

Fibrations à la Ganea

Hans Scheerer

Daniel Tanré

Résumé

Les fibrations de Ganea permettent la définition de la catégorie de Lusternik et Schnirelmann d'un espace. Dans ce travail, nous assouplissons leur procédé de construction, obtenant ainsi une justification topologique à l'existence des modèles algébriques rationnels introduits par Félix-Halperin et Lemaire. Pour ce faire, nous sommes amenés à préciser l'application induite en homologie par l'holonomie et à détailler la construction fibre-cofibre.

La LS-catégorie d'un espace X , $cat X$, a été définie par Lusternik et Schnirelmann, [15], pour minorer le nombre de points critiques d'une variété compacte, sans bord. Elle s'est révélée être un invariant homotopique difficile à déterminer, sujet principal de nombreux travaux ; des articles de synthèse regroupent les définitions, propriétés de base et résultats récents le concernant : [10], [11], [13].

Ganea a montré, [6], que la définition de cet invariant équivaut à l'existence de sections aux fibrations obtenues comme produit fibré homotopique de l'injection du bouquet garni, $T^n(X)$, dans le produit X^{n+1} , le long de l'application diagonale, $\Delta : X \rightarrow X^{n+1}$, [8]. A partir de cette caractérisation, Félix et Halperin, ont construit des modèles algébriques de fibrations, distinctes des fibrations originelles de Ganea. Elles permettent cependant la définition de la LS-catégorie du rationalisé d'un espace car elles ne diffèrent des espaces de Ganea que par un bouquet avec un bouquet de sphères.

Ici, nous considérons une classe d'applications permettant la définition de la LS-catégorie : les n -LS *applications* (Les n -LS applications qui sont aussi des fibrations sont appelées n -LS *fibrations*). Cette classe contient les fibrations de Ganea mais ses éléments bénéficient d'un principe de construction plus souple. Les divers modèles algébriques de l'homotopie rationnelle, [3], [12], apparaissent ainsi comme des conséquences

Received by the editors July 1996.

Communicated by Y. Félix.

1991 *Mathematics Subject Classification* : 55P50, 55P62.

Key words and phrases : Catégorie de Lusternik-Schnirelmann. Espaces de Ganea. Holonomie.

d'une situation existant au niveau des espaces topologiques : ce sont tous des n -LS applications.

Par définition (2.1) une n -LS fibration, $\tilde{p}_n : \tilde{E}_n(X) \rightarrow X$, a une section $\text{ssi } \text{cat } X \leq n$. Notons \tilde{F}_n la fibre de \tilde{p}_n et remarquons que le connectant $\Omega X \rightarrow \tilde{F}_n$ de \tilde{p}_n est homotopiquement trivial. Un problème fondamental dans cette situation est la construction d'une $(n + 1)$ -LS fibration à partir de \tilde{p}_n ; nous montrons en particulier :

Théorème : *Si \tilde{p}_n est une n -LS fibration, le cône construit sur $\mu : A \rightarrow \tilde{E}_n(X)$ est l'espace total d'une $(n + 1)$ -LS application dès que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- l'application μ factorise par la fibre, \tilde{F}_n , de \tilde{p}_n ;
- l'application $(\Omega X \times A) / \Omega X \rightarrow \tilde{F}_n$, induite par l'application d'holonomie de \tilde{p}_n , est un épimorphisme homotopique.

Notons $\mathbf{m}(f) : \Omega X \times F \rightarrow F$ l'application d'holonomie associée à une fibration $F \rightarrow E \xrightarrow{f} X$. Le théorème ci-dessus montre l'importance de l'application d'holonomie dans la construction de n -LS fibrations. Nous établissons (Théorème 2) toujours au niveau des espaces topologiques, les propriétés de $H_*(\mathbf{m}(f))$ nécessaires aux calculs explicites.

Ce travail est divisé en 7 sections. La première contient les rappels des diverses définitions équivalentes de la LS-catégorie et l'axiome du cube. Le deuxième paragraphe introduit les objets principaux, les n -LS fibrations ; le Théorème 1 détaille le passage d'une n -LS fibration à une $(n+1)$ ^{ème}. Dans le troisième paragraphe, nous introduisons l'application d'holonomie et en établissons une propriété (Théorème 2) fondamentale pour la détection des épimorphismes homotopiques. La quatrième section montre (Théorème 3) l'importance de l'holonomie dans la détermination des fibres homotopiques obtenues dans une opération fibre-cofibre, retrouvant des résultats de [7], [4]. Le corollaire 4.3 particularise la construction d'une $(n + 1)$ -LS fibration ; notons que l'utilisation de l'axiome du cube simplifie considérablement les preuves. Après un bref rappel de l'homotopie rationnelle (§ 5) nous décrivons, au paragraphe 6, une famille générique de n -LS fibrations, à partir de leurs modèles en algèbres de Lie. Dans le paragraphe 7, nous en exhibons 3 constructions différentes, retrouvant ainsi les résultats de [3] et [12].

Dans la suite, les “espaces” considérés sont des espaces connexes, pointés, ayant le type d'homotopie pointée d'un CW-complexe.

1 Fibrations de Ganea

Commençons par rappeler la définition de LS-catégorie sous une forme similaire à celle utilisée par Lusternik et Schnirelmann dans [15] :

Définition 1.1 : La LS-catégorie, $\text{cat } X$, d'un espace X est le plus petit entier k , $k \geq 0$, pour lequel X peut être recouvert par $(k + 1)$ ouverts, contractiles dans X .

Rappelons que le *fat wedge*, (ou *bouquet garni*), $T^k(X)$, d'un espace X est le sous-espace du produit X^{k+1} constitué des points ayant au moins une composante

au point de base. Il est assez facile de montrer que l'invariant $cat X$ peut également se définir à l'aide du fat wedge :

Proposition 1.2 : [2] [23] *La LS-catégorie, $cat X$, d'un espace X est le plus petit entier $k, k \geq 0$, pour lequel la diagonale $\Delta : X \rightarrow X^{k+1}$ se factorise, à homotopie près, par l'injection canonique, $j : T^k(X) \rightarrow X^{k+1}$, du fat wedge dans le produit; i.e. il existe $\sigma : X \rightarrow T^k(X)$ tel que $j \circ \sigma \simeq \Delta$.*

Considérons la fibration universelle des chemins sur $X, \Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$; les espaces de Ganea, $E_i(X)$, sont obtenus par des opérations cofibre et fibre successives :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega X & & F_1 & & F_2 & & F_n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 PX & \rightarrow & E_1(X) & \rightarrow & E_2(X) & \cdots & E_n(X) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & = & X & = & X & = & X
 \end{array}$$

A partir de la fibration $F_n \rightarrow E_n(X) \xrightarrow{p_n} X$, on construit $E'_{n+1}(X)$ comme la cofibre de $F_n \rightarrow E_n(X)$, $E'_{n+1}(X) = E_n(X) \cup_{F_n} C(F_n)$. L'application $p'_{n+1} : E'_{n+1}(X) \rightarrow X$ est définie par $p'_{n+1}(x) = p_n(x)$, si $x \in E_n(X)$, et $p'_{n+1}(x) = *$, si $x \in C(F_n)$. La fibration $p_{n+1} : E_{n+1}(X) \rightarrow X$ est une fibration associée à p'_{n+1} ; elle s'obtient en factorisant p'_{n+1} en une équivalence d'homotopie suivie de p_{n+1} .

Notons que $E_1(X)$ a le type d'homotopie de $\Sigma\Omega X$.

Proposition 1.3 : [6] *La LS-catégorie, $cat X$, d'un espace X est le plus petit entier $k, k \geq 0$, pour lequel la fibration $p_k : E_k(X) \rightarrow X$ admet une section, i.e. il existe $\sigma_k : X \rightarrow E_k(X)$, tel que $p_k \circ \sigma_k = id_X$.*

Remarque : Gilbert a montré, [8], que l'équivalence des deux définitions provient du fait que la fibration de Ganea, $F_k \rightarrow E_k(X) \rightarrow X$ est l'image réciproque par l'application diagonale, $\Delta : X \rightarrow X^{k+1}$, d'une fibration associée à l'injection canonique $j : T^k(X) \rightarrow X^{k+1}$.

