

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

El problema del área en los *Elementos* de Euclides

Douglas Jiménez

Resumen. El estudio riguroso del área de una figura plana – así como la medida de cualquier magnitud – necesita del concepto de número real para una completa comprensión. En este artículo veremos cómo los matemáticos griegos clásicos pudieron resolver el problema del área, aún sin disponer de una elaboración precisa del conjunto de los números reales, usando como principal herramienta la proporción o analogía, a manera de comparación de figuras geométricas. Concentraremos el tratamiento del tema en los *Elementos* de Euclides, por considerar que cada uno de los aspectos principales de la materia encuentra expresión en alguna de las proposiciones de este texto.

Abstract. The rigorous study of the area of a plane figure – as well as the measure of any size – requires the concept of real number for a complete understanding. In this article we will see how classical Greek mathematicians could solve the problem of the area, even without having a precise elaboration of the set of real numbers, using as main tool the proportion or analogy, as a comparison of geometric shapes. Treatment of the subject focus on the *Elements* of Euclid, considering that each of the main aspects of the subject finds expression in some of the propositions of this text.

1. Introducción

Hace algunos años (más de treinta, estoy seguro) leí en alguna revista algo panfletaria la siguiente afirmación:

Los críticos son a la literatura lo que los eunucos al harem: saben todo lo que pasa adentro, pero no pueden hacer nada.

A despecho de lo que pueda pensar algún crítico literario de una afirmación tan lapidaria acerca de su oficio, siempre me pregunto por qué razón especial quedó la frase clavada en mi memoria. No tuve la respuesta hasta comenzar a leer los textos de los matemáticos griegos clásicos, en particular los *Elementos* de Euclides.⁽¹⁾

Pues la cita –el nombre de cuyo autor, afortunada o desafortunadamente, olvidé– es todo un símil de la exposición completa de una proposición de este texto clásico: primero el enunciado: “*Los críticos son a la literatura lo que los eunucos al harem*”, y finalmente la demostración: “*saben todo lo que pasa adentro, pero no pueden hacer nada*”. Por supuesto, no espero que todo el mundo esté de acuerdo en que tal demostración está redactada con la misma rigurosidad con la que se puede leer, por ejemplo, el teorema de Pitágoras (que es la proposición 47 del primer libro), mas lo que quiero resaltar ahora no va orientado a la rigurosidad sino a la estructura.

En ese sentido me interesa aún más que la demostración el propio enunciado, pues los griegos eran maestros en el arte de la analogía. El siglo XVII⁽²⁾ inventó una notación para recortar el tamaño de una construcción gramatical que se usaba con harta frecuencia: los dos puntos (:) significaban “es a” y una pareja de puntos dobles (::) significaba “como”; así el enunciado de la afirmación que nos ha ocupado quedaría abreviado de la forma:

crítico : literatura :: eunuco : harem

construcción con la cual el carácter analógico queda de bulto al presentar como equivalentes dos afirmaciones de comparación, cada una de las cuales recibió el nombre genérico de *razón*. De esta manera, la razón

crítico : literatura

se hace equivalente a la razón

eunuco : harem

y así se logra que palabras disímiles y de improbable combinación hagan pleno sentido en una oración.

Euclides dedicó el quinto de los trece tomos de su obra *Elementos*⁽³⁾ para el estudio de la razón (λόγος, logos) y de la proporción (ἀνάλογον, analogía), trabajo en el que recoge los frutos de un matemático genial de la escuela platónica que respondía al nombre de Eudoxo. Imposibilitado por espacio de dar detalles⁽⁴⁾ me queda el recurso de citar la definición V.3 (tercera definición del libro V) de los *Elementos*:

Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas

con lo cual quedan al descubierto dos debilidades de mi propio intento de comparación.

En primer lugar: *magnitudes homogéneas*. Es difícil pensar en alguna homogeneidad entre *crítico* y *literatura* (o *eunuco* y *harem*) como conceptos; pero después de todo lo que Euclides tenía en mente era matemática y eso reduce el campo de acción del pensamiento. Luego está lo de *respecto a su tamaño*, en tanto la analogía que ofrecí trata más de cualidad que de cantidad.

No obstante –para no perder todo el esfuerzo– seguiré empeñado en que mi interés se dirige más a la estructura que al contenido. La propia definición euclidiana de razón deja vacíos en su contenido; para el lector de los *Elementos* nunca estarán del todo claros los conceptos de magnitud y tamaño. A pesar de ello, el autor no tiene problemas en presentarnos proposiciones como la XII.2:

Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros

en la seguridad de que la analogía hará su trabajo aún dejando indefinida parte de la naturaleza de los términos que la componen.

Al matemático moderno este dilema le parece extraño; después de todo, la proposición anterior se puede despachar con una simple ecuación:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

o, más fácil todavía:

$$A = \pi r^2;$$

pero esto sólo muestra que el avance tecnológico es una muy poderosa forma de ir desdibujando la verdadera apariencia de los actos históricos. La proposición XII.2 no compara números, *compara figuras geométricas*: compara círculos con cuadrados, esto es, figuras planas de frontera curva con figuras planas de frontera rectilínea.

El punto central del asunto es que el matemático griego carecía del concepto de número real. Cuando se dice que los pitagóricos demostraron la irracionalidad de $\sqrt{2}$ no se está diciendo toda la verdad; había mucha más geometría que aritmética en el auténtico proceder griego y nuestra visión del asunto es absolutamente aritmética. Esto puede explicarse además por qué no conseguimos en los *Elementos* u otros textos griegos precisiones conceptuales relativas a términos tales como longitud, área y volumen: el número real es inherente a ellas. La vaguedad conceptual se sustituye entonces por la analogía que da un marco

suficientemente aceptable a la comprensión, con la ayuda siempre presente de la intuición.

Una analogía física podría ayudar.⁽⁵⁾ Imaginemos una moneda construida de cierto material y con determinado espesor. Usando el mismo material construyamos un cuadrado cuyo lado sea el diámetro de la moneda; debemos suponer también que el espesor del cuadrado es el mismo que el de la moneda. Si construimos ahora (ver la figura 1) una balanza que mantenga el equilibrio entre la

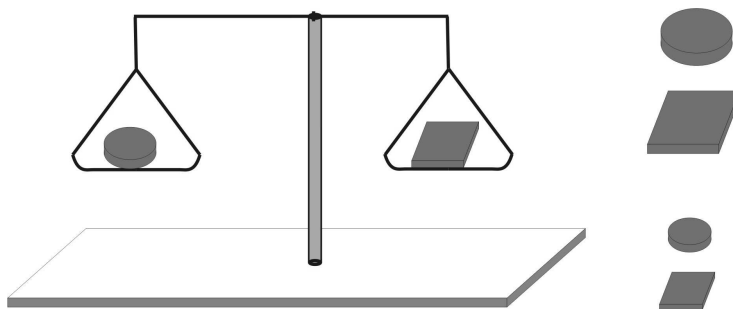


Figura 1: Balanza de proporcionalidad

moneda y el cuadrado, es evidente que esta balanza ha de tener los brazos desiguales, siendo más largo aquel del lado del cual está la moneda. La afirmación “*los círculos están entre sí como los cuadrados de sus diámetros*” significa que esta misma balanza equilibrará cualquier otra moneda y cuadrado construidos con las mismas especificaciones, aún cuando varíemos el diámetro de la moneda. Esto es: si construimos moneda y cuadrado con el mismo material y espesor.

Es claro que para concebir lo expresado en el párrafo anterior no necesitamos los números. La balanza (que, además, es una balanza ideal) juega el papel de nuestra constante de proporcionalidad π . En realidad, esta última fue concebida para despojar la proporcionalidad o analogía de cualquier alusión física o extramatemática, pero fue una concepción muy posterior en el tiempo.

