$ . Therefore from (6')

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_{\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \tilde{\Psi}(z, \tilde{\zeta}) d\bar{\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta\bar{\zeta}}(\tilde{\zeta}) \tilde{\Psi}(z, \tilde{\zeta}) d\tilde{\xi}d\tilde{\eta} = 0 .$$

Adding this to (18) and observing (19) proves (15').

**Remark** There are dual formulas to (15) and (15') resulting from interchanging the roles of (7) and (7') in the preceding procedure. They arise also from complex conjugation of (15) and (15') after replacing  $w$  by  $\bar{w}$ . They are

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_\zeta(\zeta) \frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - z} d\bar{\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - z} d\xi d\eta \quad (15'')$$

and

$$\begin{aligned} w(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_\zeta(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\zeta \\ & + \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\xi d\eta . \end{aligned} \quad (15''')$$

The kernel functions  $(\bar{\zeta} - z)/(\zeta - z)$ ,  $\log |\zeta - z|^2$ ,  $(\zeta - z)/(\bar{\zeta} - z)$  of the second order differential operators  $\partial_{\bar{z}}^2$ ,  $\partial_z \partial_{\bar{z}}$ ,  $\partial_z^2$  respectively are thus obtained from those Cauchy and anti-Cauchy kernels  $1/(\zeta - z)$  and  $1/(\bar{\zeta} - z)$  for the Cauchy-Riemann operator  $\partial_{\bar{z}}$  and its complex conjugate  $\partial_z$ .

Continuing in this way in [4, 5], see also [1], a hierarchy of kernel functions and related integral operators are constructed and general higher order Cauchy-Pompeiu representation formulas are developed.

**Definition 3** For  $m, n \in \mathbb{Z}$  satisfying  $0 \leq m + n$  and  $0 < m^2 + n^2$  let

$$K_{m,n}(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{(-1)^n (-m)!}{(n-1)! \pi} (\zeta - z)^{m-1} (\bar{\zeta} - z)^{n-1} & \text{if } m \leq 0, \\ \frac{(-1)^m (-n)!}{(m-1)! \pi} (\zeta - z)^{m-1} (\bar{\zeta} - z)^{n-1} & \text{if } n \leq 0, \\ \frac{(\zeta - z)^{m-1} (\bar{\zeta} - z)^{n-1}}{(m-1)! (n-1)! \pi} \left[ \log |\zeta - z|^2 \right. \\ \quad \left. - \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{1}{\mu} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} \right] & \text{if } 1 \leq m, n, \end{cases} \quad (20)$$

and for  $f \in L_1(D; \mathbb{C})$ ,  $D \subset \mathbb{C}$  a domain,

$$\begin{aligned} T_{0,0}f(z) &= f(z) \text{ for } (m, n) = (0, 0), \\ T_{m,n}f(z) &= \int_D K_{m,n}(z, \zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \text{ for } (m, n) \neq (0, 0). \end{aligned} \quad (21)$$

**Examples**

$$\begin{aligned}
 T_{0,1}f(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad T_{1,0}f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \\
 T_{0,2}f(z) &= \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad T_{2,0}f(z) = \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \frac{\zeta - z}{\zeta - z} d\xi d\eta, \\
 T_{1,1}f(z) &= \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\xi d\eta, \\
 T_{-1,1}f(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \quad T_{1,-1}f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

The kernel functions are weakly singular as long as  $0 < m + n$ . But for  $m + n = 0, 0 < m^2 + n^2$  they are strongly singular and the related integral operators are strongly singular of Calderon-Zygmund type to be understood as Cauchy principle value integrals. They are useful to solve higher order partial differential equations.  $K_{m,n}$  turns out to be the fundamental solution to  $\partial_{\bar{z}}^m \partial_z^n$  for  $0 \leq m, n$ . As special cases to the general Cauchy-Pompeiu representation deduced in [4] two particular situations are considered.

**Theorem 4** *Let  $w \in C^n(D; \mathbb{C}) \cap C^{n-1}(\bar{D}; \mathbb{C})$  for some  $n \geq 1$ . Then*

$$w(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \partial_{\bar{\zeta}}^{\nu} w(\zeta) \frac{(\overline{z - \zeta})^{\nu}}{\nu!(\zeta - z)} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \partial_{\bar{\zeta}}^n w(\zeta) \frac{(\overline{z - \zeta})^{n-1}}{(n-1)!(\zeta - z)} d\xi d\eta \tag{22}$$

This formula obviously is a generalization to (15) and can be proved inductively in the same way as (15).

**Theorem 5** *Let  $w \in C^{2n}(D; \mathbb{C}) \cap C^{2n-1}(\bar{D}; \mathbb{C})$  for some  $n \geq 1$ . Then*

$$\begin{aligned}
 w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{(\zeta - z)^{\nu-1} (\overline{\zeta - z})^{\nu}}{(\nu - 1)! \nu!} \\
 &\quad \left[ \log |\zeta - z|^2 - \sum_{\rho=1}^{\nu-1} \frac{1}{\rho} - \sum_{\sigma=1}^{\nu} \frac{1}{\sigma} \right] (\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}})^{\nu} w(\zeta) d\zeta \\
 &+ \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{|\zeta - z|^{2(\nu-1)}}{(\nu - 1)!^2} \left[ \log |\zeta - z|^2 - 2 \sum_{\rho=1}^{\nu-1} \frac{1}{\rho} \right] \partial_{\bar{\zeta}}^{\nu-1} \partial_{\zeta}^{\nu} w(\zeta) d\bar{\zeta} \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_D \frac{|\zeta - z|^{2(n-1)}}{(n - 1)!^2} \left[ \log |\zeta - z|^2 - 2 \sum_{\rho=1}^{n-1} \frac{1}{\rho} \right] (\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}})^n w(\zeta) d\xi d\eta.
 \end{aligned} \tag{23}$$

This representation contains (15') as a particular case for  $n = 1$ . The proof also follows by induction on the basis of (7) and (7').

For the general case related to the differential operator  $\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n$  some particular notations are needed which are not introduced here, see [5].

## 5 Basic boundary value problems

As was pointed out in connection with the Schwarz-Poisson formula in the case of the unit disc boundary value problems can be solved explicitly. For this reason this particular domain is considered. This will give necessary information about the nature of the problems considered. The simplest and therefore fundamental cases occur with respect to analytic functions.

**Schwarz boundary value problem** Find an analytic function  $w$  in the unit disc, i.e. a solution to  $w_{\bar{z}} = 0$  in  $\mathbb{D}$ , satisfying

$$\operatorname{Re} w = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D}, \operatorname{Im} w(0) = c$$

for  $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}$  given.

**Theorem 6** This Schwarz problem is uniquely solvable. The solution is given by the Schwarz formula

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ic. \quad (24)$$

The proof follows from the Schwarz-Poisson formula (12') together with a detailed study of the boundary behaviour, see [11].

**Dirichlet boundary value problem** Find an analytic function  $w$  in the unit disc, i.e. a solution to  $w_{\bar{z}} = 0$  in  $\mathbb{D}$ , satisfying for given  $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$

$$w = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D}.$$

**Theorem 7** This Dirichlet problem is solvable if and only if for  $|z| < 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z} d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = 0. \quad (25)$$

The solution is then uniquely given by the Cauchy integral

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (26)$$

**Remark** This result is a consequence of the Plemelj-Sokhotzki formula, see e.g. [9, 8, 1]. The Cauchy integral (26) obviously provides an analytic function



in  $\mathbb{D}$  and one in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \hat{\mathbb{C}}$  the Riemann sphere. The Plemelj-Sokhotzki formula states that for  $|\zeta|=1$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, |z| < 1} w(z) - \lim_{z \rightarrow \zeta, 1 < |z|} w(z) = \gamma(\zeta) .$$

In order that for any  $|\zeta|=1$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, |z| < 1} w(z) = \gamma(\zeta)$$

the condition

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, 1 < |z|} w(z) = 0$$

is necessary and sufficient. However, the Plemelj-Sokhotzki formula in its classical formulation holds if  $\gamma$  is Hölder continuous. Nevertheless, for the unit disc Hölder continuity is not needed, see [9].

**Proof** 1. (25) is shown to be necessary. Let  $w$  be a solution to the Dirichlet problem. Then  $w$  is analytic in  $\mathbb{D}$  having continuous boundary values

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} w(z) = \gamma(\zeta) \tag{27}$$

for all  $|\zeta|=1$ .

Consider for  $1 < |z|$  the function

$$w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} .$$

As with  $z, 1 < |z|$ , tending to  $\zeta, |\zeta|=1, 1/\bar{z}$  tends to  $\zeta$  too,  $\lim_{z \rightarrow \zeta} w(1/\bar{z})$  exists, i.e.  $\lim_{z \rightarrow \zeta} w(z)$  exists for  $1 < |z|$ . From

$$w(z) - w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left( \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

and the properties of the Poisson kernel for  $|\zeta|=1$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, |z| < 1} w(\zeta) - \lim_{z \rightarrow \zeta, 1 < |z|} w(z) = \gamma(\zeta) \tag{28}$$

follows. Comparison with (27) shows  $\lim_{z \rightarrow \zeta} w(z) = 0$  for  $1 < |z|$ . As  $w(\infty) = 0$  then the maximum principle for analytic functions tells that  $w(z) \equiv 0$  in  $1 < |z|$ . This is condition (25).

2. The sufficiency of (25) follows at once from adding (25) to (26) leading to

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left( \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\zeta - z} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left( \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} . \end{aligned}$$

Thus for  $|\zeta|=1$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, |z| < 1} w(z) = \gamma(\zeta)$$

follows again from the properties of the Poisson kernel.

The third basic boundary value problem is based on the outward normal derivative at the boundary of a regular domain. This directional derivative on a circle  $|z-a|=r$  is in the direction of the radius vector, i.e. the outward normal vector is  $\nu = (z-a)/r$ , and the normal derivative in this direction  $\nu$  given by

$$\partial_\nu = \partial_r = \frac{z}{r} \partial_z + \frac{\bar{z}}{r} \partial_{\bar{z}}.$$

In particular for the unit disc  $\mathbb{D}$

$$\partial_r = z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}.$$

**Neumann boundary value problem** Find an analytic function  $w$  in the unit disc, i.e. a solution to  $w_{\bar{z}} = 0$  in  $\mathbb{D}$ , satisfying for some  $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$  and  $c \in \mathbb{C}$

$$\partial_\nu w = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad w(0) = c.$$

**Theorem 8** This Neumann problem is solvable if and only if for  $|z| < 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} = 0 \quad (29)$$

is satisfied. The solution then is

$$w(z) = c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (30)$$

**Proof** The boundary condition reduced to the Dirichlet condition

$$zw'(z) = \gamma(z) \text{ for } |z|=1$$

because of the analyticity of  $w$ . Hence from the preceding result

$$zw'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

if and only if for  $|z| < 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = 0. \quad (31)$$

But as  $zw'(z)$  vanished at the origin this imposes the additional condition

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = 0 \tag{32}$$

on  $\gamma$ . Then

$$w'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)\zeta} .$$

Integrating shows

$$w(z) = c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log \frac{\zeta - z}{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

which is (30). Adding (31) and (32) leads to

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{1}{1 - \bar{z}\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z} = 0 , \end{aligned}$$

i.e. to (29). By integration this gives

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log(1 - \bar{z}\zeta) d\bar{\zeta} = 0 .$$

Next these boundary value problems will be studied for the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation. Using the  $T$ -operator the problems will be reduced to the ones for analytic functions. Here in the case of the Neumann problem it will make a difference if the normal derivative on the boundary or only the effect of  $z\partial_z$  on the function is prescribed.