Terminons en rappelant l'énoncé du Lemme du cube [16]. Considérons un carré d'applications, $\mathcal{D} = (A, B, C, D)$, commutatif à homotopie près :

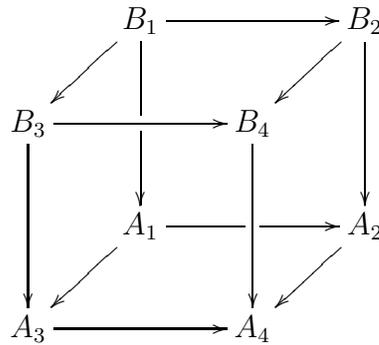
$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

– Notons E le produit fibré construit sur des fibrations $B' \twoheadrightarrow D$ et $C' \twoheadrightarrow D$, associées respectivement à $B \rightarrow D$ et $C \rightarrow D$. Le carré \mathcal{D} est un *produit fibré homotopique*, (pfh), s'il existe une équivalence d'homotopie $A \rightarrow E$, rendant le diagramme commutatif à homotopie près.

– Notons E' la somme amalgamée construite sur des cofibrations $A \twoheadrightarrow B'$ et $A \twoheadrightarrow C'$, associées respectivement à $A \rightarrow B$ et $A \rightarrow C$. Le carré \mathcal{D} est une *somme amalgamée homotopique*, (sah), s'il existe une équivalence d'homotopie $E' \rightarrow D$, rendant le diagramme commutatif à homotopie près.

Par définition, les sommes amalgamées homotopiques et produits fibrés homotopiques sont définis à équivalence d'homotopie près.

Lemme du cube : (Mather [16]) *Considérons un cube, commutatif à homotopie près, dont la face inférieure est une sah, et les quatre faces latérales des pfh,*



alors, la face supérieure est une sah.

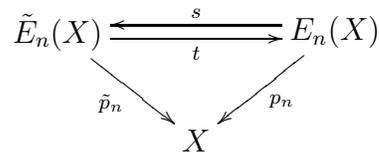
2 LS-fibrations

Soit X un espace, notons

$$F_n \rightarrow E_n(X) \xrightarrow{p_n} X$$

la fibration construite par Ganea et rappelée dans le paragraphe précédent.

Définition 2.1 : Une flèche $\tilde{p}_n : \tilde{E}_n(X) \rightarrow X$ est une n -LS application s'il existe un diagramme commutatif à homotopie près :



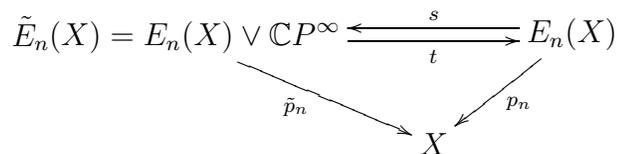
i.e. $p_n \circ t \simeq \tilde{p}_n$ et $\tilde{p}_n \circ s \simeq p_n$. La flèche \tilde{p}_n est une n -LS fibration si elle est à la fois une n -LS application et une fibration. (Dans ce cas, le diagramme ci-dessus peut être choisi commutatif).

Remarquons immédiatement que :

- $cat X \leq n$ ssi il existe une n -LS fibration admettant une section ;
- si \tilde{p}_n est une n -LS fibration, alors $\Omega\tilde{p}_n : \Omega\tilde{E}_n(X) \rightarrow \Omega X$ admet une section.

En effet, on sait, [6], que Ωp_n admet une section σ , le composé $(\Omega s) \circ \sigma$ est alors une section de $\Omega\tilde{p}_n$; en particulier, le connectant, $\Omega X \rightarrow F_n$, d'une n -LS fibration est homotopiquement trivial.

- en général, les espaces $\tilde{E}_n(X)$ et $E_n(X)$ n'ont pas même LS-catégorie, comme le montre l'exemple



dans lequel $s : E_n(X) \rightarrow \tilde{E}_n(X)$ est l'injection et $t : \tilde{E}_n(X) \rightarrow E_n(X)$ est obtenue en contractant $\mathbb{C}P^\infty$ sur le point de base.

Un problème intéressant est de trouver des n -LS fibrations différentes des fibrations de Ganea.

Proposition 2.2 : *Toute fibration $\tilde{p}_1 : \tilde{E}_1(X) \rightarrow X$, d'espace total un espace de catégorie 1, telle que $\Omega\tilde{p}_1$ possède une section homotopique, est une 1-LS fibration.*

C'est une conséquence immédiate du résultat suivant appliqué à \tilde{p}_1 et à la fibration de Ganea $E_1(X) \rightarrow X$.

Lemme 2.3 : *Considérons deux fibrations $p_1 : E_1 \rightarrow X$ et $p_2 : E_2 \rightarrow X$ telles que $\text{cat } E_1 \leq 1$ et $\Omega(p_2)$ admette une section homotopique, alors il existe $\alpha : E_1 \rightarrow E_2$ tel que $p_2 \circ \alpha \simeq p_1$.*

Démonstration : Il suffit de construire α comme le composé :

$$E_1 \xrightarrow{\alpha_1} \Sigma\Omega E_1 \xrightarrow{\Sigma\Omega p_1} \Sigma\Omega X \xrightarrow{\Sigma\nu_2} \Sigma\Omega E_2 \xrightarrow{\alpha_2} E_2,$$

où :

- α_1 provient de l'hypothèse $\text{cat } E_1 \leq 1$;
- ν_2 est une section homotopique de Ωp_2 ;
- α_2 est la counité de l'adjonction (Ω, Σ) . ■

Exemples :

– 1) Considérons un modèle minimal de Sullivan, [20], $\varphi : (\wedge V, d) \rightarrow A_{PL}(X)$, d'un espace nilpotent, de type fini, X ; la réalisation de la surjection canonique $(\wedge V, d) \rightarrow (V, 0) \cong (\wedge V, d)/(\wedge^{\geq 2} V)$ est une 1-LS fibration.

– 2) Considérons un modèle de Quillen, [18], $\psi : (L, \delta) \rightarrow \lambda(X)$ d'un espace X 1-réduit et notons \mathbb{L} le foncteur algèbre de Lie libre. La réalisation de la flèche universelle $\mathbb{L}(L, \delta) \rightarrow (L, \delta)$ est une 1-LS fibration.

Intéressons-nous maintenant au pas de récurrence.

Théorème 1 : *Considérons une n -LS fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} X$, une application $j : A \rightarrow F$ et la cofibre, $E' = E \cup_A C(A)$, du composé $A \rightarrow F \rightarrow E$. La flèche $f : E \rightarrow X$ est étendue en $f' : E' \rightarrow X$, en envoyant le cône, $C(A)$, sur le point de base de X .*

Si l'application composée, $F \rightarrow E \rightarrow E'$, est homotopiquement triviale, alors f' est une $(n + 1)$ -LS application.

La preuve est reportée à la fin du paragraphe.

Dans la section 4 (Corollaire 4.3) nous précisons comment choisir $j : A \rightarrow F$ pour que soit vérifiée l'hypothèse de trivialité homotopique sur l'application $F \rightarrow E'$. L'énoncé ci-dessus suffit cependant pour donner une preuve directe du théorème de Lemaire [12] quant à la définition de LS-catégorie d'un espace rationnel en termes de modèles en algèbres de Lie différentielles. Nous reviendrons sur ces modèles et cette preuve dans les paragraphes 6 et 7.