2. Triángulos y paralelogramos

La consideración de problemas de área comienza muy temprano en los *Elementos*, en el mismo primer libro. En efecto, las proposiciones I.35 a I.41 contienen todas las formas posibles de entender las ideas que hoy representamos por las ecuaciones $A = bh$ y $A = \frac{1}{2}bh$, para las áreas de los paralelogramos y los triángulos, respectivamente.

Hay en tales proposiciones un trasfondo terminológico que las hace interesantes históricamente. Antes de ellas Euclides había usado la igualdad con un sentido estricto de congruencia, y solo había aplicado la idea a rectas,** ángulos y triángulos. Al llegar a la proposición 35, sin previo aviso el autor afirma igualdad de paralelogramos aún teniendo formas distintas, esto es, afirma *igualdad de contenido*. ¿Cómo asumir la igualdad en este sentido? Por un lado, ayuda la imagen ya comentada de la balanza en la página 182: figuras iguales equilibrarían una balanza de brazos iguales. Pero hace falta un sustento teórico y Euclides lo consigue con las nociones comunes 2 y 3 del primer libro, las cuales afirman que si a iguales se suman o restan iguales los resultados son iguales.

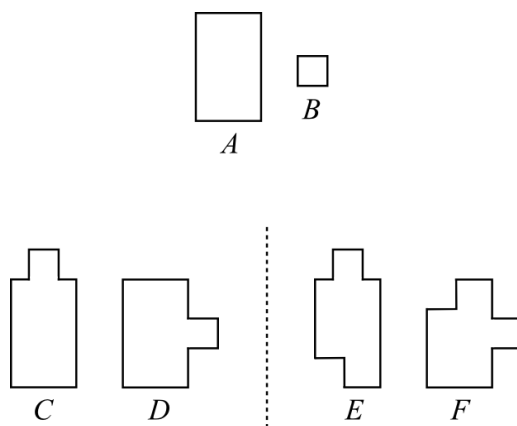


Figura 2: Igualdad de figuras en el sentido de áreas

La figura 2 muestra cómo se pueden aplicar estas nociones. En la parte superior del dibujo tenemos un rectángulo A y un pequeño cuadrado B . En la parte inferior a la izquierda de la línea punteada se construyen dos figuras C y D , la primera tomando un rectángulo igual a A y colocando en el centro de su lado superior un cuadrado igual a B ; la figura D se forma colocando al centro del lado derecho de un rectángulo como A un cuadrado como B ; C y D resultan iguales porque provienen de sumar iguales a iguales. Por el lado derecho de la línea punteada tenemos dos figuras E y F que provienen: E de quitar un cuadrado como B en la esquina inferior izquierda de C y F de quitar un cuadrado idéntico a la esquina superior izquierda de D ; por restar iguales de iguales resulta ser E igual a F .

**La palabra *recta* en la matemática griega clásica se aplicaba a lo que hoy llamamos *segmento*. La infinitud de la recta era solo una potencialidad de prolongación en cualquier sentido, permitida por el segundo postulado.

La proposición I.35 dice:

Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí

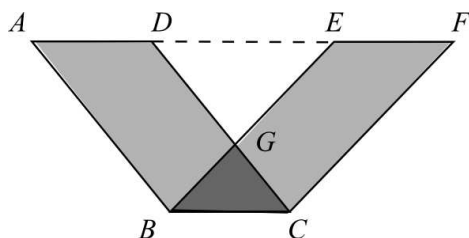


Figura 3: Proposición I.35 de Euclides

y la figura 3 ayuda a entender la demostración de Euclides.

Los paralelogramos en cuestión son $ABCD$ y $EBCF$, quienes comparten la base BC y suben ambos hasta la paralela AF . Se debe observar que el triángulo BCG (en gris oscuro en nuestra figura) es común a los dos paralelogramos, por lo que la demostración estaría lista si comprobáramos la igualdad de los trapecios en gris claro ($ABGD$ y $FEBC$). Para hacer evidente tal igualdad observamos que ambos trapecios provienen de quitar el triángulo DEG (en blanco) a los triángulos EAB y FDC que son iguales (congruentes) por la igualdad de sus tres lados. Esta igualdad de lados la justifica Euclides por consideraciones sobre paralelas.⁽⁶⁾

La demostración anterior refuerza nuestro punto principal: *no hay números involucrados en el discurso*; se demuestra a partir del reacomodo de las piezas geométricas, casi como un rompecabezas, lo que le da un carácter algo lúdico. Esta característica es común a todas las demostraciones de áreas que encontramos en los libros I y II,⁽⁷⁾ pero cambia radicalmente (sin perder su carácter estrictamente geométrico) a partir del libro VI, donde los problemas se resuelven con la teoría de la proporción estudiada en el libro V.

No daremos la demostración de las otras proposiciones relacionadas, pero sí sus enunciados:

Proposición I.36

Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Proposición I.37

Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Proposición I.38

Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Proposición I.39

Los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.

Proposición I.40

Los triángulos iguales que están sobre bases iguales y en el mismo lado, están también sobre las mismas paralelas.

Proposición I.41

Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

Proclo,⁽⁸⁾ hace un interesante análisis de la proposición I.35 y siguientes. En principio, se refiere a la proposición como el primer *teorema de lugar geométrico* de los *Elementos*. Proclo explica:

Llamo “teoremas de lugar geométrico” aquellos en los cuales la misma propiedad se cumple en toda la extensión de un lugar geométrico, y llamo “lugar geométrico” a la posición de una línea o una superficie que define una propiedad única.

...

Porque todo el espacio entre las rectas paralelas es el lugar geométrico de los paralelogramos contruidos sobre la misma base, de los cuales el autor de los *Elementos* demuestra que son iguales unos con otros.⁽⁹⁾

Posteriormente, Proclo califica este teorema como “paradójico” pues si se usa como patrón el rectángulo que tiene la base común de la hipótesis, resultan ser iguales a él algunos paralelogramos que tienen los lados no paralelos a la base de mucha mayor longitud.

En todo caso, en el libro VI –también lo menciona Proclo– la primera proposición dice:

Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases

proposición que abarca por sí sola el contenido de I.35 a I.38, aunque precise para su demostración de I.38 y I.41 así como de la teoría de la proporción desarrollada en el libro V.

Las dos proposiciones a continuación (I.42 y I.43) son un importante apoyo para Euclides en buena cantidad de resultados relacionadas con el tema. La primera es un problema:

Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado

el cual es resuelto con una ilustración como la de la figura 4, en la que se

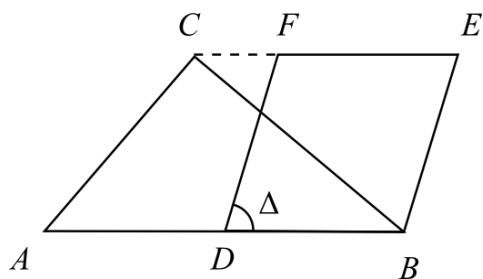


Figura 4: Proposición I.42 de Euclides

muestra que el paralelogramo buscado se construye con la mitad DB de la base AB , trazando el lado DF en el ángulo Δ dado; el punto F está, por supuesto, en la paralela a AB por C .

Por su parte I.43 se refiere a los *complementos*, que son los paralelogramos en gris claro que vemos en la figura 5; éstos aparecen a ambos lados de la diagonal cuando desde un punto cualquiera de ella se trazan paralelas a los lados del

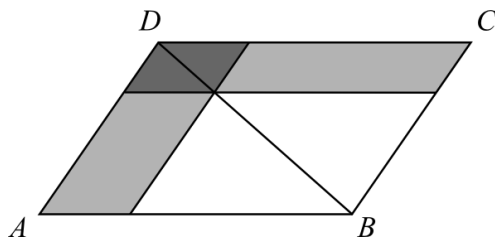


Figura 5: Proposición I.43 de Euclides

paralelogramo. La proposición dice:

En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.