**Theorem 9** *The Schwarz problem for the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in the unit disc*

$$w_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D} , \operatorname{Re} w = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D} , \operatorname{Im} w(0) = c$$

for  $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$ ,  $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}$  is uniquely solvable by the Cauchy-Schwarz-Pompeiu formula

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ic - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left[ \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right] d\xi d\eta \tag{33}$$

This representation (33) follows just from (12) assuming that the solution  $w$  exists. But (33) can easily be justified to be a solution. That this solution is unique follows from Theorem 6.

**Theorem 10** *The Dirichlet problem for the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in the unit disc*

$$w_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D}$$

for  $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$  and  $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$  is solvable if and only if for  $|z| < 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta}. \quad (34)$$

The solution then is uniquely given by

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}. \quad (35)$$

Representation (35) follows from (7) if the problem is solvable. The unique solvability is a consequence of Theorem 7. That (35) actually is a solution under (34) follows by observing the properties of the  $T$ -operator on one hand and from

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left( \frac{\zeta}{\zeta-z} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} \right) d\xi d\eta = \gamma(z) \end{aligned}$$

for  $|z|=1$  on the other.

That (34) is also necessary follows from Theorem 7. Applying condition (25) to the boundary value of the analytic function  $w - Tf$  in  $\mathbb{D}$ , i.e. to  $\gamma - Tf$  on  $\partial\mathbb{D}$  gives (34) because of

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \frac{d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\tilde{\zeta}-\zeta} \frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = \\ &-\frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta-\tilde{\zeta}} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = -\frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|=1} f(\tilde{\zeta}) \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\tilde{\zeta}} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \end{aligned}$$

as is seen from the Cauchy formula.

**Theorem 11** *The Neumann problem for the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in the unit disc*

$$w_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad \partial_\nu w = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad w(0) = c,$$

for  $f \in C^\alpha(\overline{\mathbb{D}}; \mathbb{C})$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$ ,  $c \in \mathbb{C}$  is solvable if and only if for  $|z| < 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{1-\bar{z}\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\bar{z}f(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0. \quad (36)$$

The unique solution then is

$$w(z) = c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)} d\xi d\eta. \quad (37)$$

**Proof** The function  $\varphi = w - Tf$  satisfies

$$\varphi_{\bar{z}} = 0 \text{ in } \mathbb{D}, \quad \partial_\nu \varphi = \gamma - z\Pi f - \bar{z}f \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad \varphi(0) = c - Tf(0).$$

As the property of the  $\Pi$ -operator, see [12], Chapter 1, §8 and §9, guarantee  $\Pi f \in C^\alpha(\overline{\mathbb{D}}; \mathbb{C})$  for  $f \in C^\alpha(\overline{\mathbb{D}}; \mathbb{C})$  Theorem 8 shows

$$\varphi(z) = c - Tf(0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma(\zeta) - \zeta\Pi f(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma(\zeta) - \zeta\Pi f(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} = 0.$$

From

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \zeta\Pi f(\zeta) \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ & -\frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\log(1-z\bar{\zeta})}{(\zeta-\tilde{\zeta})^2} d\zeta d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = \\ & \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\log(1-z\bar{\zeta})}{(1-\tilde{\zeta}\bar{\zeta})^2} d\bar{\zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = 0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Pi f(\zeta) \frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = -\frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{(\zeta-\tilde{\zeta})^2} \frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \partial_\zeta \frac{1}{1-\bar{z}\zeta} \Big|_{\zeta=\tilde{\zeta}} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}}{(1-\bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta \end{aligned}$$

the result follows.

**Theorem 12** *The problem*

$$w_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, zw_z = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D}, w(0) = c$$

is solvable for  $f \in C^\alpha(\bar{\mathbb{D}}; \mathbb{C}), 0 < \alpha < 1, \gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C}), c \in \mathbb{C}$ , if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2} = 0. \quad (38)$$

The solution is then uniquely given as

$$w(z) = c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta-z)}. \quad (39)$$

**Proof** The function  $\varphi = w - Tf$  satisfies

$$\varphi_{\bar{z}} = 0 \text{ in } \mathbb{D}, z\varphi'(z) = \gamma - z\Pi f \text{ on } \partial\mathbb{D}, \varphi(0) = c - Tf(0).$$

Comparing this with the problem in the preceding proof leads to the result.

#### Acknowledgement

The author is very grateful for the hospitality of the Mathematics Department of the Simón Bolívar University. In particular his host, Prof. Dr. Carmen Judith Vanegas has made his visit very interesting and enjoyable.

#### References

- [1] Begehr, H.: Complex analytic methods for partial differential equations. An introductory text. World Scientific, Singapore, 1994.
- [2] Begehr, H.: Integral representations in complex, hypercomplex and Clifford analysis. Integral Transf. Special Funct. 13 (2002), 223-241.
- [3] Begehr, H.: Some boundary value problems for bi-bi-analytic functions. Complex Analysis, Differential Equations and Related Topics. ISAAC Conf., Yerevan, Armenia, 2002, eds. G. Barsegian et al., Nat. Acad. Sci. Armenia, Yerevan, 2004, 233-253.
- [4] Begehr, H., Hile, G. N.: A hierarchy of integral operators. Rocky Mountain J. Math. 27 (1997), 669-706.
- [5] Begehr, H., Hile, G. N.: Higher order Cauchy-Pompeiu operator theory for complex and hypercomplex analysis. Eds. E. Ramirez de Arellano et al. Contemp. Math. 212 (1998), 41-49.

- 
- [6] Begehr, H., Kumar, A.: Boundary value problems for bi-polyanalytic functions. Preprint, FU Berlin, 2003, *Appl. Anal.*, to appear.
- [7] Calderon, A., Zygmund, A.: On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.* 88 (1952), 85-139.
- [8] Gakhov, F. D.: Boundary value problems. Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [9] Muskhelishvili, N. I.: Singular integral equations. Dover, New York, 1992.
- [10] Pompeiu, D.: Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines equations integrales. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 35 (1913), 277-281.
- [11] Schwarz, H. A.: Zur Integration der partiellen Differentialgleichung  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$ . *J. reine angew. Math.* 74 (1872), 218-253.
- [12] Vekua, I. N.: Generalized analytic functions. Pergamon Press, Oxford, 1962.

HEINRICH BEGEHR  
I. MATH. INST., FU BERLIN  
ARNIMALLEE 3  
14195 BERLIN, GERMANY  
email: [begehr@math.fu-berlin.de](mailto:begehr@math.fu-berlin.de)

## EDUCACIÓN

# Sobre los automatismos en la resolución de problemas

Javier Peralta

### Resumen

El motivo que nos ha conducido a escribir este trabajo es el de reflexionar sobre el uso de automatismos en la resolución de problemas -cuya práctica habitual puede producir un efecto nocivo de rigidez mental en los alumnos-; los más comunes, en general, surgen como consecuencia de una enseñanza dogmática, favorecida por la predisposición de los estudiantes a acoger con alegría reglas que les permitan actuar con prontitud. En el presente artículo trataremos de clasificar los automatismos atendiendo a las causas particulares que los provocan.

### Abstract.

The motive that has led us to write this paper is to reflect on the use of automatisms in the resolution of problems -whose customary practice can produce a harmful effect of mental inflexibility in the pupils-; the most common of them, generally, emerge as consequence of a dogmatic teaching, favoured by the bias of the students to accept happily rules that permit them to act with readiness. In the present article we will try to classify the automatisms attending to the particular causes that provoke them.

## 1 Introducción

En la enseñanza tradicional de las matemáticas, el aprendizaje de conceptos, la deducción de resultados y la adquisición de procedimientos generalmente tienen lugar sin la intervención activa del alumno.

Por otro lado, en este tipo de instrucción matemática, suelen distinguirse dos tipos de enseñanza: teórica y práctica, claramente diferenciadas. Mientras en la primera de ellas la participación del alumno se reduce a escuchar y tratar de entender las explicaciones del profesor, para más tarde procurar reproducirlas con la ayuda de la memoria; en la segunda se realizan ejercicios de manipulación de las nociones y proposiciones estudiadas, donde se repiten razonamientos y se aplican algoritmos.

De ese modo, la matemática se presenta como una ciencia perfectamente estructurada y cerrada, de la que el estudiante debe aprender sus conceptos y teoremas, así como las destrezas necesarias para ser usadas en ejercicios tipo.



En la resolución de estos últimos hay que tener en cuenta que suele bastar con reiterar el método seguido por el profesor en otros problemas semejantes, y utilizar los resultados que recientemente se han visto “en clase de teoría”. A lo sumo, cabe la posibilidad de que igualmente se precisen emplear otros teoremas, pero que casi siempre estarán asociados al prototipo de cuestiones de las que en ese momento se trate; por ejemplo: triángulo rectángulo-teorema de Pitágoras, factorización de un polinomio (o resolución de una ecuación de grado superior al segundo)-teorema del resto y regla de Ruffini, ciertos límites funcionales indeterminados-regla de L’Hôpital, etc. Por último, será necesario además saber operar, para realizar posteriormente los cálculos oportunos.

Esa dudosa forma de educación matemática ocasiona en los alumnos, entre otras cosas, un efecto considerable de rigidez mental, una de cuyas consecuencias es el uso indiscriminado de automatismos en la resolución de problemas. Conviene resaltar que es preciso estar muy atentos a este fenómeno, pues como advierte Puig Adam, el alumno “acoge con alegría las reglas que le permiten actuar rápidamente antes de asimilar las esencias metódicas” (Peralta 1994, p. 58), a pesar de la importante limitación de la que puede ser objeto su capacidad creativa a causa de este proceder habitual. Del mismo modo, Polya (1986, p. 143) analiza este hecho, e invita a excluir de los métodos de enseñanza la “pedantería”, o “aplicación de una regla al pie de la letra en forma rígida”; tratando de inculcar en su lugar lo que denomina “maestría”: “aplicación de una regla con cierta soltura, con juicio, sin dejar que la formulación oscurezca el fin de la acción o las oportunidades de la situación”.