Nous pouvons également avoir une vision globale de la construction de Ganea en considérant les espaces $E_n(X)$ comme des sous-espaces de leur limite inductive. Ce point de vue s'adapte au contexte des n -LS fibrations en :

Définition 2.4 : Une famille (q_n, j_n) est appelée *suite cohérente* si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $q_n : \mu(X)_n \rightarrow X$ est une application à valeurs dans X ;
- $j_n : A_n \rightarrow \mathcal{F}(q_n)$ est une application à valeurs dans la fibre homotopique de q_n ;
- $\mu(X)_{n+1}$ est la somme amalgamée homotopique :

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\iota_n \circ j_n} & \mu(X)_n \\ \downarrow & & \downarrow q_n \\ C(A_n) & \longrightarrow & \mu(X)_{n+1} \end{array}$$

où ι_n est l’inclusion de $\mathcal{F}(q_n)$ dans $\mu(X)_n$;

- $q_{n+1} : \mu(X)_{n+1} \rightarrow X$ est construite, à partir de q_n , en envoyant le cône, $C(A_n)$, sur le point de base de X .

Remarquons que les fibrations de Ganea forment une suite cohérente qui démarre avec la flèche universelle $\Sigma\Omega X \rightarrow X$ et dans laquelle j_n est l’identité sur la fibre homotopique.

Définition 2.5 : Une suite cohérente, (q_n, j_n) , est appelée *suite d’applications à la Ganea* si, pour tout n , l’application q_n est une n -LS application.

Le théorème 1 et la proposition 2.2 impliquent immédiatement :

Proposition 2.6 : Soit X un espace fixé, une suite cohérente (q_n, j_n) vérifiant les hypothèses :

- (1) $\mu(X)_1$ est un espace de catégorie 1 et $\Omega(q_1)$ a une section homotopique ;
- (2) l’application $\mathcal{F}(q_n) \rightarrow \mu(X)_{n+1}$ est homotopiquement triviale,

est une suite d’applications à la Ganea.

La preuve du théorème 1 utilise un résultat de D. Puppe sur les cofibrations, rappelé ci-dessous, (cf [9, Theorem 15.4] pour une démonstration) :

Considérons une cofibration $L \xrightarrow{j} M \xrightarrow{\rho} N$ et un espace quelconque P . Dans la suite, nous confondons application et classe d’homotopie associée ; l’application universelle associée à l’identité sur P est notée $\nabla : P \vee P \rightarrow P$, (i.e. ∇ est la “folding map”).

La coopération associée à la cofibration, $\sigma : N \rightarrow (\Sigma L) \vee N$, engendre une opération du groupe des classes d’homotopie $[\Sigma L, P]$ sur l’ensemble $[N, P]$:

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma L, P] \times [N, P] & \longrightarrow & [N, P] \\ (\xi, \mu) & \mapsto & \mu^\xi \end{array}$$

où μ^ξ est l’application composée $N \xrightarrow{\sigma} (\Sigma L) \vee N \xrightarrow{\xi \vee \mu} P \vee P \xrightarrow{\nabla} P$.

Considérons maintenant la suite exacte associée à la cofibration $L \xrightarrow{j} M \xrightarrow{\rho} N$:

$$[\Sigma L, P] \longrightarrow [N, P] \xrightarrow{\rho^*} [M, P]$$

où $\rho^*(\mu) = \mu \circ \rho$. Puppe a caractérisé le “noyau” de ρ^* à l’aide de la coopération précédente :

Théorème : (Puppe ; Hilton [9]) Si μ et μ' sont deux éléments de $[N, P]$ tels que $\rho^*(\mu) = \rho^*(\mu')$, alors il existe $\xi \in [\Sigma L, P]$ tel que $\mu' = \mu^\xi$.

Démonstration du théorème 1 : Construisons la cofibration $F \rightarrow E \rightarrow \bar{E}$, $\bar{E} := E \cup_F C(F)$ et la flèche $\bar{f} : \bar{E} \rightarrow X$ étendant f , en envoyant le cône, $C(F)$, sur le point de base. Considérons le diagramme suivant, dont les flèches sont explicitées au cours de la démonstration :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{j} & F & \begin{array}{c} \xleftarrow{t'} \\ \xrightarrow{s'} \end{array} & F_n \\
 \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow i_n \\
 E & \xlongequal{\quad} & E & \begin{array}{c} \xleftarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \end{array} & E_n(X) \\
 \downarrow \rho' & & \downarrow \bar{\rho} & & \downarrow \rho_n \\
 E' & \begin{array}{c} \xleftarrow{R} \\ \xrightarrow{\bar{j}} \end{array} & \bar{E} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\bar{t}} \\ \xrightarrow{\bar{s}} \end{array} & E'_{n+1}(X) = E_n(X) \cup_{F_n} C(F_n) \simeq E_{n+1}(X) \\
 \downarrow f' & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow p_{n+1} \\
 X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X
 \end{array}$$

La colonne de droite correspond aux espaces de Ganea ; en particulier, on a $p_{n+1} \circ \rho_n = p_n$. L'existence, par hypothèse, de s et t tels que $p_n \circ s = f$, $f \circ t = p_n$, implique :

- l'existence de s' et t' vérifiant

$$i_n \circ s' = s \circ i; t \circ i_n = i \circ t',$$

- l'existence de \bar{s} et \bar{t} vérifiant

$$\bar{s} \circ \bar{\rho} = \rho_n \circ s; \bar{t} \circ \rho_n = \bar{\rho} \circ t.$$

Les applications \bar{s} et \bar{t} peuvent être construites de telle façon que $\bar{s}(C(F)) \subset C(F_n)$ et $\bar{t}(C(F_n)) \subset C(F)$, d'où :

$$\bar{f} \circ \bar{t} = p_{n+1}; p_{n+1} \circ \bar{s} = \bar{f},$$

par définition de \bar{f} et p_{n+1} .

Nous avons ainsi établi le théorème lorsque $A = F$. Intéressons-nous maintenant aux deux colonnes de gauche. L'application \bar{j} , induite par j , peut être choisie pour vérifier $\bar{f} \circ \bar{j} = f'$.

L'hypothèse $\rho' \circ i \simeq *$ implique l'existence de R' tel que $R' \circ \bar{\rho} = \rho'$. Considérons la suite exacte associée à la cofibration $F \rightarrow E \rightarrow \bar{E}$:

$$[\Sigma F, X] \longrightarrow [\bar{E}, X] \xrightarrow{\bar{\rho}^*} [E, X].$$

Des égalités

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}^*(f' \circ R') &= f' \circ R' \circ \bar{\rho} = f' \circ \rho' \\
 \bar{\rho}^*(\bar{f}) &= \bar{f} \circ \bar{\rho} = \bar{f} \circ \bar{j} \circ \rho' = f' \circ \rho'
 \end{aligned}$$

et du théorème de Puppe, on déduit l'existence de $\xi \in [\Sigma F, X]$ tel que

$$\bar{f} = (f' \circ R')^\xi .$$

Par hypothèse, $f : E \rightarrow X$ est une n -LS fibration, donc Ωf admet une section ν qui rend surjective l'application $f_* : [\Sigma F, E] \rightarrow [\Sigma F, X]$. L'égalité $f'_* \circ \rho'_* = f_*$ implique la surjectivité de $f'_* : [\Sigma F, E'] \rightarrow [\Sigma F, X]$. On peut donc choisir $\xi' \in [\Sigma F, E']$ tel que $\xi = f'_*(\xi')$. Par naturalité de l'opération introduite auparavant, on a :

$$\bar{f} = (f' \circ R')^{f'_*(\xi')} = f'_*(R'^{\xi'}) = f' \circ R'^{\xi'}.$$

Il reste à poser $R = R'^{\xi'}$ pour terminer la preuve. ■

3 Holonomie

Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} X$ une fibration, l'application d'holonomie associée à f , $\mathbf{m}(f) : \Omega X \times F \rightarrow F$, est obtenue à partir de la propriété de relèvement des chemins dans une fibration, [9, Chapter 11]. Soit $PX \rightarrow X$ la fibration des chemins d'origine fixée au point de base, la fibre F s'obtient comme produit fibré homotopique de f et $PX \rightarrow X$. L'application d'holonomie $\mathbf{m}(f)$ peut également être définie comme la flèche universelle induite dans le diagramme suivant constitué de produits fibrés homotopiques :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega X \times F & \xrightarrow{\mathbf{m}(f)} & F & \longrightarrow & PX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Rappelons enfin que la restriction de l'application d'holonomie au point de base de F est l'application $\partial : \Omega X \rightarrow F$ de la suite de Barrat-Puppe.