La demostración procede observando que la diagonal define dos triángulos iguales (congruentes) en cada uno de los paralelogramos que cruza, lo que hace tres pares de triángulos congruentes; los complementos son las piezas que quedan de los triángulos mayores al retirar los triángulos menores.

De nuevo, ambas demostraciones tienen un carácter irreductiblemente geométrico que no precisa de números, como no sea para llevar recuento de las figuras involucradas.

3. El libro II y las identidades y ecuaciones de segundo grado

El segundo libro de los *Elementos* de Euclides está dedicado en su totalidad a problemas de área. Es el más corto de los trece: consta de solo catorce proposiciones asociadas con triángulos y rectángulos, precedidas de dos definiciones, la segunda de las cuales tiene relación con la figura 5 que acabamos de ver. El término definido es extraño para nosotros y, de hecho, lo conocemos por su nombre griego: *gnomon* (γνώμων); identifica a la zona completamente gris de la figura 5, esto es los complementos y uno cualquiera de los paralelogramos internos alrededor de la diagonal. Esta forma geométrica es fundamental para muchas de las demostraciones euclidianas relacionadas con áreas de paralelogramos.

Las proposiciones del libro II han recibido por algunos la denominación de *álgebra geométrica*. La razón de este nombre proviene de que las proposiciones pueden ser interpretadas en términos de identidades o ecuaciones de segundo grado. La construcción de un rectángulo con dos lados indeterminados se puede asociar modernamente al producto ab de los números a y b que son la longitud de los lados; un producto de esta naturaleza es un término de segundo grado.

Por ejemplo, la proposición II.1 dice:

Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos.

La figura 6 ilustra la proposición: las dos rectas son AE y AF , la primera de las cuales se divide en los segmentos AB , BC , CD , DE (número de segmentos que puede incrementarse) los cuales se usan como lado de rectángulos parciales con rectas iguales a AF . Como es obvio, el rectángulo total se forma de la

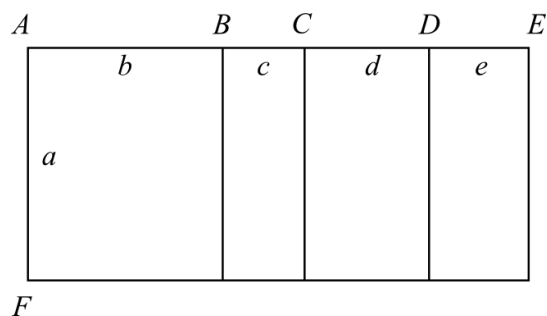


Figura 6: Proposición II.1 de Euclides

unión de los rectángulos parciales. Si usamos las letras minúsculas del dibujo como representación moderna de las longitudes de los segmentos indicados, la proposición en cuestión equivale a la propiedad distributiva:

$$a(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae.$$

La proposición II.4 afirma:

Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

Un poco de atención le mostrará al lector que la proposición se puede interpretar por la identidad algebraica:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

pero Euclides la demuestra a partir de la figura 7 en la que construye un cuadrado $ABCD$, a partir de la recta AB como lado. Esta recta se divide en un punto E de ella, de manera arbitraria. Euclides traza la diagonal BD y la paralela a AD por E , las cuales se cortan en un punto J , sobre el cual se traza la paralela GH a AB . Por consideraciones angulares sobre paralelas cortadas por secantes, Euclides demuestra que las figuras en gris son cuadrados y las figuras en blanco dos rectángulos congruentes, lo que significa que el cuadrado mayor está hecho de los dos cuadrados menores y los dos rectángulos congruentes. Las longitudes las hemos indicado en el dibujo por las letras a y b pero, por supuesto, éstas no aparecen en el diagrama original.

La proposición siguiente (II.5) es una de las tantas donde se usa el gnomon en la demostración; reza así:

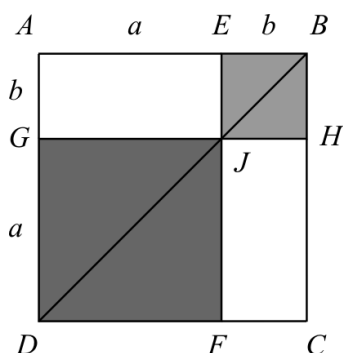


Figura 7: Proposición II.4 de Euclides

Si se corta una línea recta en segmentos iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

Al estudiante de matemática de hoy se le dificulta la lectura de estos textos escritos en lenguaje arcaico, en un estilo de mucha verbalización que se aleja de la profusión actual de símbolos específicos, para la encriptación del discurso matemático en muy poco espacio gráfico. Sin embargo, es la interpretación de este lenguaje lo que hace interesante la investigación histórica, pues es así que puede medirse en su verdadera dimensión la proeza de estos grandes pensadores.

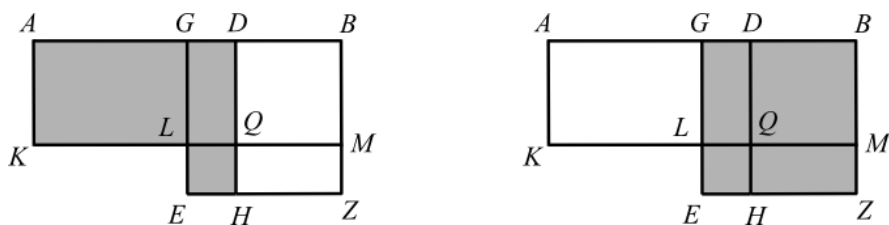


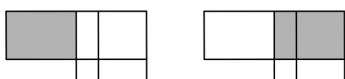
Figura 8: Proposición II.5 de Euclides

La figura 8 ilustra el enunciado por la vía de hacer dos réplicas del dibujo mostrado en el texto euclidiano. En ambos se tiene la recta AB en la que se marcan dos puntos internos: G , el punto medio de ella y D , un punto cualquiera distinto de G . Se construye: (1) el rectángulo de lados AD , AK con AK igual

a DB ; (2) el cuadrado $GBZE$, cuyo lado es la mitad de la recta AB ; (3) el cuadrado $LQHE$, de lado LQ igual a GD (la recta que está entre los puntos de sección) y (4) la recta DQ paralela a AK . La proposición afirma la igualdad de las dos zonas grises de ambas réplicas.

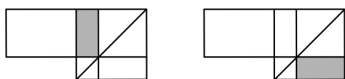
Enfrentados a la demostración, vale de nuevo el comentario acerca de la dificultad del lenguaje, pero la esencia de la prueba la podemos ilustrar de una manera bastante elemental en apenas cuatro pasos. Para ello usaremos nuevas réplicas a pares en una escala bastante más pequeña.

Primer paso



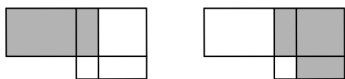
Los rectángulos sombreados son iguales, pues uno de sus lados es la mitad de la recta y el otro una recta igual al “segmento desigual”.

Segundo paso



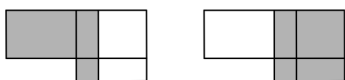
Los rectángulos sombreados son iguales, pues son los complementos respecto a la diagonal del cuadrado de la mitad de la recta, tal como lo establece la proposición I.43 (ver página 186 de este artículo).

Tercer paso



A la figura del lado izquierdo del primer paso se le añade el complemento vertical, mientras que a la de la derecha se le añade el complemento horizontal. El resultado es la igualdad del rectángulo de la izquierda con el gnomon de la derecha.

Cuarto paso



Solo queda añadir a ambas figuras el cuadrado pequeño para obtener el resultado que ofrecía la figura 8.