Aunque ya hemos estudiado esta cuestión en dos situaciones particulares: los problemas de optimización de funciones (Peralta 1994) y -de algún modo- la resolución de ecuaciones (Peralta 1999), nunca lo hemos hecho de manera global. Por ello, nos planteamos en este artículo tratar de abordar ese asunto de una forma general; más concretamente, nuestro objetivo va a ser ahora el de intentar clasificar y analizar la procedencia de los automatismos más frecuentes en la resolución de problemas y ejercicios.

Pero antes de comenzar, hagamos tres observaciones. La primera -así se verá a lo largo del trabajo- es que algunas situaciones podrían ser incluidas en más de una de las categorías en las que se clasificarán los automatismos; en cuyo caso, generalmente, serán adscritas a aquellas que presenten un carácter más restrictivo.

La segunda puntualización se refiere a que no se han considerado como automatismos las actuaciones producidas por una manera de calcular precipitada en la que se confunden las propiedades de las operaciones, esto es, cuando se trasladan propiedades de la adición a la multiplicación, o recíprocamente; aunque probablemente también podrían ser así conceptuadas, tal como se hace en (Bouvier et al. 1986, p. 120). Si hemos procedido de ese modo es porque, si bien esa actitud tiene su origen en un intento de realización mecánica de un

cálculo, no es menos cierto que obedece a una deficiente interiorización de los significados de las operaciones mencionadas, como acaso también a los efectos de una introducción prematura o poco cuidadosa del lenguaje literal; causas que sin embargo no vamos a estudiar en esta ocasión.

Por último, digamos que el término problema que aparece en el título del artículo, debe ser entendido en un sentido amplio; esto es, considerando como problemas no solo aquellos cuya resolución exige el uso de razonamientos plausibles, sino también los que se solucionan simplemente mediante el manejo sistemático de reglas, y que suelen denominarse ejercicios. A lo largo del trabajo, sin embargo, casi siempre se establecerá la común distinción entre ambas acepciones: problema, si corresponde a situaciones no familiares en las que existen dificultades, pero que pueden ser resueltas mediante aplicaciones significativas (no mecánicas) del conocimiento matemático, o sea, si precisan procedimientos creativos para su resolución; ejercicio, si es posible llegar a su solución sin más que reproducir y emplear métodos y algoritmos rutinarios (Peralta 2004).

## 2 Supuestos implícitos

El efecto de rigidez mental que produce el tratar de repetir sistemáticamente los métodos empleados en la resolución de otros problemas o ejercicios parecidos, puede ocasionar una cierta merma en la capacidad de razonamiento “en el vacío” del alumno. Como consecuencia de esa limitación a la libertad de pensamiento, y acostumbrado a que su mente discorra casi siempre dentro de unos límites previamente fijados, el estudiante puede suponer a veces, inconscientemente, que están impuestas determinadas condiciones que, no obstante, no figuran en el enunciado ni se deducen del mismo, y que reciben el nombre de supuestos implícitos.

Como ejemplo de ello, imaginemos que después de haber resuelto en clase el siguiente Ejercicio 1, se propusiera el Problema 2 (Peralta 1995, pp. 91-92):

Ejercicio 1.- Con tres palillos de la misma longitud construir un triángulo equilátero y, con cinco, dos triángulos equiláteros iguales. En ambos casos, la longitud del lado de cada triángulo debe ser igual a la longitud del palillo.

Problema 2.- Construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos, de modo que la longitud del lado de cada triángulo coincida con la longitud del palillo.

Según hemos comprobado, este último problema ofrece cierta dificultad, debido probablemente a la fijación de que la construcción ha de hacerse en el plano. En cambio, si se propone sin realizar antes el primer ejercicio, se

obtienen resultados algo mejores (la solución, como es sabido, viene dada por el tetraedro regular).

Por otro lado, hay que decir además que las carencias provocadas por el hecho que estamos estudiando pueden tener asimismo un efecto en cierto modo recíproco al que hasta ahora hemos considerado. Esto es, de igual forma que la mente acaso presuponga hipótesis restrictivas no prefijadas, puede también ignorar otras que se deduzcan del enunciado o de las condiciones del problema, aunque no estén expresamente formuladas. Así sucede con el siguiente problema:

Problema 3.- La suma de los números de habitantes de tres poblaciones está comprendida entre 10000 y 11000. Si el número de habitantes de la primera población es  $35/143$  del total, y el de la segunda es  $23/165$  del total, hallar el número de habitantes de cada ciudad.

Si  $n$  es el número total de habitantes y  $n_i$  el número de habitantes de la ciudad  $i$ , normalmente se suele llegar a plantear:

$$10000 \leq n \leq 11000, n_1 = 35n/143, n_2 = 23n/165, n_1 + n_2 + n_3 = n$$

pero a partir de ahí es difícil continuar. Así, pocos alumnos caen en la cuenta de que las soluciones deben ser números naturales, que sin embargo es una información que puede deducirse del enunciado del problema.

Con este nuevo dato, enseguida se sigue que  $n$  ha de ser múltiplo de 11, 13, 3 y 5 y, por tanto, de su mínimo común múltiplo, que es 2145. Por tanteo, se llega a que  $n = 10725$  habitantes; luego  $n_1 = 2625$  habitantes,  $n_2 = 1495$  habitantes y  $n_3 = 6605$  habitantes.

### 3 ¿Usamos todos los datos?

Quizá sea conocido que Flaubert escribió a su hermana Carolina una carta en la cual, con motivo de que aquella estaba estudiando geometría y trigonometría, le planteaba el siguiente ejercicio, ciertamente sorprendente:

Ejercicio 4.- “Un barco navega por el océano con destino a Le Havre; transporta un cargamento de lana de 200 toneladas de peso bruto, que ha cargado en Boston; tiene el palo mayor roto, el grumete pasea por el puente, el barco lleva 12 pasajeros a bordo, el viento sopla del Este-Nordeste y son las tres y cuarto en punto de una tarde del mes de mayo: ¿cuál es la edad del capitán?” (Newman 1980, p. 355).

Aunque, según parece, el ilustre novelista francés no buscaba con ello otra cosa que poner de manifiesto cómo el exceso de palabras superfluas no hace más que confundir a los resolutores de “rompecabezas”. Y algo parecido puede decirse de su clásica versión, “¿Cuál es la edad del capitán?”, que tiene su

origen en una encuesta realizada en 1979 en el IREM de Grenoble y que dio origen a un libro del mismo título de Stella Baruk en 1985 (Socas 1997, p. 128).

Ejercicio 5.- “En un barco hay 20 cabras y 15 vacas. ¿Cuál es la edad del capitán?”

Sobre este ejercicio, que formaba parte de un test planteado a alumnos de la escuela elemental, el autor afirma que el 74 % de los mismos respondieron: 35 años, “sin experimentar dudas sobre su respuesta”. A ello hemos de añadir que también hemos propuesto en diferentes ocasiones esa misma prueba a estudiantes del último ciclo de Primaria (10-12 años) y siempre se han obtenido resultados parecidos.

Ahora bien, no debemos extrañarnos de esa reacción de los alumnos, cuando incluso en el Diccionario de heurística de Polya, una de las sugerencias de la fase “Concebir un plan” de su conocido método para resolver problemas consiste en preguntarse: “¿ Ha empleado usted todos los datos?” (Polya 1986, p. 98). Aunque más adelante, añade: “Aplicar una regla al pie de la letra, en forma rígida, sin plantearse preguntas, tanto si es aplicable o no, es pedantería. Ciertos pedantes no son sino pobres gentes que nada han comprendido de las reglas que aplican tan a conciencia y sin ningún discernimiento. (...) Aplicar una regla con cierta soltura, con juicio, notando los casos convenientemente y sin dejar jamás que la formulación verbal oscurezca el fin de la acción o las oportunidades de la situación, he ahí la maestría.” (ibid., p. 143). Y también, hace ya muchos años, Puig Adam avisaba de algún modo del efecto que estamos estudiando, pues escribía lo siguiente, en relación con los problemas de los exámenes: “El alumno, acostumbrado a la “buena fe” y a la “infalibilidad” de los examinadores, tratará de agotar todos los datos, buscándolos aplicabilidad por suponerlos necesarios. Y ¡desgraciado de él si no lo hace! Será entonces él quien será juzgado estúpido” (Peralta 1995, p. 85).

Así, el automatismo producido por la “obligatoriedad” en el uso de todos los datos, favorecido sin duda por la suposición de que su profesor nunca va a proponerle problemas o ejercicios cuyos datos no sean estrictamente necesarios para su resolución, repercutirá de forma negativa en la búsqueda de la solución. Deberíamos, en consecuencia, reflexionar largamente sobre este hecho, y plantear de vez en cuando a nuestros alumnos problemas con datos redundantes, contradictorios o insuficientes, para tratar de evitar estos efectos nocivos.

A continuación, aun admitiendo el origen común de la procedencia de este fenómeno, hemos tratado de examinar con más detalle las posibles causas del mismo. A nuestro juicio, pueden ser las siguientes:

### 3.1 La existencia de datos superfluos, frente a la ausencia de los datos necesarios.

En este supuesto puede suceder que, en efecto, los datos irrelevantes se apliquen equivocadamente en su resolución. Es el caso del Ejercicio 5 anterior.

**3.2** La existencia de datos contradictorios, que no se advierten en un primer momento, aunque, una vez resuelto el problema, conducen a que éste no tenga solución.

Como el alumno no se imagina que pueda suceder tal cosa, en no pocas ocasiones desestima la posibilidad de que la solución no tenga sentido en el contexto del problema y, ante esta situación, se desorienta y en muchos casos actúa de forma errónea. Ejemplo:

Problema 6.- Al finalizar las clases un autobús escolar va retornando a su casa a los alumnos que usan ese servicio. En una parada baja la mitad de los niños, en la siguiente descienden los  $5/7$  de los alumnos que quedaban, y a continuación la séptima parte de los niños que había inicialmente. Aun así, siguen quedando 20 niños dentro. ¿Con cuántos niños había partido el autobús?

Si  $x$  es el número inicial de niños, obviamente se llega a:

$$x - \left( \frac{x}{2} + \frac{5}{7} \cdot \frac{x}{2} + \frac{x}{7} \right) = 20,$$

que conduce a:  $0 \cdot x = 20$ . El problema por tanto no tiene solución, ya que en las tres paradas han salido todos los alumnos, y no es posible que aún queden 20 en el autobús.

Hemos planteado en numerosas ocasiones este problema a alumnos de 13-14 años y, a pesar de que ya se les habían propuesto ecuaciones del tipo  $0 \cdot x = a$ ,  $a \neq 0$ , y habían concluido que no tenían solución, los resultados obtenidos en el problema en cuestión han sido notablemente peores, pues eran ellos los que tenían que llegar a plantearla como enunciado. La razón de este comportamiento habría que buscarla, según confesaron algunos alumnos, en que aunque admitan la existencia de tales ecuaciones “en forma abstracta”, les es más difícil aceptar que puedan aparecer en un “problema concreto”.