Nous allons déterminer l'application induite en homologie, $H_*(\mathbf{m}(f))$, dans un cas particulier, suffisant pour la suite de ce travail.

Si X est un espace pointé, nous considérons $\pi_n(X)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, *)$. Le choix d'un générateur de $H_n(I^n, \dot{I}^n)$ permet ainsi de définir l'homomorphisme de Hurewicz $h_X : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$. Nous noterons $[,]$ le crochet de Whitehead de deux éléments de $\pi_*(X)$.

Précisons le choix de l'orientation de $H_n(I^n, \dot{I}^n)$, fixée dans la suite :

— $H_1(I, \dot{I})$ a pour générateur l'unique élément dont le bord soit $\langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle$ dans $H_0(\dot{I})$;

— (I^n, \dot{I}^n) est muni de l'orientation produit, $(I, \dot{I})^n$, de sorte que l'orientation produit sur $(I^n, \dot{I}^n) \times (I^m, \dot{I}^m)$ coïncide avec celle de (I^{n+m}, \dot{I}^{n+m}) ;

— enfin, \dot{I}^n est muni de l'orientation induite par l'isomorphisme $H_n(I^n, \dot{I}^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\dot{I}^n)$.

Théorème 2 : *Considérons une fibration de Hurewicz $F \rightarrow E \xrightarrow{f} B$, entre espaces pointés, simplement connexes, dont le connectant $\partial : \Omega B \rightarrow F$ est trivial. Soit $\alpha \in \pi_n(\Omega B)$, on choisit $e \in \pi_n(\Omega E)$ tel que $\pi_*(\Omega f)(e) = \alpha$. Notons $\tilde{e} \in \pi_{n+1}(E)$ l'adjointe de e et soit $\beta \in \pi_m(F)$, alors :*

$$h_F([\tilde{e}, \beta]) = H_*(\mathbf{m}(f))(h_{\Omega B}(\alpha) \otimes h_F(\beta)).$$

Pour $n = 1$, la formule reste vraie si $H_{n+1}(F, F_{[n]}) \xleftarrow{\cong} H_{n+1}(F)$, où $F_{[n]}$ désigne la n -squelette d'une CW-approximation de F .

Le produit de Whitehead $[\tilde{e}, \beta]$ appartient bien à $\pi_{n+m}(F)$ car la suite exacte longue d'homotopie de la fibration est scindée et $\pi_*(f)([\tilde{e}, \beta]) = 0$.

Démonstration :

• Remarquons d'abord que $h_F([\tilde{e}, \beta])$ ne dépend pas du choix de e : si e' est tel que $\pi_*(\Omega f)(e') = \alpha$, alors $\tilde{e} = e' + \xi$, où $\xi \in \pi_*(F)$ et $h_F([\tilde{e}', \beta]) = h_F([\tilde{e}, \beta]) + h_F([\xi, \beta]) = h_F([\tilde{e}, \beta])$.

• Dans cette preuve, nous ne distinguerons pas les applications de leurs classes d'homotopie. Ainsi, si $\alpha : (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (\Omega B, *)$ et $\beta : (I^m, \dot{I}^m) \rightarrow (F, *)$, on a

$$\alpha \times \beta : (I^{n+m}, \dot{I}^{n+m}) \rightarrow (\Omega B \times F, (\Omega B)_{[n]} \vee F_{[m]}) ,$$

d'où $h_{\Omega B}(\alpha) \otimes h_F(\beta) = h_{\Omega B \times F}(\alpha \times \beta) \in H_{n+m}(\Omega B \times F, (\Omega B)_{[n]} \vee F_{[m]})$. Remarquons $\mathbf{m}(f) \circ (\alpha \times \beta) : (I^{n+m}, \dot{I}^{n+m}) \rightarrow (F, F_{[\max(n,m)]})$; sous les hypothèses choisies, on peut donc écrire, avec un abus de notation :

$$H_*(\mathbf{m}(f))(h_{\Omega B}(\alpha) \otimes h_F(\beta)) = h_F(\mathbf{m}(f) \circ (\alpha \times \beta)) .$$

• Effectuons maintenant l'étude de $\mathbf{m}(f) \circ (\alpha \times \beta)$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} 0 \times \Omega B \times F & \xrightarrow{\psi_1} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times I^n \times I^m & \xrightarrow{I \times \alpha \times \beta} & I \times \Omega B \times F \xrightarrow{\psi_2} B \end{array}$$

où $\psi_1(0, w, x) = x$, $\psi_2(t, w, x) = w(t)$. Avec la propriété de relèvement des familles continues de chemins, on obtient une application $\psi : I \times I^n \times I^m \rightarrow E$. Détaillons la restriction de ψ sur les diverses faces du "cube" $I \times I^n \times I^m$:

$\psi(0, x, y) = \beta(y)$; $\psi(t, x', y) = \beta(y)$, si $x' \in \dot{I}^n$; $\psi(1, -, -) = \mathbf{m}(f) \circ (\alpha \times \beta)$.

Remarquons que $\psi(1, x, y') = \partial\alpha(x)$, si $y' \in \dot{I}^m$. Ici, nous savons que $\partial\alpha$ est homotope à zéro; nous allons utiliser cette particularité pour modifier le relèvement ψ . Soit $\lambda : I \times I^n \times \dot{I}^m \rightarrow F$ une homotopie entre $\partial\alpha$ et $*$, nous étendons λ

- à $I \times \overbrace{I^n \times I^m}^{\dot{}}$ en posant $\lambda(t, x, y) = \beta(y)$ pour $x \in \dot{I}^n$,
- à $\{0\} \times I^n \times I^m$ en posant $\lambda(0, x, y) = \psi(1, x, y)$.

Ensuite, nous étendons λ en une application $\hat{\lambda} : I \times I^n \times I^m \rightarrow F$. La superposition de ce nouveau cube, $\hat{\lambda} : I \times I^n \times I^m \rightarrow F$, et du cube déjà construit, $\psi : I \times I^n \times I^m \rightarrow E$, nous donne une modification de ψ (toujours notée ψ).

Les restrictions, précédemment décrites, de ψ sont conservées; la modification effectuée nous assure de plus que la restriction de ψ à la première $(n+1)$ -face $I \times I^n$ de $I \times I^n \times \dot{I}^m$ donne une classe d'homotopie \tilde{e}' telle que $\pi_*(\Omega f)(e') = \alpha$.

Nous avons choisi la première coordonnée comme paramètre d'homotopie; par cohérence, l'adjonction doit également être effectuée avec la première coordonnée, c-à-d,

si $\alpha : (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (\Omega X, *)$, son adjointe $\tilde{\alpha} : (I^{n+1}, \dot{I}^{n+1}) \rightarrow X$, est définie par $\tilde{\alpha}(t, s) = \alpha(s)(t)$, $(t, s) \in I \times I^n$.

- Le crochet de Whitehead de \tilde{e}' et β est une application :

$$[\tilde{e}', \beta] : \overbrace{(I \times I^n) \times I^m} = (I \times I^n) \times \dot{I}^m \cup \overbrace{(I \times I^n) \times I^m} \rightarrow E,$$

définie par :

$$[\tilde{e}', \beta](t, x, y') = \tilde{e}'(x)(t), \text{ si } y' \in \dot{I}^m, [\tilde{e}', \beta](t, x, y) = \beta(y), \text{ si } t \in \dot{I} \text{ ou } x \in \dot{I}^n.$$

- Le premier cube construit pour l'application d'holonomie est un cube "plein" ; par contre, le crochet de Whitehead n'est défini que sur le bord du cube $I \times I^n \times I^m$. Appelons "boîte", le bord du cube et "boîte ouverte" la boîte dont on a retiré le couvercle, c-à-d la face ouverte correspondant à $t = 1$.