Insistimos: es solo un juego de comparación de figuras geométricas; la interpretación algebraica es a posteriori. En este caso, para la figura 8 serían válidas las siguientes igualdades:

$$AD = a, \quad DB = b, \quad AG = GB = \frac{a+b}{2}, \quad GD = \frac{a-b}{2},$$

admitiendo las dos primeras de manera arbitraria y las dos últimas como consecuencia de ellas. Entonces, la traducción algebraica del teorema es

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

fórmula que se usó para conseguir ternas pitagóricas, esto es soluciones enteras de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

El libro continúa por este estilo y hasta la proposición II.10 todas las proposiciones (referentes bien sea a rectángulos, bien sea a triángulos, bien sea a ambos) admiten una interpretación en forma de identidad algebraica de segundo grado. La proposición II.11 cambia algo la tendencia pues en vez de una identidad, su interpretación se hace mediante una ecuación (también de segundo grado, por supuesto); corresponde al tipo de proposiciones euclidianas que la posteridad conoció como *problemas*. Dice así:

Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.

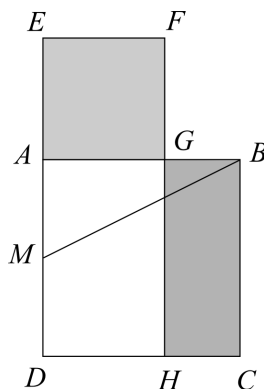


Figura 9: Proposición II.11 de Euclides

En la figura 9 tenemos el planteamiento gráfico del problema: la recta AB ha de cortarse por un punto G de ella de manera que el cuadrado y el rectángulo sombreados sean iguales. En el dibujo, $ABCD$ es el cuadrado de lado AB . La determinación del punto G , en el puro estilo geométrico de los *Elementos*, es una delicia que el lector no debería perder en el texto euclidiano; pero podemos acercarnos a su interpretación algebraica haciendo notar que la clave está en el trazo de la recta BM , donde M es el punto medio del lado AD del cuadrado

$ABCD$. Evidentemente BM es mayor que AM ; lo que no es tan evidente es que su diferencia hace el lado del cuadrado buscado. El lector disfrutará realizando la demostración.⁽¹⁰⁾

De las tres proposiciones que faltan, II.12 y II.13 constituyen lo que hoy llamamos el *teorema del coseno*. Al lector cuya curiosidad pueda ser despertada por el hecho de que se trata de un teorema trigonométrico en una época en la que todavía no había nacido la trigonometría, le daré satisfacción con el enunciado de II.12:

En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un lado de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

La proposición II.14, última del libro, define el problema del área en su parte más esencial:

Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

El problema del área fue el *problema de la cuadratura*, vale decir, dada una figura plana conseguir un cuadrado igual a la figura dada, donde la igualdad tiene el sentido explicado en la página 183; II.14 garantiza la solución para cualquier figura poligonal con un número finito de lados.⁽¹¹⁾ Esta proposición se relaciona de manera directa con VI.13, problema en el que se exige la búsqueda de una

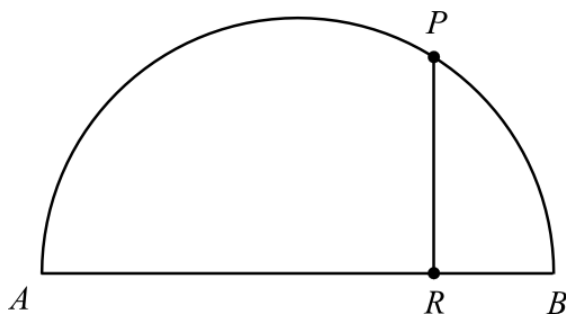


Figura 10: Proposición II.14 de Euclides (relacionada con VI.13)

media proporcional entre dos magnitudes dadas. Ambas proposiciones caracterizan a la circunferencia de diámetro AB (figura 10) como el lugar geométrico de los puntos P tales que la recta PR —con R en la recta AB — es perpendicular a AB y el cuadrado de PR es igual al rectángulo formado con AR y RB .⁽¹²⁾

Las demostraciones, sin embargo, difieren considerablemente. VI.13 se apoya en la teoría eudoxiana de las razones y proporciones estudiada en el libro V; carente de este recurso para II.14, Euclides hace uso del teorema de Pitágoras (I.47) y de la proposición I.45, que es una generalización de I.44. Esta última nos interesa de manera muy especial pues constituye el primer *teorema de aplicación de áreas*, tema de la próxima sección de este artículo.

4. Problemas de aplicación de áreas

La proposición I.44 se plantea como un problema:

Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.

Para entender el sentido del verbo en este problema, vale la pena leer nuevamente a Proclo:

Se dan tres datos en este problema: una línea recta, a lo largo de la cual se aplicará el área, de modo que la recta como un todo sea un lado del área; un triángulo al cual debe ser igual el área aplicada y un ángulo al cual debe ser igual el ángulo del área. De nuevo, es evidente que cuando el ángulo es recto, el área aplicada es un cuadrado o un rectángulo y cuando es agudo u obtuso, el área será un rombo o un romboide.

...

Como ya se ha dicho, aplicación y construcción no son la misma cosa. La construcción le da el ser a la figura completa, tanto a su área como a todos sus lados, mientras que la aplicación se genera a partir de un lado dado y construye el área sobre él, ni cubriendo menos de la longitud de la línea ni excediéndola, si no más bien usándola como uno de los lados del área encerrada.⁽¹³⁾

La figura 11 muestra el diagrama euclidiano y los datos indicados por Proclo: el triángulo T , cuya área se reproducirá en un paralelogramo; el ángulo Δ , que dará la inclinación de dos lados del susodicho paralelogramo y la recta AB que será uno de los lados del paralelogramo. Los pasos son los siguientes:

- Usando la proposición I.42 (ver Pág. 186 de este artículo), Euclides construye el paralelogramo $BCDE$, en la prolongación por B de la recta AB , de manera que este paralelogramo sea igual al triángulo T y sus lados (los que concurren en el vértice B) estén en un ángulo igual a Δ .
- Por A se traza la paralela a BE y por E se traza la paralela a AB . Ambas se cortan en F .

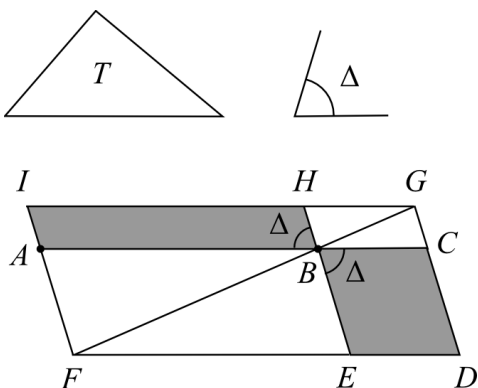


Figura 11: Proposición I.44 de Euclides

- Se traza la recta FB y se prolonga hasta que corte en G a la prolongación del lado DC por C .
- Por G se traza la paralela a AB que corta a la prolongación de EB por B en H y a la prolongación de FA por A en I .

Los rectángulos $ABHI$ y $BCDE$ (en gris en la figura) son iguales por ser complementos del paralelogramo $FDGI$ respecto a la diagonal FG (proposición I.43, Pág. 186 de este artículo). Los ángulos señalados son iguales por ser opuestos por el vértice, por lo cual el paralelogramo $ABHI$ es la respuesta al problema planteado.