En particular, siempre hemos advertido que los resultados suelen estar distribuidos en tres grupos, casi del mismo tamaño: el formado por aquellos que contestan bien (el problema no tiene solución), los que no contestan (después de rehacer varias veces los cálculos en los que se ha llegado a  $0 \cdot x = 20$  y llenar el papel de tachones) y los que contestan mal, por tratar de despejar  $x$  de esta última ecuación ( $x = -20$ ,  $x = 1/20$ , son las respuestas más frecuentes; errores que algunos no habrían cometido de haberseles planteado dicha ecuación en abstracto).

**3.3** La existencia de datos superfluos junto a los datos necesarios.

En tales casos, el exceso de datos puede dificultar su resolución, ante la creencia de la necesidad de utilizar todos ellos. Así sucede con el siguiente ejemplo, debido a T. P. Carpenter:

Ejercicio 7.- Un conejo come 2 kg de comida cada semana. Cada año tiene 52 semanas. ¿Cuánta comida necesitarán 5 conejos en una semana? (Bujanda 1981, p. 88).

Los resultados obtenidos en este clásico ejercicio en una muestra de 100 alumnos fueron los siguientes:

Respuestas	2 kg	10 kg	52 kg	104 kg	520 kg	No sé
Nº de alumnos	1	56	5	11	23	4

Así, el hecho de introducir el dato superfluo de que el año tiene 52 semanas, ha inducido a error a aproximadamente la mitad de los alumnos que no saben hacer el ejercicio (23), que han dado la respuesta errónea más frecuente: 520 kg, obtenida empleando todos los datos ( $2 \times 5 \times 52 = 520$ ).

A conclusiones parecidas se podrían llegar en los dos siguientes ejercicios de J. A. Fernández Bravo (2000, pp. 104 y 121):

Ejercicio 8.- En un polideportivo hay 3 pistas de baloncesto y 5 pistas de balonmano, y sólo esas. El polideportivo tiene 4 puertas. ¿Cuántas pistas hay en el polideportivo?

Ejercicio 9.- En una biblioteca hay 36 libros de cuentos y 58 libros de misterio. Se prestan 27 libros de cuentos y 49 libros de misterio. ¿Cuántos libros de cuentos quedan en la biblioteca?

## 4 No siempre lo nuevo es lo mejor

Debido sin duda a cuestiones de tiempo, y acaso en ocasiones también a una cierta comodidad o falta de una conveniente reflexión por parte del profesor, los procesos de enseñanza-aprendizaje de los contenidos del currículo se realizan en bloques posiblemente compartimentados en exceso. Con esta práctica, el alumno no sólo se siente incapaz de ir percibiendo en alguna medida la unidad intrínseca de las matemáticas sino que, además, suele carecer de recursos para poder abordar un mismo problema o ejercicio desde distintas ópticas.

En la resolución de problemas, en concreto, se utilizan con frecuencia únicamente los procedimientos estándar correspondientes al tipo en cuestión, sin plantearse tan siquiera si sería posible abordarlo por otros métodos más simples ya conocidos anteriormente y que en algún caso particular podrían facilitar su resolución. Para analizar mejor estas situaciones haremos una distinción entre los casos más frecuentes que a nuestro juicio pueden presentarse, y que son los siguientes:

### 4.1 Álgebra, ¿y por qué no aritmética?

Estudiemos este ejercicio:

Ejercicio 10.- Ana tiene 3 euros más que Borja, y entre los dos tienen 11 euros. ¿Cuántos euros tiene cada uno?

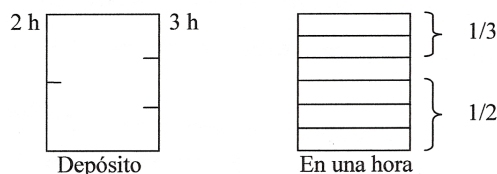
El ejercicio se propuso a alumnos que ya sabían resolver sistemas de ecuaciones (a partir de los 14 años), y efectivamente fue resuelto con esa técnica -a veces mal- por la gran mayoría de ellos. No obstante, este ejercicio es perfectamente asequible a estudiantes que no supieran nada de Álgebra, que habrían procedido más o menos de este modo: “Como Borja tiene 3 euros menos, si momentáneamente le diéramos los 3 que le faltan, entre los dos tendrían 14 euros, o sea, 7 euros cada uno; quitando a Borja los 3 que le habíamos dado antes, resulta que Ana tiene 7 euros y Borja 4 euros”.

En este ejemplo y en otros similares sucede, pues, que cuando el alumno empieza a saber resolver ecuaciones, actúa como si ya pudiera olvidarse de la Aritmética. Sin embargo no debiera ser así, pues si bien el Álgebra proporciona, entre otras cosas, una gran economía de pensamiento al poder mecanizar la solución de múltiples problemas, en cambio no habría de utilizarse cuando fuera más fácil su resolución mediante sencillos cálculos aritméticos (que en este caso podrían efectuarse incluso mentalmente).

Veamos otros ejemplos, en los que es conveniente ayudarse de una representación gráfica:

Problema 11.- Un grifo tarda en llenar un depósito 2 horas. Otro grifo llena el mismo depósito en 3 horas. ¿Cuánto tardan los dos juntos en llenar el depósito? (Palarea y Socas 1995, p. 31).

El problema puede resolverse algebraicamente, aunque su planteamiento es ciertamente más complicado que el anterior. En cambio, es más fácil su resolución aritmética, en especial si nos servimos de un sencillo dibujo:



Se deduce entonces inmediatamente que los dos grifos juntos, en una hora, llenan  $1/3 + 1/2 = 5/6$  del depósito, y el  $1/6$  restante lo llenan en  $1/5$  de hora.

Problema 12.- Una cuadrilla de segadores debía de segar dos prados, uno de los cuales tenía doble superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal en el prado grande; y después de la comida, la mitad de los segadores trabajó en el prado grande y la

otra mitad en el pequeño. Al final de la tarde se acabaron de segar los dos prados, a excepción de un sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. Si se supone que todos trabajan con el mismo rendimiento, ¿de cuántos trabajadores constaba la cuadrilla? (Perelman 1978, p. 53).

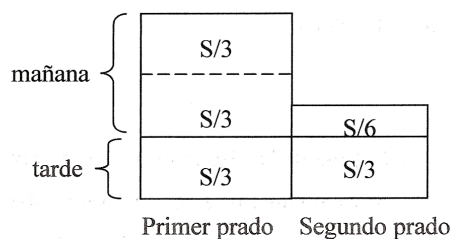
Resolverlo algebraicamente ofrece alguna dificultad, pues además de la incógnita  $x$  (número de segadores), es conveniente introducir otra incógnita auxiliar:  $y$  (superficie segada por un trabajador en un día). Puede razonarse entonces de este modo:

Respecto del primer prado, durante medio día segaron la superficie:  $x \cdot (y/2) = xy/2$ , y durante la segunda mitad del día:  $(x/2) \cdot (y/2) = xy/4$ . Como así queda segado completamente, la superficie del primer prado es  $xy/2 + xy/4 = 3xy/4$ .

En relación con el segundo prado, como durante el primer día sólo se trabajó por la tarde, y se segó:  $x/2 \cdot y/2 = xy/4$ ; si lo sumamos al sector que se quedó sin segar:  $y$ , resulta que la superficie del segundo prado es  $xy/4 + y = (xy + 4y)/4$ .

Por tanto:  $3xy/4 = (xy + 4y)/4$ , luego la solución es:  $x = 8$  segadores.

En cambio, es más sencillo resolverlo aritméticamente, utilizando como en el caso anterior una representación gráfica; pues si  $S$  es la superficie del primer prado y  $S/2$  la del segundo, podemos entonces representar la situación mediante el siguiente dibujo:



Se concluye entonces que cada trabajador siega en un día  $S/6$ , y como en el primer día trabajaron todos, segaron en total  $S/3 + S/3 + S/3 + S/3 = 8S/6$ ; por tanto hay 8 trabajadores.

#### 4.2 Automatismos en la resolución de ecuaciones.

Aunque de este tema ya nos hemos ocupado parcialmente (Peralta 1999), vamos ahora a señalar alguno de los automatismos más frecuentes referentes a ello.



Seguramente proceda empezar con un pequeño comentario en relación con un hecho que nos alertó sobre este fenómeno. Sucedió hace unos años al evaluar las prácticas de enseñanza realizadas por varios estudiantes de Magisterio, a quienes se les propuso que trataran de explicar a sus alumnos del correspondiente colegio de prácticas, de 13-14 años, la manera de resolver la ecuación:

$$\frac{x}{2} - \frac{12x - 11x}{7} = \frac{1}{5}$$

La mayoría de ellos procedió entonces en primer lugar a quitar los denominadores, con lo que se llegaba a:  $35x - 120x + 110x = 14$ , etc.; y a mi pregunta sobre su modo de actuar, respondieron que el primer paso para resolver una ecuación es, siempre, quitar denominadores. Por el contrario, parece sin embargo que, en este caso, lo que la ecuación pedía a gritos era efectuar la sustracción, ya que así se simplificarían los cálculos posteriores.

Lo que se observa con este ejemplo es sin duda uno de los efectos perversos producidos por la aplicación sistemática de una determinada regla (en este caso, el orden a seguir para resolver una ecuación); si bien existen otros, también frecuentes, relativos a las ecuaciones y que tienen un mismo origen. Algunos de ellos son los siguientes:

- La utilización de la fórmula general para el cálculo de las raíces de una ecuación completa de segundo grado, aunque ésta sea incompleta.
- La invariante aplicación del método de igualación -despejando además siempre la  $x$ - en la resolución de los sistemas de dos ecuaciones lineales.
- El cálculo sistemático de los divisores del término independiente en la resolución de ecuaciones -o, equivalentemente, factorización de polinomios- de grado mayor o igual que 3, para luego utilizar la regla de Ruffini y así ir rebajando el grado del polinomio, aunque éste sea una diferencia de cuadrados, el cuadrado de un binomio, etc.

Respecto de esto último, en cambio, hay que decir que sería mejor efectuar desde el principio esas operaciones algebraicas elementales, y sólo después de ello aplicar el método anterior; lo que generalmente no se hace. De igual forma a lo que comentábamos anteriormente en relación con la posibilidad de resolver algunos sistemas de ecuaciones sencillos aritméticamente, también ahora parece que el conocimiento del teorema del resto y de la regla de Ruffini implicara la inutilidad de realización de cálculos algebraicos elementales. Agrupando ambas situaciones; el uso indiscriminado de un nuevo procedimiento por el profesor, da la impresión que repercute en los alumnos de modo que acaso consideren que su aprendizaje invalidara la práctica de otros métodos ya conocidos. Posiblemente esta apreciación debería movernos a todos a reflexionar sobre este particular, y

a ser menos dogmáticos sobre las técnicas de resolución de un tipo determinado de problemas o ejercicios.