Sur la boîte ouverte, $[\tilde{e}, \beta]$ est homotope à $\mathfrak{m}(f) \circ (\alpha \times \beta)$, dans une homotopie relative à $\{1\} \times \overbrace{I^n \times I^m}$. Le couvercle de la boîte ne contribuant en rien à $h_F([\tilde{e}, \beta])$, on en déduit la formule annoncée. ■

Le cas particulier de ce résultat correspondant à l'homotopie rationnelle est cité au paragraphe 7, (Proposition 7.1).

4 Construction fibre-cofibre

Théorème 3 : *Considérons une fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} X$, une application $j : A \rightarrow F$ et E' la cofibre de $i \circ j$:*

$$A \xrightarrow{i \circ j} E \xrightarrow{\rho} E' = E \cup_A C(A).$$

L'application $f' : E' \rightarrow X$ est obtenue, à partir de f , en envoyant $C(A)$ sur le point de base de X . Ces données sont reliées par :

- (i) La fibre homotopique F' de l'application f' s'obtient comme une somme amalgamée homotopique :

$$\begin{array}{ccc} \Omega X \times A & \xrightarrow{\mathfrak{m}'} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow k \\ \Omega X & \longrightarrow & F' \end{array}$$

où $\pi(w, a) = w$ et \mathfrak{m}' est l'application composée : $\Omega X \times A \xrightarrow{\text{id} \times j} \Omega X \times F \xrightarrow{\mathfrak{m}(f)} F$.

- (ii) La cofibre homotopique de $k : F \rightarrow F'$ est $\Sigma((\Omega X \times A) / \Omega X)$.

- (iii) Si le connectant $\partial : \Omega X \rightarrow F$ de la fibration f est homotopiquement trivial, il existe une cofibration :

$$(\Omega X \times A) / \Omega X \xrightarrow{\bar{\mathfrak{m}}'} F \xrightarrow{k} F'.$$

Cette situation a déjà été étudiée dans [7], [4]. En particulier, le résultat (i) et la suite exacte longue d'homologie de la cofibration apparaissant dans (ii) sont déjà dans [4].

Corollaire 4.1 : [7], [6] *Avec les notations du théorème 3, si \hat{F} désigne la cofibre de $j : A \rightarrow F$, il existe une cofibration $\hat{F} \rightarrow F' \rightarrow \Omega X * A$, où $\Omega X * A$ est le joint de ΩX et A . En particulier, si $F = A$, alors F' a le type d'homotopie de $\Omega X * F$.*

Corollaire 4.2 : *Avec les notations du corollaire 4.1, si le connectant $\partial : \Omega X \rightarrow F$ est homotopiquement nul, il existe une cofibration $\Omega X \wedge A \rightarrow \hat{F} \rightarrow F$.*

Rappelons qu'une flèche, h , est un *épimorphisme homotopique* si, pour tout couple de flèches, (g_1, g_2) , la relation $g_1 \circ h \simeq g_2 \circ h$ implique $g_1 \simeq g_2$. En particulier, toute flèche ayant un inverse homotopique à droite est un épimorphisme homotopique. Pour terminer, si $h : A \rightarrow B$ est un épimorphisme homotopique, l'application, $B \rightarrow C$, de B dans la cofibre homotopique de h , est homotopiquement triviale. Cette notion s'avère prépondérante dans la construction de fibrations à la Ganea, comme le montrent les deux corollaires suivants :

Corollaire 4.3 : *Considérons une n -LS fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} X$, une application $j : A \rightarrow F$ et la cofibre, $E' = E \cup_A C(A)$, du composé $A \rightarrow F \rightarrow E$. La flèche $f : E \rightarrow X$ est étendue en $f' : E' \rightarrow X$, en envoyant le cône, $C(A)$, sur le point de base.*

Avec les notations du théorème 3, si l'application $(\Omega X \times A)/\Omega X \xrightarrow{\bar{m}'} F$ est un épimorphisme homotopique, alors f' est une $(n + 1)$ -LS application ; sa fibre homotopique, F' , est un espace de catégorie ≤ 1 .

Corollaire 4.4 : *Soit X un espace fixé, une suite cohérente (q_n, j_n) vérifiant les hypothèses :*

- (1) $\mu(X)_1$ est un espace de catégorie 1 et $\Omega(q_1)$ a une section homotopique ;
- (2) l'application $\bar{m}' : (\Omega X \times A_n)/\Omega X \rightarrow \mathcal{F}(q_n)$ est un épimorphisme homotopique, est une suite d'applications à la Ganea.

Complétons cette suite de résultats par une propriété également liée à la notion d'épimorphisme homotopique :

Proposition 4.5 : *Soit $E \rightarrow B$ une fibration de Hurewicz d'espaces pointés, connexes, de fibre F , telle que $\Omega E \rightarrow \Omega B$ soit un épimorphisme homotopique. Alors $\text{cat } F \leq \text{cat } E$.*

Pour terminer, intéressons-nous au connectant de la cofibration $F \rightarrow F' \rightarrow \Sigma((\Omega X \times A)/\Omega X)$. Rappelons d'abord l'existence d'une équivalence d'homotopie (D. Puppe) :

$$\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y).$$

Elle donne une section homotopique (canonique) $\mu : \Sigma((\Omega X \times A)/\Omega X) \rightarrow \Sigma(\Omega X \times A)$ à la suspension de la projection canonique $\nu : \Omega X \times A \rightarrow (\Omega X \times A)/\Omega X$; i.e. $(\Sigma\nu) \circ \mu \simeq \text{id}$.

Proposition 4.6 : *Le connectant $\Sigma((\Omega X \times A)/\Omega X) \rightarrow \Sigma F$ de la cofibration $F \rightarrow F' \rightarrow \Sigma((\Omega X \times A)/\Omega X)$ est égal à $(\Sigma\bar{m}') \circ \mu$.*

Remarque : Dans le cas d'un attachement de cellule, on retrouve un résultat de Félix-Thomas, [5]. Plus précisément, avec les notations du théorème 3, considérons une cofibration

$$A = \vee_{n_i} S^{m_i} \rightarrow E \xrightarrow{f} X$$

et la fibre homotopique F de f . Par construction, on a $E' \simeq X$ et la fibre homotopique F' de f' est contractible. Le connectant $\Sigma((\Omega X \times A)/\Omega X) \rightarrow \Sigma F$ de la cofibration

$F \rightarrow F'$ est donc une équivalence d'homotopie. On en déduit alors (Proposition 4.6) que, sur un corps k quelconque, $H_+(F; k)$ est un $H_*(\Omega X; k)$ -module libre engendré par $H_+(A; k)$.

La fin de ce paragraphe est consacrée aux preuves des résultats énoncés :

Démonstration du théorème 3 :

(i) Ce résultat, déjà démontré dans [4], peut aussi se déduire de l'Axiome du cube.

Dans le tableau suivant, E' est la somme amalgamée homotopique de la ligne du bas; les flèches verticales sont obtenues par image réciproque de la fibration des chemins $PX \rightarrow X$, de façon à obtenir un cube :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega X & \longleftarrow & \Omega X \times A & \longrightarrow & F & & F' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & A & \longrightarrow & E & & E'
 \end{array}$$

L'axiome du cube donne le résultat annoncé.

(ii) Le résultat provient du fait que le passage aux cofibres conserve les sommes amalgamées homotopiques; l'argument peut être résumé dans le diagramme suivant. La dernière colonne y est constituée des sommes amalgamées homotopiques des lignes horizontales; la ligne inférieure est construite à partir des cofibres des applications verticales entre les deux premières lignes. :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega X & \longleftarrow & \Omega X & \xrightarrow{\partial} & F & & F \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega X & \longleftarrow & \Omega X \times A & \longrightarrow & F & & F' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & ((\Omega X) \times A) / \Omega X & \longrightarrow & 0 & & F''
 \end{array}$$

On en déduit $F'' \simeq \Sigma(((\Omega X) \times A) / \Omega X) \simeq (\Sigma A) \vee (\Omega X \wedge \Sigma A)$.