De nuevo el lector puede admirar la enorme habilidad geométrica de estos matemáticos, la misma que hizo a Proclo caer en la exageración hagiográfica al compararlos a dioses por estas hazañas. No hay números reales en la demostración, pero puede llegarse a un símil algebraico. Si suponemos que Δ es un ángulo recto entonces –tal como lo hace notar Proclo– el paralelogramo es un rectángulo; si, además, la longitud de AB es a y el área del triángulo T es ab , entonces el procedimiento permite hallar el segmento de longitud b , de manera que puede asociarse a la división.⁽¹⁴⁾

Ahora bien, deliberadamente hemos dejado de lado hasta este momento parte del comentario de Proclo a la proposición I.44; de hecho, ha sido ignorado el inicio del comentario y vamos a recogerlo:

Eudemo y su escuela nos informan que estas cosas –es decir, la aplicación ($\pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta$), su exceso ($\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\eta$) y su defecto ($\acute{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$)– eran antiguos descubrimientos de la musa pitagórica. Tomando como base estos procedimientos los geómetras posteriores asumieron esos términos y los aplicaron

a las denominadas secciones cónicas, una de las cuales se llamó “parábola”, la otra “hipérbola” y la tercera “elipse”, aunque esos hombres de aquellos tiempos –semejantes a dioses– vieron el significado de estos términos en la descripción de áreas planas sobre una recta finita. Puesto que, dada una recta, si hacemos que el área se extienda a lo largo de la longitud total de la recta, ellos decían que se “aplicaba” el área; cuando se hacía la longitud [de la base] del área mayor que la propia recta, se decía que se “excedía”; y cuando se hacía [tal longitud] menor, de manera que una parte de la recta se extendía más allá del área descrita, entonces se decía que era “deficiente”. También Euclides en su sexto libro habla en este sentido de “excesivo” y “deficiente”, pero aquí [es decir, en I.44] él necesita “aplicación”...⁽¹⁵⁾

Entendemos entonces, a partir de la cita anterior, que una recta puede usarse también como soporte de un paralelogramo de área prefijada en dos sentidos alternativos: (1) excediendo la base del paralelogramo la longitud total de la recta o (2) siendo la base del paralelogramo menor que la recta. Según la tradición histórica, los tres problemas en consideración fueron resueltos por los pitagóricos y algunos historiadores consideran esta teoría el aporte más grande de la escuela. Tal como acabamos de leer, Euclides considera los problemas “deficientes” (elleipsis) y los “excesivos” (hiperbolé) en el libro VI, específicamente en las proposiciones VI.27 a VI.29. Históricamente, estas proposiciones han sido objeto de alguna polémica pues ciertos traductores los relegaron por innecesarios. Otros, en cambio, han demostrado que la teoría es ampliamente usada, no solo por el propio Euclides en el libro X, sino también por Apolonio en sus definiciones de las secciones cónicas.⁽¹⁶⁾

La asimilación algebraica de estos problemas los asocia a la teoría de las ecuaciones de segundo grado con raíces positivas. Para entenderlos del todo es bueno familiarizarnos un poco con la nomenclatura euclidiana. Por un lado: ¿qué significan frases como “paralelogramos deficientes” y “paralelogramos excesivos” respecto a una recta dada? Para la respuesta nos ayuda la figura 12. Consideremos una recta AB y un punto C de ella que puede estar bien entre los extremos A y B (como se muestra a la izquierda de la figura) o bien en la

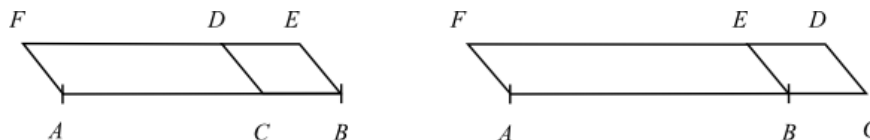


Figura 12: Paralelogramos deficientes y excesivos respecto a la recta AB

prolongación de la recta por B (como se muestra a la derecha). Se construye (con algún criterio prefijado) el paralelogramo $BCDE$ y su lado ED o DE se

prolonga hasta F que es el punto donde se consigue con la paralela a CD por A . En estos casos, el paralelogramo $ACDF$ (a la izquierda) es *deficiente* respecto a la recta AB y su *defecto* es el paralelogramo $CBED$; por otra parte, el paralelogramo $ACDF$ (a la derecha) es *excesivo* respecto a la recta AB y $BCDE$ es su *exceso*.

Por otra parte, Euclides habla de “paralelogramos semejantes y situados de manera semejante”. La primera parte de la frase (“paralelogramos semejantes”) no ofrece ninguna dificultad pues se trata de la idea habitual de semejanza. Ahora bien, “situados de manera semejante” no tiene aclaratoria ni definición

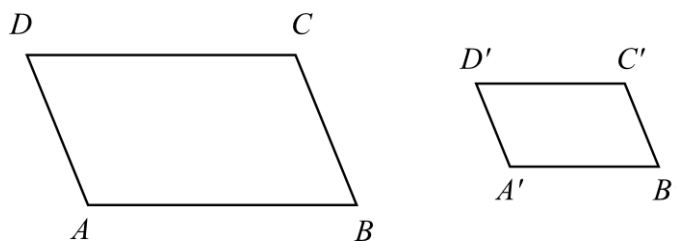


Figura 13: Paralelogramos semejantes y situados de manera semejante

en ninguna parte del texto, pero no cabe duda por el contexto que se trata de que los lados semejantes están en rectas paralelas, como los paralelogramos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ de la figura 13, para los que se tiene paralelismo de AB con $A'B'$, BC con $B'C'$, etc.

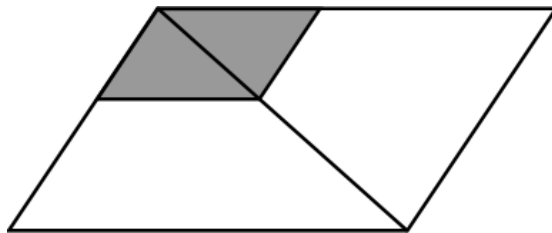


Figura 14: Proposiciones VI.24 y VI.26

Hay dos importantes proposiciones asociadas a paralelogramos semejantes y situados de manera semejante, las cuales se ilustran con la figura 14. Se trata de las proposiciones VI.24 y VI.26, la primera de las cuales afirma que los paralelogramos situados en torno a la diagonal (como la zona gris de la figura) son semejantes (y, por supuesto, situados de manera semejante) al paralelogramo

original; la segunda proposición resulta una suerte de recíproca de la anterior, pues afirma que si un paralelogramo comparte (como la zona gris de la figura) un ángulo con el paralelogramo original y es semejante y situado de manera semejante al original, entonces también comparte con él la diagonal. (Vale decir, su diagonal es parte de la diagonal del paralelogramo mayor.)

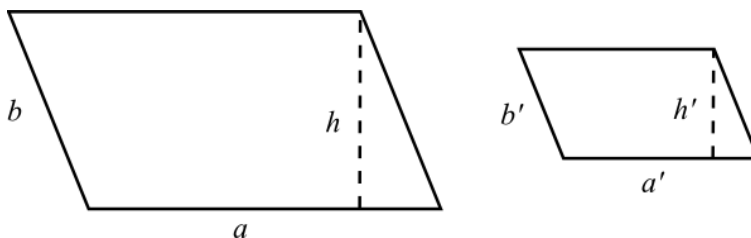


Figura 15: Razonando sobre rectángulos no se pierde generalidad

Otro punto importante a este respecto lo ilustra la figura 15, en la que vemos dos paralelogramos semejantes cuyos lados correspondientes miden a , a' y b , b' , respectivamente. Es claro que las razones entre los lados son constantes, esto es

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'},$$

pero es fácil ver que cualquier par de lados correspondientes en esta proporción puede ser cambiado por las alturas respectivas, por ejemplo

$$\frac{h}{a} = \frac{h'}{a'},$$

lo que nos permite razonar sobre rectángulos sin perder generalidad. Es bueno aclarar que el razonamiento de Euclides se realiza sobre paralelogramos en general, pero las interpretaciones algebraicas se benefician del análisis del caso particular, pues nos eximen de alguna trigonometría involucrada.

Retomemos el sentido de los problemas planteados, tal como lo recoge Proclo; nos ayudamos con la figura 16 en la cual se muestran los datos básicos: un polígono P (con un número finito de lados pues difícilmente Euclides lo concebiría de otra manera), un paralelogramo S y una recta AB ; el problema planteado es construir sobre parte de AB (problema “deficiente”) o sobre ella prolongada (problema “excesivo”) un paralelogramo igual a P , cuyo defecto o exceso sea semejante y situado de manera semejante a S . En principio, se trataría de dos proposiciones: una correspondiente al problema “deficiente” y otra al “excesivo”; pero el primero no siempre es posible de resolver, por lo cual se hace necesario una proposición adicional.