Volviendo al anterior argumento, digamos finalmente que una vez que los alumnos saben el teorema y la regla mencionados más arriba, suele ofrecer más dificultad para ellos resolver, por ejemplo, la ecuación  $x^5 - 81x = 0$ , que esta otra:  $x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$ ; mientras que antes de que se conocieran aquellos sucedía justo al revés.

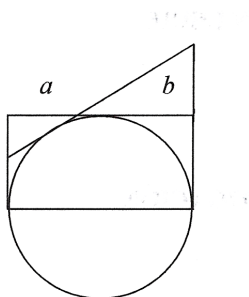
#### 4.3 Problemas de máximos y mínimos de funciones.

Ya en la matemática helénica se plantearon diversos problemas de optimización, como por ejemplo, Arquímedes (s. III a.C.) en su obra “De la esfera y del cilindro” y Zenodorus (s. II a.C.), quien demostró que el círculo tiene mayor área que cualquier polígono isoperimétrico; aunque, como es lógico, no emplearan para ello el Cálculo diferencial, lo que no sucedió hasta muchos siglos después. Concretamente, Kepler y Fermat (s. XVII) fueron quizás los primeros en hallar la solución de ese tipo de problemas con el auxilio del Cálculo, que entonces se iniciaba. Pero incluso, a partir de su invención, tampoco ha sido éste el recurso universalmente empleado para resolverlos; de lo cual hay numerosos ejemplos, como es el caso de Steiner, quien en 1842 presentó diversos métodos para la investigación de máximos y mínimos en dos obras maestras de Geometría sintética.

Sin embargo, como es sabido, el único procedimiento que suele seguirse en nuestras aulas para abordar estos ejercicios -consecuencia sin duda del efecto de mecanización, no siempre deseable, que estamos estudiando en este trabajo- está basado en la aplicación de las derivadas; a pesar de que en numerosas ocasiones resultaría más fácil hallar su solución con tan solo sencillos razonamientos, principalmente de tipo geométrico. Si bien este asunto ya ha sido estudiado por el autor con más detalle (Peralta 1994); por algunos otros, como Schoenfeld (1985), quien además señala un principio heurístico de gran importancia en la resolución de estos problemas -así, afirma que en muchos casos la solución óptima corresponde al caso de mayor simetría-; o, desde un punto de vista histórico, por el “Grupo Construir las Matemáticas” (2000 pp. 95-98, 2001 a pp. 101-106, 2001 b pp. 95-97, etc); nos ha parecido oportuno presentar ahora algunos ejemplos sobre ello.

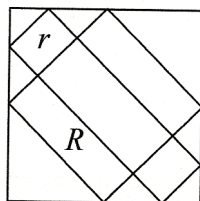
Problema 13.- En una circunferencia se levantan dos perpendiculares a su diámetro en sus puntos extremos. Trazar una tangente a la circunferencia tal que el trapecio rectángulo formado por ese diámetro y los segmentos de sus perpendiculares y de la tangente tenga superficie mínima.

Mientras que su resolución mediante el Cálculo diferencial ofrece alguna dificultad, una consideración geométrica elemental permite hallar fácilmente su



solución. En efecto: el trapecio y el rectángulo (caso éste de mayor simetría) se solapan, y difieren en dos triángulos semejantes, uno de los cuales tiene mayor área que el otro ( $b > a$ ); por tanto, el área del trapecio es mayor que la del rectángulo. En consecuencia, el trapecio de superficie mínima es el rectángulo.

Problema 14.- Hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un cuadrado dado (se entiende que cada vértice del rectángulo ha de estar sobre cada uno de los lados del cuadrado).



El área del cuadrado inscrito es mayor que la de cualquier otro rectángulo inscrito, pues ambos tienen una parte común; sin embargo, el rectángulo  $R$  (correspondiente al cuadrado) es de mayor área que el rectángulo  $r$  (correspondiente al rectángulo), pues aunque tienen la misma altura, la base del primero es mayor que la del segundo.

## 5 Reflexionar siempre

El epígrafe de esta sección propugna sin duda una buena costumbre, aunque algo difusa y poco operativa. Quizás pudiera equipararse a otras indicaciones del estilo: “opera con cuidado”, “sé ordenado”, “no te des por vencido ante un problema” o “persevera en su resolución”; las cuales, junto a la primera, serían recomendables no sólo para la resolución de problemas, sino en toda actividad matemática e, incluso algunas de ellas, en muchos otros campos.

A pesar de esta última consideración, es necesario sin embargo tener muy presente aquella sugerencia, ya que operar “a lo loco”, aplicar ciegamente un algoritmo o utilizar mecánicamente reglas sin reflexionar previamente sobre el enunciado de un problema o ejercicio, puede complicar su resolución, cuando no inducir a errores. Por ello, antes de pasar a la acción debemos acostumbrar a nuestros alumnos a que se formulen preguntas de este estilo: “¿es posible simplificar alguna expresión antes de operar?”, “¿determinados cálculos tienen sentido en esta situación concreta?” “¿el problema es un caso tan especial de otros que sería mejor tratar de resolverlo de forma directa?”, etc.

Llegados a este punto habría que reconocer, empero, que todos los demás tipos que han sido analizados en este artículo podrían tener cabida asimismo en este apartado pues, en realidad, el efecto nocivo que se ha estado estudiando tiene su origen último en la falta de reflexión. No obstante, con el ánimo de clarificar un poco el panorama, cuando este fenómeno ha sido también reconocible por otras peculiaridades, hemos procedido a su clasificación en el correspondiente grupo, fuera de esta sección.

Una vez tenidas en cuenta estas precisiones, señalemos algunos automatismos y ejemplos producidos específicamente por esa falta de reflexión y que no hayan sido englobados ya en los restantes tipos.

**5.1** Derivación de una función antes de dedicar unos instantes a estudiar si ésta pudiera presentarse de otra forma en la que fuera más sencillo derivar.

Esta situación se da con frecuencia, por ejemplo, cuando hay que derivar un cociente cuyo denominador es constante, y se calcula su derivada utilizando la regla que se aplica a un cociente de dos funciones; o también cuando se deriva el logaritmo de un producto, un cociente ... sin efectuar previamente la descomposición en suma, diferencia ... de logaritmos. En tales casos, por tanto, se prefiere ejecutar un algoritmo antes que analizar si es posible expresar la función de un modo más conveniente; falta de reflexión que complica los cálculos y a veces produce errores.

**5.2** Cálculo de derivadas sucesivas de una función sin pararse a intentar simplificar la derivada anterior. Esta omisión, no sólo puede hacer los cálculos más farragosos sino que, igual que la anterior, en ocasiones conduce a determinados errores.

Ese modo de actuar es especialmente apreciable si tal operación va encaminada al dibujo de la gráfica de una función derivable  $f$ , ya que algunas veces inclina a presuponer la existencia de puntos de inflexión en puntos no pertenecientes a su dominio, así como al cálculo innecesario de la tercera derivada. Esto sucede, por ejemplo, cuando la función  $f$  es el cociente de dos polinomios (caso muy frecuente), pues entonces  $f$  es siempre simplificable. En efecto, si  $f = p/q$ , siendo  $p$  y  $q$  polinomios, se tiene:

$$f' = \frac{qp' - pq'}{q^2}, \quad f'' = \frac{q^2(q'p' + qp'' - p'q' - pq'') - (qp' - pq')2qq'}{q^4}$$

y es posible dividir el numerador y el denominador de  $f''$  entre  $q$ .

En cambio, si no se simplificara  $f''$ , de igualarla a cero se deduciría que también  $q$  habría de ser cero, lo que supondría tomar como posibles puntos de inflexión a las raíces del denominador de  $f$ , que corresponden a puntos no pertenecientes a su dominio. ¿Cuántas veces hemos observado corrigiendo un ejercicio escrito que, por la causa indicada, entre los puntos de inflexión figuren puntos no pertenecientes al dominio de la función?

**5.3** Utilización del Cálculo diferencial en el dibujo de la gráfica de funciones prácticamente conocidas, sin que sea necesario para ello el uso de este recurso (nos referimos en concreto a funciones tales como:  $y = (x - 1)/x$ ,  $y = \sqrt[5]{x} + 2$ , etc., cuya representación puede realizarse mediante procedimientos elementales a partir de otras conocidas).

Previamente al examen de esta situación digamos de entrada que, antes de iniciarse en las aplicaciones del Cálculo diferencial, los alumnos ya han representado funciones, aunque prácticamente con el único procedimiento de dar valores. Empiezan con la recta (al principio, hallando muchos puntos de la misma -probablemente demasiados- hasta que al fin llegan a necesitar sólo dos) y luego con la parábola, a la que a veces se acompaña la hipérbola  $y = 1/x$ ; más tarde dibujarán también las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas. Pero, en cuanto se comienza a utilizar el Cálculo para resolver estos ejercicios, se pasa de golpe, de dar valores, a emplear toda su “artillería pesada” para la obtención de máximos, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, concavidad ..., sin permanecer un tiempo en un estado intermedio ni preguntarse qué funciones podrían dibujarse -como por ejemplo las que indicábamos más arriba, y en general todas las de los tipos:  $y = ax^n + b$ ,  $y = a/x^n + b$ ,  $y = a\sqrt[n]{x} + b$  - con tan solo los recursos elementales conocidos con anterioridad.

De cualquier modo, creemos que el principal culpable de estos automatismos es el profesor, que puede “obligar” a que se apliquen indiscriminadamente las derivadas aun en casos como esos últimos, desvinculando -como en otras tantas ocasiones- este nuevo procedimiento de los ya estudiados por el alumno, e incluso haciendo “tabla rasa” de sus antiguos conocimientos. Quisiéramos, sin embargo, animar abiertamente al profesor a que en vez de proceder de esa manera, y antes de empezar a valerse de la ayuda del Cálculo diferencial, recordara lo ya sabido por los estudiantes y, juntamente con ellos, elaborara un catálogo de esas funciones elementales y razonara sobre la posible extensión de su ámbito de aplicación.

**5.4** Otros diferentes problemas de distinta etiología que podrían englobarse en

esta sección, y que suelen resolverse automáticamente sin reflexionar antes de actuar.

Indicamos a continuación algunos ejemplos, que no parece necesario tener que comentar.

Ejercicio 15.- Resolver la ecuación:  $2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 2x = 12$ .

Ejercicio 16.- Calcular:  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$

Ejercicio 17.- Dibujar la curva de ecuaciones paramétricas:  $x = t$ ,  
 $y = 1 - t$   
(en primer curso de una Licenciatura en Matemáticas, Física o Ingeniería, donde generalmente se estudian las curvas en forma paramétrica).