(iii) La preuve est similaire à la précédente à partir du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega X & \longleftarrow & \Omega X & \longrightarrow & 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega X & \longleftarrow & \Omega X \times A & \xrightarrow{m'} & F & & F' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & ((\Omega X) \times A) / \Omega X & \xrightarrow{\bar{m}'} & F' & & F'
 \end{array}$$

(Remarquons que l'hypothèse supplémentaire sur la fibration f est nécessaire à la commutativité à homotopie près de ce diagramme.) ■

Démonstration du corollaire 4.1 : A partir du carré situé en haut à gauche dans le diagramme suivant, on construit les cofibres homotopiques pour obtenir le

résultat annoncé :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma A \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & \Sigma((\Omega X) \times A) / \Omega X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{F} & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & \Omega X \wedge \Sigma A \simeq \Omega X * A
 \end{array}$$

■

La démonstration du corollaire 4.2 est absolument semblable à celle du corollaire 4.1 à partir de la propriété (iii) du théorème 3. Les théorèmes 3 et 1 impliquent immédiatement les corollaires 4.3 et 4.4, excepté le fait que la fibre F' est un espace de LS-catégorie ≤ 1 . Cette dernière propriété découle du :

Lemme 4.7 : *Soit $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ une cofibration dans laquelle la flèche $Y \rightarrow Z$ est homotopiquement triviale, alors $\text{cat } Z \leq 1$.*

Démonstration du lemme : L'espace Z a le type d'homotopie de

$$Y \cup (X \times [0, 1] / (X \times \{1\} \cup * \times I)) .$$

L'hypothèse sur $Y \rightarrow Z$ donne un recouvrement constitué de deux ouverts contractiles dans Z , projections sur Z de :

$$(Y \cup (X \times [0, 2/3]), X \times]1/3, 1]) .$$

■

Plus généralement, on a $\text{cat } Z \leq 1 + \text{cat}(Y \rightarrow Z)$, où $\text{cat}(Y \rightarrow Z)$ désigne la LS-catégorie de l'application $Y \rightarrow Z$, [2].

Démonstration de la proposition 4.5 : Dans la suite de fibrations

$$\rightarrow \Omega E \rightarrow \Omega B \rightarrow F \xrightarrow{\alpha} E \rightarrow B ,$$

construite à partir de $E \rightarrow B$, la flèche $\Omega B \rightarrow F$ est homotopiquement triviale. Soit (U_i) un recouvrement de E , constitué d'ouverts contractiles dans E ; en utilisant la propriété de relèvement des homotopies, on constate que, pour tout i , le composé de α avec l'inclusion canonique, $\alpha^{-1}(U_i) \rightarrow F \rightarrow E$, est homotopiquement trivial. L'inclusion $\alpha^{-1}(U_i) \rightarrow F$ factorise donc à travers ΩB ; nous avons ainsi construit un recouvrement de F , $(\alpha^{-1}(U_i))$, constitué d'ouverts contractiles dans F . ■

Démonstration de la proposition 4.6 : Détaillons le début de la suite de Puppe de la cofibration associée à $\Omega X \times A \rightarrow \Omega X$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega X \times A & \longrightarrow & \Omega X & \longrightarrow & \Omega X / (\Omega X \times A) & \simeq & (\Sigma A) \vee (\Omega X \wedge \Sigma A) \\
 & & & & \xrightarrow{\partial_A} & & \Sigma(\Omega X \times A) \simeq \Sigma \Omega X \vee \Sigma A \vee (\Omega X \wedge \Sigma A) .
 \end{array}$$

Il est facile de voir que le connectant ∂_A coïncide avec la section μ . En utilisant la somme amalgamée homotopique (Théorème 3, (i)) on remarque que le connectant de la cofibration $F \rightarrow F'$ est le composé

$$\Omega X / (\Omega X \times A) \xrightarrow{\partial_A} \Sigma(\Omega X \times A) \xrightarrow{\Sigma m'} \Sigma F ,$$

d'où le résultat. ■

5 Homotopie rationnelle

Soit $1\text{-}\mathcal{CW}$ la catégorie des espaces simplement connexes, homotopiquement équivalents à un CW-complexe. Un espace $X \in 1\text{-}\mathcal{CW}$ est dit \mathbb{Q} -local si l'homologie réduite $\tilde{H}_*(X; \mathbb{Z})$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel. Pour tout $X \in 1\text{-}\mathcal{CW}$, il existe une \mathbb{Q} -localisation, $X \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$; l'application induite $\tilde{H}_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_*(X_{\mathbb{Q}}; \mathbb{Z})$ est la tensorisation par \mathbb{Q} . La localisation $S_{\mathbb{Q}}^n$ de la sphère S^n sera appelée *sphère \mathbb{Q} -locale*. Notons $1\text{-}\mathcal{CW}_{\mathbb{Q}}$ la sous-catégorie pleine de $1\text{-}\mathcal{CW}$ formée des espaces \mathbb{Q} -locaux.

La catégorie $\mathcal{L}ie$ des algèbres de Lie différentielles graduées sur \mathbb{Q} , 1-réduites (c-à-d $L_0 = 0$, pour tout $(L, \partial) \in \mathcal{L}ie$), possède une structure de catégorie à modèles fermée définie par : les *équivalences faibles* sont les morphismes induisant un isomorphisme en homologie ; les *fibrations* sont les morphismes surjectifs en degré strictement supérieurs à 1.

D'après D. Quillen [18], il existe une équivalence entre la catégorie homotopique (ordinaire) de $1\text{-}\mathcal{CW}_{\mathbb{Q}}$ et la catégorie homotopique associée à $\mathcal{L}ie$. Nous utiliserons les expressions :

- *réalisé d'une algèbre de Lie différentielle* (L, ∂) pour désigner un élément de $1\text{-}\mathcal{CW}_{\mathbb{Q}}$ dont le type d'homotopie correspond à celui de (L, ∂) via cette équivalence,
- *modèle de Quillen de X* pour l'association inverse.

Le lecteur trouvera dans [21] une présentation et des exemples de modèles en algèbres de Lie. Notons que si L est un modèle de Quillen de l'espace X , son algèbre enveloppante $\mathcal{U}L$ est un modèle de l'algèbre différentielle graduée $C_*(\Omega X; \mathbb{Q})$.

Rappelons que tout espace de $1\text{-}\mathcal{CW}_{\mathbb{Q}}$, de LS-catégorie 1, est homotopiquement équivalent à un bouquet de sphères \mathbb{Q} -locales, [1], et étudions le pas de récurrence de la construction de n -LS fibrations dans le cas particulier des espaces rationnels :

Proposition 5.1 : *Soit $\tilde{p}_n : \tilde{E}_n(X) \rightarrow X$ une n -LS fibration de fibre un bouquet de sphères \mathbb{Q} -locales, \tilde{F}_n , et soit $\tilde{F}_n = A \vee A'$ une décomposition de \tilde{F}_n telle que l'injection canonique $j : A \rightarrow \tilde{F}_n$ induise une flèche $\tilde{m}' : (\Omega X \times A) / \Omega X \rightarrow \tilde{F}_n$ surjective en homologie.*

Alors la fibration $\tilde{p}_{n+1} : \tilde{E}_{n+1}(X) \rightarrow X$ construite à partir de la cofibre de j est une $(n + 1)$ -LS fibration, de fibre un bouquet de sphères \mathbb{Q} -locales, \tilde{F}_{n+1} , dont l'homologie est isomorphe au noyau de $H_(\Sigma \tilde{m}')$.*

Démonstration : Remarquons que $(\Omega X \times A) / \Omega X \sim (\Omega X \wedge A) \vee A$ est un bouquet de sphères \mathbb{Q} -locales. La surjectivité de $H_*(\tilde{m}')$ implique alors que \tilde{m}' est un épimorphisme homotopique ; il suffit maintenant d'appliquer le corollaire 4.3. La suite exacte longue d'homologie de la cofibration

$$(\Omega X \times A) / \Omega X \xrightarrow{\tilde{m}'} \tilde{F}_n \rightarrow \tilde{F}_{n+1}$$

détermine alors l'homologie de \tilde{F}_{n+1} . ■

6 Modèles filtrés à la Ganea

Le modèle de Quillen d'un bouquet de sphères \mathbb{Q} -locales est une algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(V, \partial)$ sur un complexe de chaînes (V, ∂) , 1-réduit. Évidemment, $\mathbb{L}(V, \partial)$ est équivalent à $(\mathbb{L}(H_*(V, \partial)), 0)$.