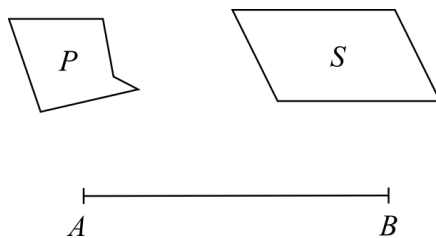


Figura 16: Datos de un problema de aplicación de áreas

La proposición VI.27 constituye lo que en la terminología de los *Elementos* se llama un diorismós (διορισμός); esto es, establece una limitación para los casos de aplicación deficiente;⁽¹⁷⁾ establece que la mitad de la recta fija un límite superior para las áreas de ciertos paralelogramos. De hecho, su enunciado es:

De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramos semejantes y situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el paralelogramo mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto.

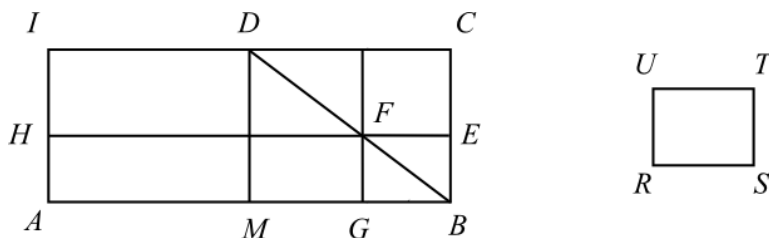


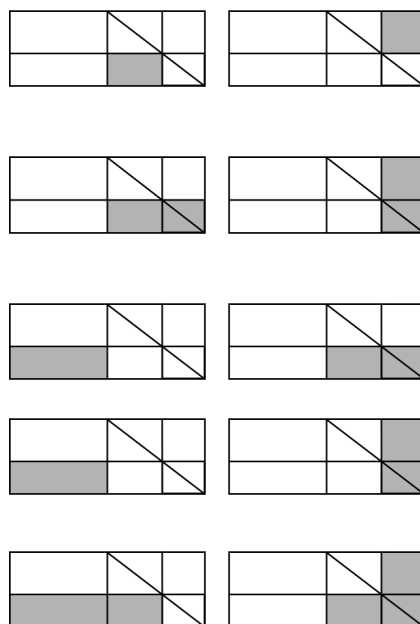
Figura 17: Proposición VI.27

La figura 17 ilustra la proposición en el caso de que los paralelogramos involucrados sean rectángulos. Se tiene la recta AB cuyo punto medio es M y sobre MB se traza un rectángulo $MBCD$ con algún criterio prefijado (por ejemplo, semejante y situado de manera semejante a algún otro rectángulo dado como $RSTU$). Destacamos dos rectángulos particulares:

AMDI: Rectángulo deficiente respecto a la recta AB , cuyo defecto es el propio rectángulo $MBCD$. Ambos rectángulos son semejantes y situados de manera semejante; de hecho, son congruentes.

AGFH: (Aceptando que F está en la diagonal BD de $DMBC$.) Rectángulo deficiente respecto a la recta AB cuyo defecto es $GBEF$, el cual –por la proposición VI.24– es semejante y situado de manera semejante a $MBCD$.

Pues bien, la proposición VI.27 afirma que de los dos rectángulos anteriores el primero siempre es mayor. Analizaremos la demostración euclidiana con la ya usada estrategia de hacer réplicas a pares del diagrama del texto:



Las figuras en gris son iguales por ser complementos respecto a la diagonal del paralelogramo de la mitad derecha de la recta.

Añadiendo a ambas el paralelogramo situado en la parte inferior derecha de la diagonal, se obtiene igualdad de los dos paralelogramos indicados en gris.

Por otra parte, los dos paralelogramos destacados son iguales, puesto que ambos tienen como base la mitad de la recta.

Los dos últimos pasos traen como consecuencia la igualdad de los paralelogramos aquí señalados,

a quienes se le añade la zona común indicada y resulta entonces la igualdad del paralelogramo en consideración con el gnomon construido en el rectángulo de la derecha.

Pero el gnomon es parte del paralelogramo construido sobre la mitad de la recta y por tanto menor que él, lo que demuestra la proposición.

Retornando a lo ya comentado, VI.27 caracteriza a los paralelogramos construidos sobre la mitad de la recta como los mayores entre todos los deficientes cuyo defecto es semejante y situado de manera semejante a un paralelogramo prefijado. Ahora bien, en VI.28 se plantea el problema de construir un paralelogramo deficiente, cuyo defecto sea semejante y situado de manera semejante a otro paralelogramo dado. No nos extraña entonces que la redacción de la proposición sea la siguiente:

Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelograma semejante a una dada; pero es necesario que la figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto.

El lector observará el diorismós despues del punto y coma. Sin embargo, para la construcción de paralelogramos excesivos no hay rectricción alguna, razón por la cual la proposición VI.29 tiene la siguiente redacción:

Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda en una figura paralelograma semejante a una dada.⁽¹⁸⁾

Para la interpretación algebraica hemos de introducir los números ausentes del planteamiento euclidiano. Para ello volvamos a la figura 17 y supongamos que los lados consecutivos del paralelogramo modelo ($RSTU$) están en una razón r , esto es:

$$\frac{SR}{RU} = r,$$

y llamemos x a la altura del rectángulo incógnita $AGFH$, es decir $x = FG$. El área de este rectángulo debe ser P , en referencia al polígono modelo de la figura 16. Ahora bien, de acuerdo a las condiciones del problema, el rectángulo $GBEF$ cumple con

$$\frac{GB}{GF} = r \quad \text{o} \quad GB = rx.$$

Entonces, el área del paralelogramo $GBEF$ es $rx \cdot x = rx^2$ y la de $ABEH$ es ax , por lo cual la ecuación del problema es

$$P = ax - rx^2. \quad (1)$$

La ecuación (1) representa el álgebra de los problemas “deficientes”, tal como se plantea en la figura 17. Para los problemas excesivos es evidente que la ecuación es

$$P = ax + rx^2. \quad (2)$$

De ambas ecuaciones se buscan soluciones reales y positivas, únicas asimilables a este contexto geométrico. La existencia de tales raíces en la teoría de las ecuaciones de segundo grado está condicionada por un discriminante no negativo; en el caso de la ecuación (1) esto significa

$$a^2 - 4rP \geq 0,$$

de donde

$$P \leq \frac{a^2}{4r},$$

pero $a^2/4r$ es el área del rectángulo construido sobre la mitad de la recta, lo cual coincide con lo expresado en la proposición VI.27.

Por otro lado, el discriminante de (2) es

$$a^2 + 4rP$$

que es positivo independientemente del valor de P , en coincidencia con la no necesidad de diorismós para VI.29.

Las soluciones de Euclides a los problemas planteados en VI.28 y VI.29 –conseguidas en el más puro estilo geométrico– coinciden con las soluciones algebraicas

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4rp}}{2r} \quad \text{y} \quad x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4rp}}{2r}$$

para las ecuaciones (1) y (2) respectivamente. El lector disfrutaría leyéndolas de manera directa.

5. El círculo

Lo visto hasta ahora es un resumen apretado del tema en lo que respecta a figuras planas de frontera poligonal; queda por analizar las figuras de frontera curva y en los *Elementos* este estudio se reduce al área del círculo.⁽¹⁹⁾ La demostración de Euclides de la proposición XII.2, que enunciamos en la página 181, parece provenir de Hipócrates de Quíos, aunque otros historiadores la adjudican a Eudoxo. Esta es la muy comentada –aunque en realidad poco conocida– aproximación al círculo por polígonos inscritos y circunscritos.⁽²⁰⁾

Para entender su sentido y posibles motivaciones, es bueno aclarar que una proposición similar es válida para los polígonos regulares, lo que Euclides recoge como su proposición XII.1:

Los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros.