## 6 Situación paradójica

Si bien lo que vamos a exponer a continuación no es exactamente un automatismo -en todo caso sería más bien lo contrario-, nos ha parecido incluirlo en este estudio por su innegable relación con ese fenómeno. Nos referimos en concreto a que, como se ha visto a lo largo del artículo, mientras que es frecuente el uso indiscriminado de reglas, entre lo que posiblemente quepa incluir la aplicación de teoremas o resultados a casos particulares sin que algunas veces sea necesario o incluso conveniente; en cambio, también suele ser habitual que se omita o no se observe esa particularización en el supuesto más sencillo de todos: el que podríamos llamar caso límite.

Por otra parte, sin embargo no hay duda de que esta forma de actuar procede de otra causa bien distinta de la que origina los automatismos. Así, según nos parece, estaría motivada por la dificultad de contemplar ese caso especial como uno cualquiera más (algo posiblemente del estilo a lo que significa, por ejemplo, considerar el cero como un sumando o el uno como un factor).

A la vista de ello, nos permitimos sugerir la conveniencia de analizar este tipo de situaciones y de reflexionar sobre las mismas, pues pensamos que el profesor no suele ser consciente de las dificultades que pueden presentar para el alumno.

Finalizaremos exponiendo algunos ejemplos:

- a) Factorizar polinomios sin término independiente o, lo que es lo mismo, considerar que  $x = 0$  también puede ser raíz de una ecuación.
- b) Admitir que una sucesión constante es una progresión aritmética de diferencia 0, y también una progresión geométrica de razón 1.

- c) Tener en cuenta las dificultades que conlleva hallar e interpretar las expresiones de las ecuaciones de los ejes de coordenadas en el plano y de los ejes y planos coordenados en el espacio.
- d) Considerar un número real como un número complejo y calcular su módulo.
- e) Hallar la forma polar de los números complejos  $1, -1, i, -i$ .
- f) Extender la noción y el cálculo de las coordenadas del baricentro de un polígono al caso de un segmento.
- g) Calcular la ecuación de la recta tangente a una recta en uno cualquiera de sus puntos.
- h) Aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius en el caso de que el sistema lineal esté formado por tan solo una ecuación con una incógnita.
- i) Hallar un conjunto de vectores que sean linealmente independientes, un sistema de generadores y una base en un espacio vectorial de dimensión 1.
- j) Estudiar el conjunto  $Z/(1)$ .

## Bibliografía

- BOUVIER, A. et al. (1986), *Didactique des mathématiques*. Paris: Cedic/Nathan.
- BUJANDA, M. P. (1981), *Tendencias actuales en la enseñanza de la Matemática*. Madrid: SM Ediciones.
- FERNÁNDEZ, J. A. (2000), *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. Barcelona: Monografías Escuela Española/Ciss Praxis Educación.
- GRUPO CONSTRUIR LAS MATEMÁTICAS (2000), "Isoperímetros en la Grecia Antigua". *Suma*, n° 34, pp. 95-98.
- (2001 a), "Isoperímetros: Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos". *Suma*, n° 36, pp. 101-106.
- (2001 b), "Isoperímetros: El panal de abejas y Fejes Coth". *Suma*, n° 38, p. 95-97.
- NEWMAN, J. R. (1980), *Sigma. El mundo de las Matemáticas*, Vol. 6, 8ª ed. Barcelona: Grijalbo.
- PALAREA, M. M. y SOCAS, M. M. (1995), "Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos". *Suma*, n° 20, pp. 29-35.
- PERALTA, J. (1994), "Problemas de máximos y mínimos y algunas reflexiones sobre el automatismo en su resolución". *Educación Matemática*, Vol. 6, n° 2, pp. 56-71.

- PERALTA, J. (1995), Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática. Madrid: Huerga y Fierro.
- PERALTA, J. (1999), “Algunas ideas para la resolución de ecuaciones”. Suma, n° 32, pp. 79-89.
- PERALTA, J. (2004), “Una caracterización de obtenida al resolver un problema en clase”. Suma, n° 45, pp. 59-67.
- PERELMAN, Y. (1978), Álgebra recreativa. Moscú: Mir.
- POLYA, G. (1986), Cómo plantear y resolver problemas, 13ª ed. México: Trillas.
- SCHOENFELD, A. (1985), Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.
- SOCAS, M. (1997), “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en La Educación Secundaria, en La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria, Luis Rico (Coord.), ICE Universidad de Barcelona/Horsori, pp. 125-154.

JAVIER PERALTA  
FACULTAD DE FORMACIÓN DE PROFESORADO Y EDUCACIÓN  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID  
CANTOBLANCO, 28049 MADRID, ESPAÑA  
javier.peralta@uam.es



## INFORMACIÓN NACIONAL

### Pedro Berrizbeitia, premio Lorenzo Mendoza Fleury 2005 otorgado por la Fundación Polar

La Asociación Matemática Venezolana se complace en felicitar al Profesor **Pedro Berrizbeitia**, de la Universidad Simón Bolívar y miembro del Consejo Directivo Regional del Capítulo Capital de esta Asociación, por haber recibido el Premio Lorenzo Mendoza Fleury otorgado por la Fundación Polar en su décimo primera edición correspondiente a 2005.

La AMV extiende esta felicitación a los profesores

- Manuel Bautista, del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
- Jose Bubis, de la Universidad Simón Bolívar,
- Jose Luis Paz Rojas, de la Universidad Simón Bolívar, y
- Felix Tapia Borges, de la Universidad Central de Venezuela

quienes también fueron galardonados con este premio.

## INFORMACIÓN NACIONAL

### Olimpiadas Matemáticas en Venezuela, 2000–2004

Rafael Sánchez Lamonedá & Jorge Salazar

#### Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas se organizan por primera vez en Venezuela en el año escolar de 1975-76 como un programa para la promoción de las matemáticas entre los jóvenes de la escuela secundaria. El Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia, CENAMEC, acoge el proyecto que propone el profesor Saulo Rada del Instituto Pedagógico de Caracas y con el apoyo de esta institución, el Ministerio de Educación y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, CONICIT, se organiza la Primera Olimpiada Matemática Venezolana, OMV. Toda la logística de organización la llevaba adelante un Comité Organizador conformado por profesores de varias instituciones educativas y científicas del país. De esta manera comienza el programa de Olimpiadas Matemáticas en Venezuela, logrando en 27 años, una participación de más de un millón de jóvenes a todo lo ancho y largo del país. Este programa finalizó en el año 2003.

El éxito de la OMV como programa de promoción de las matemáticas dió origen a muchas otras olimpiadas de matemática y competencias afines en Venezuela, siendo muy exitosa la Olimpiada Recreativa de Matemáticas, ORM, una iniciativa particular, que tuvo su origen en la solicitud que hiciese una alcaldía de la Región Capital a un grupo de profesores relacionados con el Comité Organizador de la OMV. La ORM ha ido creciendo hasta convertirse en una competencia que se realiza en más de quince estados del país y que en el año 2004 llegó a su edición número 12. Más adelante volveremos a tratar sobre esta competencia.

En el año 2000, con el objetivo de promover las competencias de matemáticas en Venezuela y de llevar adelante un amplio programa de selección y entrenamiento de estudiantes para participar en olimpiadas matemáticas internacionalmente, se fundó la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM. La ACM es una asociación civil sin fines de lucro que con el apoyo de la Asociación Matemática Venezolana, AMV, y el aval de la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, lleva adelante un programa nacional de entrenamiento de estudiantes que ha producido resultados interesantes, como se verá más adelante en este trabajo.

La ACM, consciente de la importancia de un concurso nacional de matemáticas, acogió como uno de sus programas a la ORM, comenzó la organización

de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM, en el 2004 y desde el 2002 es miembro de la Organización Canguro sin Fronteras, lo cual le da el derecho de organizar en Venezuela y así lo hace desde el 2002, el Canguro Matemático, la competencia juvenil de matemáticas de mayor difusión en el mundo entero.

En las sesiones siguientes damos una explicación del programa de olimpiadas matemáticas que la ACM lleva adelante con el apoyo académico de la AMV, mostramos los resultados alcanzados a nivel internacional entre los años 2000 y 2004 y presentamos algunas estadísticas significativas sobre el crecimiento en la participación de estudiantes en nuestra Olimpiada. Finalizamos con una pequeña muestra del tipo de exámenes que se aplican en la ORM y la OJM.

### **Programa.**

Podemos dividir nuestro programa de actividades en dos partes:

1. Organización de Olimpiadas Matemáticas
2. Entrenamiento y participación internacional.

### **Organización de Olimpiadas Matemáticas.**

La Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y la Asociación Matemática Venezolana organizan una olimpiada matemática dirigida a los estudiantes en edad escolar que abarca nueve niveles, desde tercer grado de Educación Básica, hasta el segundo año de Educación Media y Diversificada. Nuestro sistema escolar consta de nueve años de Educación Básica y dos de Educación Media y Diversificada, como escolaridad previa a la entrada a las universidades.

Nuestra Olimpiada Matemática está dividida en las dos competencias ya mencionadas en la introducción, la ORM de 3° a 6° grado y la OJM de 7° en adelante. Ambos eventos constan de tres pruebas, la preliminar, la final regional y la final nacional. La prueba preliminar es el Canguro Matemático. En la final regional participa el quince por ciento de los que presentaron la prueba preliminar. Los ganadores reciben premios por región, los cuales consisten en medallas de oro, plata y bronce. Finalmente los ganadores regionales de medallas de oro presentan la prueba final o final nacional y de ahí se seleccionan los ganadores nacionales de nuestra Olimpiada. Los exámenes de las finales regional y nacional son de desarrollo. A los participantes se les plantean un grupo de problemas a resolver en un tiempo determinado y se corrige todo el procedimiento de resolución. La final nacional tiene un formato similar al de la IMO (Olimpiada Internacional de Matemáticas, por sus siglas en inglés), pero se hace en dos días consecutivos.

Los mejores estudiantes en nuestras competencias nacionales toman parte en dos eventos internacionales por correspondencia, la Olimpiada Matemática

de Mayo, organizada desde Argentina por la Olimpiada Matemática Argentina, OMA, y en la cual participan estudiantes de Iberoamérica, y la Olimpiada Bolivariana de Matemáticas, competencia dirigida a jóvenes de Bolivia, Colombia, Ecuador, Panamá, Perú y Venezuela y organizada por las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas.

### **Entrenamiento y participación internacional.**

Participamos regularmente en las siguientes competencias internacionales

1. Olimpiada Internacional de Matemáticas. IMO
2. Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. OIM.
3. Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. OMCC.
4. Olimpiada Bolivariana de Matemáticas. OBM.
5. Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria. OIMU.