Soit $X \in 1\text{-CW}_{\mathbb{Q}}$, choisissons un modèle de Quillen, L_X , de X dans $\mathcal{L}ie$ et un morphisme $\mathbb{L}(V, \partial) \xrightarrow{\rho_1} L_X$, surjectif en homologie. Notons \tilde{p}_1 la fibration homotopique associée au réalisé de ρ_1 . La flèche $\Omega\tilde{p}_1$ admet une section homotopique et le réalisé de $\mathbb{L}(V, \partial)$ est une suspension, donc [Proposition 2.2 et Proposition 4.5] \tilde{p}_1 est une 1-LS fibration, de fibre un bouquet de sphères \mathbb{Q} -locales.

Nous allons maintenant définir, dans la catégorie $\mathcal{L}ie$, des modèles filtrés à la Ganea dont la réalisation formera une suite de fibrations à la Ganea.

Soit $W = \bigoplus_{\substack{i \geq 0 \\ k \geq 1}} W_{i,k-i}$ un \mathbb{Q} -espace vectoriel bigradué. L'algèbre de Lie libre, $\mathbb{L}(W)$, sur W est munie de la bigraduation pour laquelle le bidegré d'un crochet $[\alpha, \beta]$ est la somme des bidegrés de α et β . Comme il est d'usage, i s'appelle le *degré filtrant*, $k-i$ le *degré complémentaire* et k le *degré total*. On désigne par $W_{<i,*}$ (resp. $W_{\leq i,*}$) la somme directe des $W_{j,*}$ pour $j < i$, (resp. $j \leq i$).

Définition 6.1 : Soit $(L, \partial) \in \mathcal{L}ie$, un *modèle filtré de (L, ∂)* est la donnée :

- (1) d'une algèbre de Lie libre, $\mathbb{L}(W)$, sur un espace vectoriel bigradué $W = \bigoplus_{\substack{i \geq 0 \\ k \geq 1}} W_{i,k-i}$;
- (2) d'une différentielle δ sur $\mathbb{L}(W)$ de degré total -1 , tel que

$$\delta(W_{i,*}) \subset \mathbb{L}(W)_{<i,*} ;$$

- (3) et d'une équivalence faible $(\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ telle que $(\mathbb{L}(W_0), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ soit surjective en homologie.

Un tel modèle est appelé *modèle filtré à la Ganea* si l'inclusion de la fibre homotopique de $(\mathbb{L}(W_{\leq i,*}), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ dans $(\mathbb{L}(W_{\leq i+1,*}), \delta)$ est homotopiquement triviale.

Dans le cas particulier où la différentielle de $(L, \partial) \in \mathcal{L}ie$ est nulle, nous introduisons :

Définition 6.2 : Soit $(L, 0) \in \mathcal{L}ie$, un *modèle bigradué de L* est la donnée :

- (1) d'une algèbre de Lie libre, $\mathbb{L}(W)$, sur un espace vectoriel bigradué $W = \bigoplus_{\substack{i \geq 0 \\ k \geq 1}} W_{i,k-i}$;
- (2) d'une différentielle δ sur $\mathbb{L}(W)$ de bidegré $(-1, 0)$, i.e.

$$\delta(W_{i,k-i}) \subset \mathbb{L}(W)_{i-1,k-i} ;$$

- (3) et d'un morphisme d'algèbres de Lie différentielles $\rho : (\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (L, 0)$ tel que :

- (a) $\rho(W_{0,*}) = L$;
- (b) $\rho(W_{\geq 1,*}) = 0$;
- (c) $H_*(\rho)$ soit un isomorphisme.

Remarquons que l'homologie $H_*(\mathbb{L}(W), \delta)$ d'un modèle bigradué est naturellement munie d'une bigraduation.

La condition (c) ci-dessus équivaut alors à $H_{0,*}(\mathbb{L}(W_{\leq i}), \delta) \cong L$, pour $i \geq 1$, et à

$$(*) \quad H_{j,*}(\mathbb{L}(W_{\leq i}), \delta) = 0, \quad \text{pour } 0 < j < i.$$

Si $\rho : (\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ est un modèle filtré, la filtration de $\mathbb{L}(W)$ induit une suite spectrale, (E^i, d^i) , convergeant vers $H_*(L, \partial)$. En munissant L de la filtration triviale, $F^i L = L$, $i \geq 0$, on obtient un morphisme de suite spectrale $E^i(\rho)$. Remarquons $E^i(\rho) : (E^i, d^i) \rightarrow (H_*(L, \partial), 0)$, $i \geq 1$.

Théorème 4 : *Soit $\rho : (\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ un modèle filtré tel que $E^1(\rho)$ soit un modèle bigradué de $H_*(L, \partial)$, alors la fibration associée à la réalisation de $(\mathbb{L}(W_{\leq n}), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ est une $(n + 1)$ -LS fibration, pour tout $n \geq 0$.*

Dans le cas particulier du modèle filtré d'Oukili (cf section suivante) nous retrouvons le résultat de Lemaire [12].

Le théorème 4 est une conséquence directe des deux propositions suivantes :

Proposition 6.3 : *Soit $\rho : (\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ un modèle filtré tel que $E^1(\rho)$ soit un modèle bigradué de $H_*(L, \partial)$, alors ρ est un modèle filtré à la Ganea.*

Proposition 6.4 : *Soit $\rho : (\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ un modèle filtré à la Ganea, alors la fibration associée à la réalisation de $(\mathbb{L}(W_{\leq n}), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ est une $(n + 1)$ -LS fibration, pour tout $n \geq 0$.*

La preuve utilisera le :

Lemme 6.5 : *Considérons une algèbre de Lie bigraduée, $(L = \mathbb{L}(Z), \delta)$, vérifiant :*

(i) *la différentielle δ est de bidegré $(-1, 0)$;*

(ii) *$H_{<i,*}(L) = 0$;*

(iii) *$L_{>i}$ est inclus dans l'espace des éléments de L décomposables en crochets.*

S'il existe une équivalence faible $f : (\mathbb{L}(Y), 0) \rightarrow (L, \delta)$, alors il existe une équivalence faible $g : (\mathbb{L}(Y), 0) \rightarrow (L, \delta)$ tel que $g(Y) \subset L_{i,}$.*

Démonstration du lemme 6.5 : Pour toute algèbre de Lie différentielle, (M, d) , notons $Q(M, d)$ le complexe obtenu en quotientant par les décomposables et $Q : M \rightarrow Q(M)$ l'application quotient. Les hypothèses impliquent que $H_*(Q(f))$ est un isomorphisme.

Supposons $f(y) \in L_{i,*}$ pour tout $y \in Y$ de degré inférieur ou égal à k , $k \geq 0$. Choisissons une base $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de Y_{k+1} et décomposons :

$$f(y_\gamma) = \xi_\gamma + \theta_\gamma + \eta_\gamma ; \xi_\gamma \in L_{<i}, \theta_\gamma \in L_i, \eta_\gamma \in L_{>i}.$$

Remarquons que les éléments de cette égalité sont des cycles. Par hypothèse, le cycle ξ_γ est un bord. Quitte à remplacer f par une application homotope, nous pouvons donc supposer :

$$f(y_\gamma) = \theta_\gamma + \eta_\gamma.$$

Fixons un élément $j \in \Gamma$, l'application f étant une équivalence faible, le cycle η_j s'écrit :

$$\eta_j = \sum_{\gamma} \beta_\gamma (\theta_\gamma + \eta_\gamma) + P_j + \delta(\mu_j),$$

où P_j est un polynôme d'éléments décomposables dans les variables $f(y_l)$, $y_l \in Y_{\leq k}$. La projection de cette égalité sur l'homologie des indécomposables :

$$\sum_{\gamma} \beta_\gamma [Q(\theta_\gamma)] = 0 = \sum_{\gamma} \beta_\gamma H_*(Q(f)(y_\gamma)),$$

implique $\beta_\gamma = 0$, pour tout γ . Le cycle η_j est ainsi homologue à P_j . Notons \bar{P}_j le polynôme obtenu en remplaçant chaque variable $f(y_l)$ par y_l . Il suffit alors de choisir $\bar{y}_j = y_j - \bar{P}_j$ comme nouveau générateur pour avoir $f(\bar{y}_j) \in L_i$. ■