Esta proposición no es difícil de demostrar usando como premisa que los triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados correspondientes, lo demás es aplicar convenientemente la triangulación de los polígonos; ésta, por supuesto, es la estrategia euclidiana.

Por el pensamiento griego pasó alguna vez la idea de que el círculo era un polígono regular con un número infinito de lados.⁽²¹⁾ La idea –de múltiples sugerencias poéticas y científicas por igual– fue pronto rechazada por el *horror infiniti* de los griegos pero, sin duda, dejó su marca sobre la intuición, y la proposición que se mostró válida para los polígonos regulares, pensada sobre círculos tenía pocas posibilidades de discurrir por un logos distinto. Solo faltaba un principio teórico lo suficientemente fuerte para soportar el siempre temido paso hacia el infinito, sin tener que encarar a éste. El paso lo dio Eudoxo.

Se trata del principio establecido en la definición V.4⁽²²⁾ que luego encontraría una forma inversa en X.1 y que, en definitiva, es el objeto de nuestro interés. Dice así:

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.⁽²³⁾



Figura 18: Polígonos inscritos

La diferencia de área entre el círculo y los polígonos inscritos (o circunscritos) sigue los lineamientos planteados en el principio anterior. Para entender lo que queremos decir podemos apelar a la figura 18, en la que vemos a la izquierda un sector circular determinado por un arco de circunferencia y el lado de cierto polígono regular; a la derecha en el mismo arco se determinan dos sectores circulares con dos de los lados del polígono regular cuyo número de lados es doble del anterior. No debe ser difícil al lector probar que la región de la derecha ocupa menos de la mitad del área de la región de la izquierda.

En estos casos, apearse a la letra del discurso original de los *Elementos* trae como consecuencia necesidad de mayor uso de espacio pero, posiblemente, menor comprensión, por lo cual en la descripción que sigue jugaremos un poco a mezclar terminología moderna con ideas antiguas. El contenido del párrafo anterior puede expresarse en la forma

$$C - P_{2n} < \frac{1}{2}(C - P_n),$$

en donde C representa el círculo y P_n , P_{2n} los polígonos regulares inscritos en C de n lados y $2n$ lados, respectivamente. Ahora bien, aplicando la propiedad arquimediana en la forma de X.1 podemos concluir que dado un círculo C y cualquier número positivo siempre es posible conseguir un polígono regular P inscrito en C , de manera que $C - P$ sea menor que el número positivo dado; esto será clave en la demostración de XII.2.⁽²⁴⁾

Como ya dijimos, la proposición XII.2 se traduce aritméticamente en una forma similar a

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

y para demostrarla Euclides (o Hipócrates o Eudoxo) usó reducción al absurdo; de hecho, doble reducción al absurdo. Veamos cómo.

Si la proporción indicada es falsa entonces uno de los términos debe ser cambiado por otro que la haga correcta. Cambiemos C_2 y supongamos que el valor correcto es $B \neq C_2$, esto es

$$\frac{C_1}{B} = \frac{d_1^2}{d_2^2}. \quad (1)$$

Entonces, para B tenemos dos posibilidades: (1) $B < C_2$ o (2) $B > C_2$. Analicemos cada una.

$B < C_2$

En este caso, $C_2 - B$ es positivo. Sea Q un polígono regular inscrito en C_2 tal que

$$C_2 - Q < C_2 - B,$$

esto garantiza que $Q > B$.

Sea ahora P el polígono regular de tantos lados como Q inscrito en C_1 . Por la proposición XII.1 se tiene

$$\frac{P}{Q} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

lo que comparado con la ecuación (1) nos conduce a

$$\frac{C_1}{B} = \frac{P}{Q}.$$

Ahora bien, como P está inscrito en C_1 se tiene que $P < C_1$, por lo que $Q < B$, contradictorio con lo ya establecido.

$B > C_2$

Invirtiendo la proporción (1) resulta

$$\frac{B}{C_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2}.$$

A continuación identificamos la cuarta proporcional D entre B , C_1 y C_2 , es decir

$$\frac{B}{C_1} = \frac{C_2}{D}.$$

Dado que hemos admitido que $B > C_2$ esta última proporción garantiza que $C_1 > D$, pero por comparación resulta

$$\frac{C_2}{D} = \frac{d_2^2}{d_1^2},$$

pero esta es la misma premisa del caso anterior que ya se mostró contradictorio.

La doble contradicción garantiza la justeza de la proporción propuesta por XII.2.⁽²⁵⁾

6. Conclusión

En resumen, podemos decir que el estudio de la medida de las magnitudes en la matemática griega clásica se realizó por analogía o comparación de figuras geométricas. La analogía o proporción –tal como fue recogida en el libro V de los *Elementos* de Euclides– alcanzó niveles de desarrollo teórico tan importantes que pudo ser asimilada al concepto de fracción, con toda la carga operacional que este último provee, por lo cual los resultados de los géometras clásicos pueden ser expresados con facilidad en nuestras modernas notaciones.

En el caso del área la figura patrón por excelencia fue el cuadrado, de ahí la denominación de *cuadratura* para referirse al problema de hallar el área de una figura plana. En lo que antecede vimos que no fueron triviales ni los problemas abordados por estos matemáticos –aún desde épocas tan tempranas como el pitagorismo original– ni las consecuencias que de ellos se derivaron, entre las cuales destacan teorías tan importantes como la de las secciones cónicas desarrolladas por géometras de la talla de Apolonio de Perga.

Notas

⁽¹⁾Los *Elementos* deben ser el libro más traducido de la historia, después de la Biblia. Las traducciones modernas usan el patrón griego recopilado por Heiberg, que el lector puede encontrar en [euc07], acompañado de su traducción inglesa a columna derecha. Una versión clásica en inglés es la de Heath [Euc56], muy importante por sus comentarios. En español, disponemos –entre otras– de la versión de Puertas Castaños [Euc91], de la cual provienen todas las citas de los *Elementos* presentes en este artículo.

⁽²⁾William Oughtred (1574–1660) usó por primera vez la notación $a.b :: c.d$, que fue modificada por el astrónomo Vincent Wing (1619–1668) a su forma definitiva $a : b :: c : d$. Ver [Caj93], Vol. I, Pág. 275.

⁽³⁾Ver [Euc91], Vol. 2, Págs. 9–54 o [Euc56], Vol. 2, Págs. 112–186 o [euc07], Págs. 129–154.

⁽⁴⁾El lector interesado podría revisar el artículo [Jim06].

⁽⁵⁾Esta misma analogía fue usada en otro de mis artículos: [Jim08], el cual está pendiente de publicación.

⁽⁶⁾El lector puede consultar el texto de Euclides o realizar él mismo la demostración.

⁽⁷⁾Lo cual incluye al teorema de Pitágoras (Proposición I.47), que muestra cómo construir un cuadrado igual a la suma de otros dos.

⁽⁸⁾Proclo (411–485 d. C.) fue un filósofo y comentarista matemático. Su *Comentario al primer libro de los Elementos de Euclides* [Pro70] es fuente primordial para la comprensión de la matemática griega.

⁽⁹⁾[Pro70], Págs. 310–311. Traducción al español de D. J.