Tenemos un programa de entrenamiento en cinco ciudades del país, Caracas, Valencia, Barquisimeto, Maracaibo y Mérida y con sede en las universidades más importantes de esas regiones. En el mismo participan anualmente alrededor de 250 jóvenes de 7° a 9° de Escuela Básica y de los dos años de la Educación Media y Diversificada. El programa es permanente y nuevos estudiantes ingresan en el mes de octubre de cada año. De Octubre a Diciembre hay clases los sábados y además en el año 2004 comenzamos a atender los estudiantes por medio de nuestro sitio en internet (<http://www.acm.org.ve>). En Enero un grupo de un máximo de diez estudiantes va a un entrenamiento especial de tres semanas en la Universidad Antonio Nariño, en Bogotá, este entrenamiento es organizado por las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Los otros estudiantes continúan con su programa de clases sabatinas y mensualmente, a partir de Febrero, los mejores estudiantes son convocados a jornadas intensivas de entrenamiento en el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, IVIC, o en el Instituto de Estudios Avanzados, IDEA, estas jornadas se hacen durante los fines de semana. En Junio, Julio y Septiembre, los equipos que competirán en la OMCC, la IMO y la OIM, son concentrados la semana previa a su partida, en el IVIC o IDEA, junto al jefe y el tutor de cada delegación.

El programa de entrenamiento tiene como objetivo preparar a los participantes para competir en Olimpiadas de Matemáticas. Los temas que se cubren son los clásicos de estas competencias y se hace un gran énfasis en la resolución de problemas olímpicos. Regularmente un estudiante que ingresa al programa requiere de dos años de entrenamiento para poder asistir a una IMO y al menos un año para la OMCC. Hay que tener presente que no solamente

hay que enseñarles temas totalmente nuevos, también hay que entrenarlos en una forma de pensar y trabajar en matemáticas, desconocida para la mayoría de ellos, pues las exigencias tradicionales de la escuela, se basan en la repetición de conceptos y algoritmos.

Los instructores del programa de entrenamiento son profesores de universidades y jóvenes con experiencia en olimpiadas matemáticas. Cabe destacar que la participación de los estudiantes con experiencia en olimpiadas ha sido fundamental y nos ha permitido mejorar la interacción con los estudiantes en entrenamiento.

## Resultados y Estadísticas: 2000-2004.

En esta sección mostramos los resultados obtenidos con nuestro programa de Olimpiadas Matemáticas. El trabajo que hacemos desde el año 2000 tiene dos objetivos:

1. Detectar jóvenes con talento para las matemáticas
2. Promocionar el estudio de las matemáticas en estudiantes y maestros

Con el primer objetivo pretendemos conseguir jóvenes con talento para estudiar matemáticas y que efectivamente elijan esa carrera al ingresar a la universidad. Desde el año 2000 hemos reclutado para nuestras escuelas de matemáticas cinco estudiantes que ocupan en estos momentos los mejores lugares de su grupo y que además continúan con nosotros como entrenadores de nuevos estudiantes.

En relación a la promoción de las matemáticas los números que les presentamos al final de esta sección muestran el avance y consolidación de nuestro programa. La adición del Canguro Matemático le ha agregado un valor adicional a nuestra competencia, pues nos permite hacer comparaciones muy útiles con estudiantes de otros países, además las pruebas del Canguro tienen un gran valor por la diversidad de personas que colaboran en su elaboración.

Otro aspecto importante es la cantidad de medallas y premios alcanzados entre los años 2000 y 2004, en competencias internacionales: En la IMO, dos medallas de plata, dos de bronce y tres menciones honoríficas. Nunca antes, en todas las participaciones esporádicas de Venezuela en la IMO, (años 1981, 1982, 1989, 1997, 1998, 1999) habíamos obtenido algún premio. En la OIM, una medalla de oro, cuatro de plata, cinco de bronce y cuatro menciones honoríficas. En el año 2001 ganamos la Copa Puerto Rico que se otorga al país de mayor progreso en esta competencia. En la OMCC, una medalla de oro, cuatro de plata, cuatro de bronce, tres menciones honoríficas y en el 2004 la Copa El Salvador, equivalente a la Copa Puerto Rico de la OIM. Además de una cantidad importante de medallas en la OBM, la OMM y la OIMU.

Las tablas 1 y 2 muestran el aumento de la participación en los años 2000 a 2004 y la participación en el Canguro Matemático en el año 2004. Recuérdese que el Canguro es el certamen preliminar de nuestra olimpiada.

	Ecolier	Benjamin	Cadet	Junior	Student 1	Student 2	total
<b>ANZOATEGUI</b>	218	229	145	96	92	49	829
<b>ARAGUA</b>	415	554	404	118	109	84	1684
<b>BOLÍVAR</b>	567	557	384	175	210	204	2097
<b>CARABOBO</b>	2453	2403	614	300	128	113	6011
<b>COJEDES</b>	42	40	65	18	31	23	219
<b>GUÁRICO</b>	41	33	56	25	24	33	212
<b>LARA</b>	153	169	86	23	27	39	497
<b>MÉRIDA</b>	34	43	45	12	26	25	185
<b>MIRANDA</b>	1649	1684	1039	416	327	267	5382
<b>N.ESPARTA</b>	541	630	350	186	145	63	1915
<b>D.CAPITAL</b>	208	534	36	0	0	0	778
<b>SUCRE</b>	35	49	51	25	38	28	226
<b>TÁCHIRA</b>	11	19	30	27	15	6	108
<b>ZULIA</b>	920	938	513	289	155	130	2945
<b>TOTAL</b>	7287	7882	3818	1710	1327	1064	23088

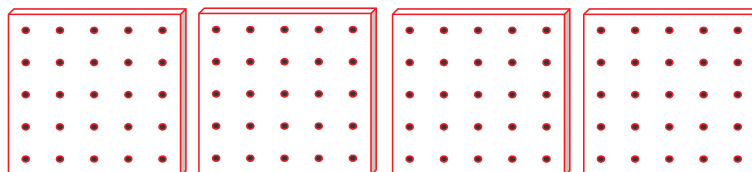
Tabla 1. Número de participantes por estado y grado. Canguro Matemático 2004

## Exámenes

A continuación les presentamos algunas de las Pruebas de la ORM y OJM del año 2004.

### 1. Olimpiada Recreativa de Matemáticas. Prueba Nacional 2004 Tercer Grado

**Problema 1** En tu hoja de respuesta se te presentan cuatro geoplanos. Dibuja en el primer geoplano un triángulo con sólo 3 clavos en su interior, en el segundo geoplano un rectángulo con sólo 4 clavos en su interior, en el tercer geoplano un pentágono con sólo 5 clavos en su interior y en el cuarto geoplano un hexágono con sólo 6 clavos en su interior.

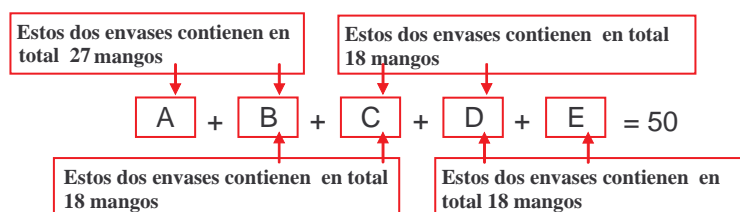


REGIONES	2000	2001	2002	2003	2004	TOTAL
ANZOATEGUI	700				829	1529
ARAGUA	650	1500	1800	588	1680	6218
BARUTA	1200	1200	2200	2200	2200	9000
BOLÍVAR		1500	1500	765	2097	5862
CARABOBO	2000	6500	6500	3688	6001	24689
COJEDES				119	219	338
D.CAPITAL	450	2300	4500	2004	6160	15414
GUÁRICO			4000		212	4212
LARA	12000			142	497	12639
MÉRIDA					185	185
N.ESPARTA	5000	2800	2000	732	1915	12447
POTUGUESA	250	500				750
SUCRE					226	226
TÁCHIRA	450				300	750
ZULIA		1200	3500	1615	2945	9260
TOTAL	22700	17500	26000	11853	25466	103519

Tabla 2. Número de participantes por años y regiones

**Problema 2** En un juego se establecen las siguientes reglas: Primer jugador gana: Bs. 3. Cualquier otro jugador gana: lo que ganó el anterior jugador más Bs. 5 ¿Cuánto gana el décimo jugador?

**Problema 3** Hay 50 mangos en las cinco cajas de la figura. ¿Cuántos mangos hay en cada caja?



Explica cómo obtienes tu respuesta

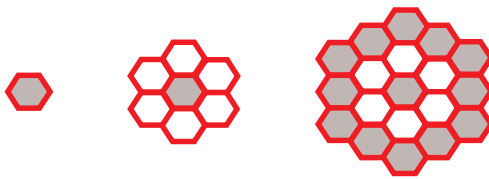
**Problema 4** Un bombero, apagando un fuego, está parado en el peldaño mitad de la escalera. Sube tres peldaños, pero el fuego hace que baje 5 peldaños. Vuelve a subir 7 peldaños para extinguir el fuego y finalmente sube 6 peldaños para alcanzar el último peldaño de la escalera.

¿Cuántos peldaños en total tiene la escalera? Explica cómo obtienes tu respuesta

**Problema 5** Pedro trabaja el fin de semana en una tienda de ropa para caballeros. El gana bonos especiales por vender algunos artículos: gana Bs. 4.000 por cada chaqueta, gana Bs. 3.000 por un par de pantalones y gana Bs. 1.000 por cada camisa que venda. No recibe bonos si vende corbatas o medias. Al final del domingo, Pedro recibió de bono especial Bs. 20.000 por siete artículos que vendió. ¿Cuáles son los posibles artículos que Pedro vendió?

## 2. Olimpiada Recreativa de Matemáticas. Prueba Nacional 2004 Sexto Grado

**Problema 1** Observa cómo las abejas comienzan a construir su panal: crece en capas. ¿Cuántos hexágonos hay en el borde de la quinta capa? Explica cómo obtuviste tu respuesta



**Problema 2** En julio 9, Guillen y Mora tenían un promedio de bateo de 250. Guillen tenía 20 hits en 80 turnos y Mora tenía 15 hits en 60 turnos. Si mañana batean de cuatro, cuatro, ¿cuál sería el promedio de cada uno?

**Problema 3** En la multiplicación de abajo, las letras representan dígitos diferentes. Calcula la suma  $A + B + C + D + E$ . Explica cómo obtuviste el dígito que representa cada letra.

$$\begin{array}{r} A B C D E \\ \times \quad \quad 4 \\ \hline E D C B A \end{array}$$

**Problema 4** Pedro, Ana y Gustavo ganan un total de Bs. 15.000 lavando carros. Cada uno de ellos ganó una cantidad diferente de dinero. Pero ellos convienen en compartir sus ganancias en partes iguales y en ese sentido, Pedro dio la mitad de su ganancia para repartirlo en partes



iguales entre Ana y Gustavo. Pero entonces Ana tenía mucho dinero y por tanto le dio Bs. 1000 a cada uno de los otros dos. Finalmente, para que los tres tuvieran la misma cantidad de dinero, Gustavo le dio Bs. 200 a Pedro. ¿Cuánto dinero se ganó cada uno originalmente?

**Problema 5** Un papel de forma cuadrada de 20 cm de lado tiene una cara de color gris y la otra cara de color blanco. Dividimos cada lado en cuatro partes iguales y doblamos las puntas del cuadrado por los segmentos punteados que se indican en la figura 1, con lo que obtenemos la situación de la figura 2. Calcula la superficie del cuadrado gris y la del cuadrado ABCD que lo contiene en la figura 2.

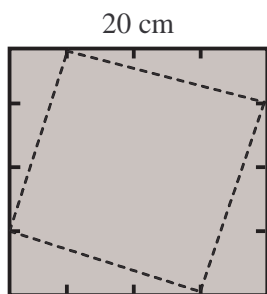


Figura 1

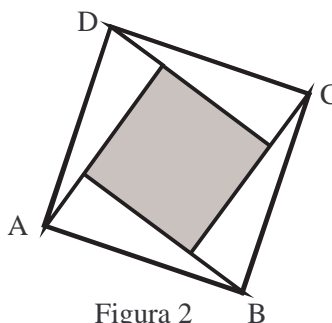
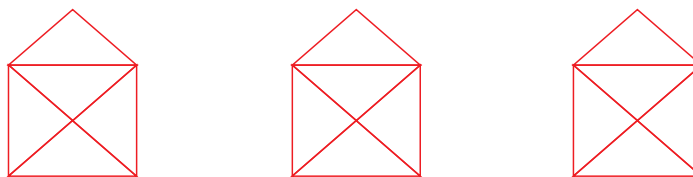


Figura 2

### 3. Olimpiada Recreativa de Matemáticas. Prueba Regional 2004 Cuarto Grado

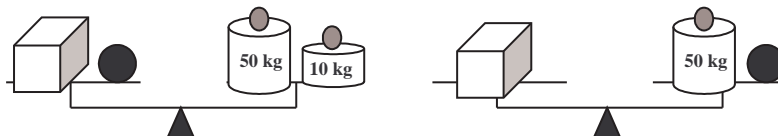
**Problema 1** Se te presenta la misma figura tres veces. Se quiere pintar cada región con un solo color: de rojo (R) o de azul (A). Coloca la letra R o la letra A en cada región de tal forma que las figuras sean coloreadas en forma diferente. ¿De cuántas formas diferentes puedes colorear la figura?



**Problema 2** Un Zu es igual a la mitad de un Zo. Tres Za es igual a la mitad de un Zu. ¿Cuántos Za es un Zo? Explica cómo obtienes la respuesta.

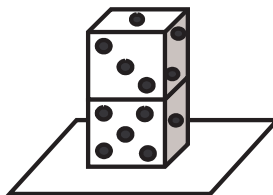
**Problema 3** En una tienda venden tres artículos a Bs. 30 cada uno y dos artículos a Bs. 40 cada uno. ¿Cuántas cantidades diferentes de dinero puede obtener la tienda con la venta de esos artículos? Puedes explicar mediante una tabla tu respuesta.

**Problema 4** Observa las balanzas en equilibrio:



¿Cuánto pesa la bola negra? Explica cómo obtienes la respuesta.

**Problema 5** Dos dados son colocados uno sobre otro encima de una mesa, como muestra la figura. Se sabe que la suma de los puntos de las caras opuestas de un dado es 7. Si puedes caminar alrededor de la mesa, ¿cuánto es la suma de las caras visibles de los dados?



**Problema 6** El cumpleaños de Inés es en octubre y es 15 días antes que el de Linda. El cumpleaños de Susana es 23 días antes que el de Dora y 24 días después que el de Linda. ¿Cuál es la fecha de cumpleaños de cada muchacha? Ah...perdón, olvidaba decir: "una de las muchachas nació en enero"

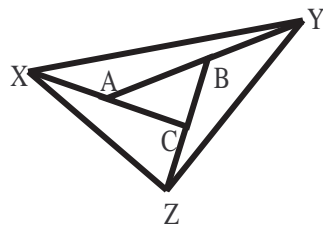
**4. Olimpiada Juvenil de Matemáticas Final Nacional. Junio de 2004. 8º Grado de Educación Básica.**

**Problema 1** Un tesoro está escondido en un determinado punto de un camino recto que une las ciudades A, B, C y D, las cuales se encuentran ubicadas en ese orden. Un mapa indica la forma de hallarlo, del siguiente modo: " Partir de A y detenerse en la mitad del camino a C. " Luego, seguir y caminar un tercio de la distancia a D. "Finalmente,recorrer un cuarto del camino hacia B y encontrará el tesoro. Si la distancia de A y B es 6 km y la distancia de B a C es 8 km, estando el tesoro a mitad del camino entre A y D, ¿qué distancia separa a las ciudades C y D?

- Problema 2** La base de la casa del perro Nerón tiene forma de un hexágono regular de lado 1 m. Nerón está amarrado a la casa en uno de los vértices del hexágono con una cuerda que mide 2 m. ¿Cuál es el área de la región fuera de la casa que Nerón puede alcanzar?
- Problema 3** ¿Cuántos números enteros positivos menores que 2004 hay, tales que la suma de sus cifras sea 7?
- Problema 4** Demuestra que todo cuadrado se puede cortar en 6 cuadrados, en 7 cuadrados, en 8 cuadrados y en 11 cuadrados. Los cuadrados que resultarán de los cortes que realices no tienen que ser iguales entre sí. Para cada uno de los cuatro casos, dibuja un cuadrado e indica claramente con líneas por donde harías los cortes.
- Problema 5** En una cuadrícula de  $3 \times 3$ , se colocan de alguna manera todos los números del 1 al 9. A cada segmento que sea lado común de dos cuadrados pequeños de la cuadrícula se le asigna el número que resulta de sumar los dos números de los cuadrados que tienen el segmento en común. Sea  $S$  la suma de los doce números asignados a los segmentos interiores. ¿Cuál es el valor máximo de  $S$ , de entre todas las formas de colocar los números del 1 al 9 en la cuadrícula?

**5. Olimpiada Juvenil de Matemáticas Final Nacional. Junio de 2004 Noveno grado de Educación Básica.**

- Problema 1** Una fábrica de vidrio produjo 8000 vasos para cumplir los pedidos de tres distribuidores, los cuales solicitaban los artículos en cajas: el primero en cajas de 36 vasos, el segundo en cajas de 24 vasos y el tercero en cajas de 20 vasos. Sabiendo que a todos debería enviarles la misma cantidad de vasos y que, además, embarcó la mayor cantidad que pudo. ¿Con cuántos vasos se quedó el fabricante?
- Problema 2** Los tres lados del triángulo  $ABC$  se prolongan una distancia igual a sus longitudes, como se observa en el dibujo. Si el área del triángulo  $ABC$  es  $2\text{cm}^2$ , ¿cuál es el área del triángulo  $XYZ$ ?



- Problema 3** Prueba que todo cuadrado se puede cortar en 6 cuadrados, en 7 cuadrados, en 8 cuadrados y en 11 cuadrados. Los cuadrados que resultarán de los cortes que realices no tienen que ser iguales entre sí. Para cada uno de los cuatro casos, dibuja un cuadrado e indica claramente con líneas por donde harías los cortes.
- Problema 4** Un cubo  $3 \times 3 \times 3$  se forma con 27 dados "normales" (los dados "normales" son aquellos cuya suma de puntos en caras opuestas es 7). Determina la menor suma posible de todos los puntos de los dados colocados en la superficie del cubo  $3 \times 3 \times 3$ .
- Problema 5** En una cuadrícula de  $3 \times 3$ , se colocan de alguna manera todos los números del 1 al 9. A cada segmento que sea lado común de dos cuadrados pequeños de la cuadrícula se le asigna el número que resulta de sumar los dos números de los cuadrados que tienen el segmento en común. Sea  $S$  la suma de los doce números asignados a los segmentos interiores. ¿Cuál es el valor máximo de  $S$ , de entre todas las formas de colocar los números del 1 al 9 en la cuadrícula?

**6. Olimpiada Juvenil de Matemáticas Final Nacional. Junio de 2004. 2º de Diversificado.**

- Problema 1** Se denota con  $P(n)$  y con  $S(n)$  el producto y la suma, respectivamente, de los dígitos del entero positivo  $n$ . Por ejemplo:  $P(34) = 12$  y  $S(34) = 7$ . Si  $n$  es un número de dos dígitos y  $P(n) + S(n) = n$ , ¿cuál es el dígito de las unidades de  $n$ ?
- Problema 2** Definimos una nueva operación en el conjunto de los números reales mediante la fórmula  $a * b = \frac{a+b}{2}$ . Si  $x * (x * 14) = x$ , halla el valor de  $x$ .
- Problema 3** Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes  $a$  y  $b$ . Una circunferencia de radio  $r$  es tangente a los dos catetos y tiene su centro sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. Demuestra que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}.$$

- Problema 4** Una banda musical de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas está marchando en formación. Al inicio, la banda forma un cuadrado con igual número de columnas que de filas, pero luego cambian a la forma de un rectángulo con cinco columnas más que el número de filas. ¿Cuántos músicos tiene la banda?
- Problema 5** En cada planeta de un sistema solar hay un astrónomo observando al planeta más cercano al suyo. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Demuestre que si la cantidad de planetas es impar, entonces hay por lo menos un planeta al que nadie observa.

## Conclusiones

Si bien en Venezuela se comenzaron a organizar Olimpiadas Matemáticas en el año 1975, desde el año 2000 con la aparición de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y la participación de la comunidad matemática del país, representada por la Asociación Matemática Venezolana, se le ha dado a estas competencias un valor agregado que se muestra en los resultados obtenidos internacionalmente. La meta a mediano plazo es lograr una mayor participación de los maestros y profesores de la Escuela Básica, así como extender nuestro programa a todos los estados del país.

RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.  
FACULTAD DE CIENCIAS. ESCUELA DE MATEMÁTICAS.  
CARACAS-VENEZUELA  
`rsanchez@euler.ciens.ucv.ve`

JORGE SALAZAR  
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR.  
CARACAS-VENEZUELA  
`jorsala@gmail.com`

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

**Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.**

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via [bol-amv@ma.usb.ve](mailto:bol-amv@ma.usb.ve)) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs. 10.000 (US\$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history or philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

**All contributions will be carefully refereed.**

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance.

All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsibility of the author.

All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via [bol-amv@ma.usb.ve](mailto:bol-amv@ma.usb.ve)) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs. 10.000 (US\$ 10).

**Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**  
**Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela**  
**Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416**  
**email: [bol-amv@ma.usb.ve](mailto:bol-amv@ma.usb.ve)**  
**URL: <http://boletinamv.ma.usb.ve/>**

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.

Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86