⁽¹⁰⁾Si a es la longitud del segmento y x la longitud del cuadrado buscado, es claro que la ecuación del problema es $x^2 = a(a - x)$. La división conseguida con este procedimiento separa al segmento según la famosa *proporción áurea*; es decir, el segmento total (AB) es al segmento mayor de la división (AG) como este último es al segmento menor (GB); en símbolos, $AB : AG :: AG : GB$. Esta proporción está en relación directa con la teoría del pentágono regular, la cual es de importancia fundamental en el cuerpo de los *Elementos* y ocupa buena parte del mismo. El pentágono regular es la forma de las caras del dodecágono, el quinto poliedro regular, mismo que, según la tradición platónica, fue el plano con el que Dios hizo el trazo del Universo. Los *Elementos* cierran con los poliedros regulares (también llamados sólidos platónicos) y la propia proposición de cierre es la demostración de que solo puede haber cinco de estos sólidos. Ciertos historiadores afirman –de manera algo exagerada– que todo el plan de Euclides con esta obra se resumía en llegar a los resultados de este último libro.

⁽¹¹⁾Evidentemente, la cuadratura del círculo, intento de comparación de las figuras curvilínea y rectilínea más elementales deviene como parte de este proceso.

⁽¹²⁾La interpretación algebraica procede haciendo $x = PR$, $a = AR$, $b = RB$; se trata de demostrar que $x^2 = ab$. La demostración puede realizarse bien por triángulos semejantes o bien por el teorema de Pitágoras; ambas demostraciones exigen considerar el triángulo rectángulo APB . Pero hay algo que hace particularmente interesante a esta descripción del círculo: los puntos de la circunferencia se describen en términos de dos rectas de referencia: la recta AB donde se hacen los cortes R (*abscissa* es la palabra latina para *corte*), y una recta perpendicular a ella que sirve de dirección para las paralelas cuyo extremo es un punto de la circunferencia (*ordinatae* es el término latino para *rectas paralelas*). Es decir, la descripción introduce un sistema coordenado. Este procedimiento fue el usado por Apolonio para describir las secciones cónicas. (Ver [AoP00].)

⁽¹³⁾[Pro70], Págs. 333–334. Traducción al español de D. J.

⁽¹⁴⁾No obstante, los procedimientos basados en la semejanza (esto es, en razones y proporciones) ofrecen una construcción más sencilla. Puede comprobarse esto con la proposición VI.12, ([Euc91], Vol. 2, Pág. 74), la cual se propone construir una cuarta proporcional entre tres cantidades dadas. Con ella puede resolverse geoméricamente tanto el producto como la división, si una de las tres rectas es igual a la unidad de medida. Descartes así lo mostró en las primeras páginas de *La Geometría* ([Des54], Págs. 4–5. Asimismo, a VI.13 –que ya la hemos comentado– la usó como interpretación geométrica de la extracción de raíces cuadradas.

⁽¹⁵⁾[Pro70], Pág. 332. Traducción al español de D. J. Los términos en griego aparecen así en la traducción al inglés de Morrow; su conversión latina sería: $\pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta$, parabolé; $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\eta$, hiperbolé; $\xi\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$, elleipsis, lo que le da sentido a todos los comentarios posteriores. Los comentarios entre corchetes son acotaciones que me parecen necesarias para entender la traducción.

Los nombres de las secciones cónicas fueron impuestos por Apolonio y la razón de ellos tiene que ver con los problemas de aplicación, exceso o defecto de áreas, pero lamentablemente no podemos dedicar espacio a la bella teoría apoloniana. (Ver [AoP00].)

⁽¹⁶⁾El comentario puede leerse con mayor profundidad en [Euc56], Vol. 2, Págs. 258–259. Las definiciones de las secciones cónicas pueden leerse en las proposiciones 11, 12 y 13 del propio primer libro de Apolonio ([AoP00], Págs. 19–26).

⁽¹⁷⁾No es éste el primer ejemplo de uso de $\delta\iota\omicron\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ en los *Elementos*. En realidad, la primera vez es en la proposición I.22 que se plantea el problema de construir un triángulo teniendo sus tres lados; esto exige una condición previa: que cada lado sea menor que la suma de los otros dos. Pues bien, esta condición (la desigualdad triangular) es precisamente la proposición I.20.

⁽¹⁸⁾Se invita al lector a revisar ambas demostraciones en el texto de Euclides. Asimismo, es un buen ejercicio intentar calcar el espíritu de ellas mediante diagramas a pares como los mostrados en este artículo.

⁽¹⁹⁾Con técnicas similares a las que aquí se comentarán, Arquímedes emprendió con éxito el cálculo del área de un segmento parabólico –esto es, la superficie cuya frontera está determinada por una parábola y una de sus cuerdas– así como el área encerrada por sectores de la espiral. Hipócrates de Quíos calculó el área de las lúnulas asociadas a ciertos polígonos, pero esto es un subproducto de su propia determinación del área de un círculo.

⁽²⁰⁾Un tratamiento completo, riguroso y moderno –aunque apegado totalmente al espíritu de Euclides– se encontrará en [Jim08].

⁽²¹⁾Ver [Zel91], Cap. II.

⁽²²⁾La definición V.4 define el concepto de razón de una forma similar a la propiedad arquimediiana; dice así: “Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a la otra”. Trasladado a terminología moderna, esto quiere decir que dados dos números reales a y b , existe un entero positivo n tal $na > b$. La denominación de *propiedad arquimediiana* es injusta con Eudoxo, quien fue el descubridor pero, en realidad, ningún otro matemático de la antigüedad, le dio uso a esta proposición en la cantidad y calidad que lo hiciera Arquímedes.

⁽²³⁾En lenguaje moderno sería de la siguiente manera: Sean $a > b$ dos números reales positivos y definamos una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, tal que $a_0 = a$ y $a_n < \frac{1}{2}a_{n-1}$, para todo $n \geq 1$; entonces existe k tal que $a_k < b$.

⁽²⁴⁾Euclides demuestra la proposición XII.2 comenzando por el cuadrado, de manera que usa polígonos regulares inscritos cuyo número de lados es una potencia de 2.

⁽²⁵⁾Expresada en términos estrictamente numéricos, la proposición XII.2 es equivalente a la conocida fórmula $A = \pi r^2$. Poco menos de un siglo después de Euclides, también Arquímedes se ocupó del círculo consiguiéndolo igual a un triángulo rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia y su altura el radio del círculo; esto permite deducir la popular fórmula $L = 2\pi r$, para la longitud de la circunferencia. Los detalles en [Jim08].

Referencias

- [AoP00] Apollonius of Perga. *Conics. Books I–III*. Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico, 2000. (Traducción de R. Catesby Taliaferro.).
- [Caj93] Florian Cajori. *A history of mathematical notations*. Dover Publications, Inc. New York, 1993. (Dos volúmenes encuadrados en un solo libro).
- [Des54] René Descartes. *The Geometry*. Dover Publications Inc. New York, 1954. (Edición facsimilar en francés. Traducción del francés y del latín por David E. Smith y Marcia Lathan).

-
- [Euc56] Euclid. *The thirteen books of the Elements. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath.* Dover Publications, Inc. New York, segunda edición, 1956. (Tres volúmenes).
- [Euc91] Euclides. *Elementos.* Traduccin y notas de María Luisa Puertas Castaños. Edit. Gredos, Madrid, 1991. (Tres volúmenes).
- [euc07] *Euclid's Elements of Geometry.* Richard Fitzpatrick, 2007. (Edición bilingüe griego-inglés con el texto canónico griego de J. L. Heiberg).
- [Jim06] Douglas Jiménez. ¿Qué era un irracional para un matemático griego? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, XIII(1):87–103, 2006.
- [Jim08] Douglas Jiménez. π desde sus bases. Sin publicar, Septiembre 2008.
- [Pro70] Proclus. *A commentary on the first book of Euclid Elements. Translated with Introduction and notes, by Glenn R. Morrow.* Princeton University Press. New Jersey, 1970.
- [Zel91] Paolo Zellini. *Breve historia del infinito.* Ediciones Siruela S. A., Madrid, 1991.

Douglas Jiménez
UNEXPO “Antonio José de Sucre”
Vicerrectorado de Barquisimeto
e-mail: dougjim@cantv.net; dougjim@gmail.com