Démonstration de la proposition 6.4 : La condition (3) de la définition 6.1 implique l'existence d'un complexe de chaînes, (Z_0, δ) , contractile et d'une application de complexes de chaînes $(Z_0, \delta) \rightarrow (L, \partial)$ telle que $\rho' : (\mathbb{L}(W_0 \oplus Z_0), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ soit surjective. En définissant $W'_0 = W_0 \oplus Z_0$, $W'_i = W_i$, pour $i \geq 1$, on obtient un nouveau modèle filtré pour lequel les applications $(\mathbb{L}(W'_{\leq i}), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ sont des fibrations dans $\mathcal{L}ie$. De plus, les injections $(\mathbb{L}(W_i), \delta) \rightarrow (\mathbb{L}(W'_i), \delta)$ sont des équivalences faibles. La proposition 2.2 implique le résultat pour $n = 0$.

Remarquons également que, modulo un changement de générateurs nous pouvons supposer que $\rho'(W'_i) = 0$, $i > 0$. La fibre homotopique de $\rho' : (\mathbb{L}(W'_{\leq i}), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ étant le noyau (donc stable à la différentielle), on constate que $(\mathbb{L}(W'_{\leq i+1}), \delta)$ s'obtient à partir de $(\mathbb{L}(W'_{\leq i}), \delta)$ en attachant des cellules à la fibre homotopique. Le théorème 1 implique alors le résultat pour tout $n \geq 1$. ■

Démonstration de la proposition 6.3 : Comme dans la preuve précédente, modifions $(\mathbb{L}(W), \delta)$ pour que $\rho : (\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (L, \partial)$ soit surjective et vérifie $\rho(W_{\geq 1}) = 0$. Remarquons que ceci ne modifie pas le terme E^1 de la suite spectrale considérée.

Soit Ker_j le noyau de $(\mathbb{L}(W_{\leq j}), \delta) \rightarrow (L, \partial)$, la suite spectrale $(E^i, d^i)(Ker_j)$, induite sur ce noyau, dégénère pour $i = 2$. Utilisons maintenant un raisonnement par récurrence pour conclure :

Supposons que Ker_j a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères \mathbb{Q} -locales. D'après le Lemme 6.5, $E^2(Ker_j)$ est une algèbre de Lie libre engendrée par des éléments de degré filtrant j dans $\mathbb{L}(W)$. L'application induite en homologie, $H_*(Ker_j) \rightarrow H_*(\mathbb{L}(W_{\leq j+1}), \delta)$, est ainsi nulle et donc homotopiquement triviale dans ce cas particulier. Le lemme 4.7 implique alors que Ker_{j+1} a aussi le type d'homotopie d'un bouquet de sphères \mathbb{Q} -locales. ■

7 Constructions de modèles filtrés à la Ganea

7.1 Construction directe

La proposition 5.1 permet de construire directement un modèle filtré à la Ganea :

A chaque étape, $\tilde{F}_n \rightarrow \tilde{E}_n(X) \rightarrow X$, il suffit de choisir les nouvelles cellules à attacher, $A \rightarrow \tilde{E}_n(X)$, de sorte que l'application induite par l'application d'holonomie, $(\Omega X \times A)/\Omega X \rightarrow \tilde{F}_n$, soit surjective en homologie.

Pour cela, on a besoin de savoir déterminer l'application d'holonomie dans $\mathcal{L}ie$. Soit $L'' \rightarrow L' \rightarrow L$ une fibration d'algèbres de Lie différentielles cofibrantes, admettant une section $\tau : L \rightarrow L'$ de complexes de chaînes. On sait que, à une suspension près, la flèche $H_*(Q) : H_*(M) \rightarrow H_*(Q(M))$ s'identifie à l'homomorphisme de Hurewicz de l'espace représenté par $M \in \mathcal{L}ie$.

Proposition 7.1 : *Si L'' est une suspension, l'application induite en homologie par $\mathcal{U}L \otimes Q(L'') \rightarrow Q(L'')$, $x \otimes l \mapsto Q([\tau(x), l])$, $x \in L$, $l \in L''$, coïncide avec celle induite par l'holonomie.*

Démonstration : Un calcul montre que l'application décrite dans l'énoncé est compatible avec la différentielle et ne dépend pas du choix de τ . L'homologie de l'espace associée

à L'' étant sphérique et $H_*(\mathcal{U}L)$ étant sphériquement engendrée, il suffit d'appliquer le théorème 2. ■

Remarque : On peut raisonnablement conjecturer que ce résultat est vrai sans l'hypothèse " L'' est une suspension". Nous n'aurons pas besoin de cette généralisation.

Il existe également deux constructions particulières de modèles filtrés à la Ganea que nous rappelons ci-dessous. Elles correspondent aux théorèmes de Félix-Halperin, [3], et Lemaire, [12].

7.2 Modèles d'Oukili

Dans [17], Oukili construit un modèle filtré à partir d'un classique procédé de perturbation appliqué à une résolution en algèbres de Lie libres, appelée modèle bigradué.

Soit $(L, 0) \in \mathcal{L}ie$, le modèle bigradué d'Oukili, $\rho_L : (\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (L, 0)$, vérifie les conditions de la définition 6.2, et $W = \bigoplus_{i \geq 0} W_i$ est construit de façon inductive. On définit $W_0 = L/[L, L]$ et on choisit une application surjective $\mathbb{L}(W_0) \rightarrow L$, de noyau noté F_0 . On pose ensuite :

$$s^{-1}W_{1,*} := Q(F_0)/[L, Q(F_0)]$$

et

$$s^{-1}W_{n,*} := H_{n,*}/[L, H_{n,*}], \text{ pour } n \geq 2$$

où $H_{n,*} = H_{n,*}(\mathbb{L}(W_{<n}), \delta)$ (la désuspension opère sur le degré complémentaire).

Soit (M, d) un objet quelconque de $\mathcal{L}ie$. Le modèle filtré d'Oukili est un modèle filtré $\rho_M : (\mathbb{L}(W), \partial) \rightarrow (M, d)$ de (M, d) , obtenu en perturbant le modèle bigradué $\rho_{H_*(M,d)} : (\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (H_*(M, d), 0)$.

Avec l'éclairage du théorème 3 (et plus particulièrement de son corollaire 4.3) et l'explicitation de l'application d'holonomie dans ce cas particulier (Proposition 7.1), la construction de W_n apparaît comme la recherche d'un système de générateurs de $H_*(\tilde{F}_n)$ comme $H_*(\mathcal{U}L)$ -module. Elle est donc bien ad hoc pour la définition de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann.

Illustrons cette méthode avec l'exemple de Lemaire-Sigrist, [14] ; on étudie : $X = (S^4 \vee S^4) \cup_{\varphi_1} e^8 \cup_{\varphi_2} e^{15}$, de modèle de Quillen :

$$(L, \partial) = (\mathbb{L}(x, y, z, w), \partial); |x| = |y| = 3, |z| = 7, |w| = 14, \\ \partial x = \partial y = 0, \partial z = [y, y], \partial w = [x, [y, z]].$$

Nous construisons le modèle filtré de (L, ∂) en ne faisant apparaître que les générateurs de degré ≤ 15 , suffisants pour le problème d'existence d'une section homotopique. Un calcul donne $\rho : (\mathbb{L}(W), \delta) \rightarrow (L, \partial)$, avec :

$$W_0 = (\hat{x}, \hat{y}, \alpha), \quad \rho(\hat{x}) = x, \rho(\hat{y}) = y, \rho(\alpha) = [y, z], \\ W_1 = (\hat{z}, \hat{w}, \hat{w}'), \quad \delta\hat{z} = [\hat{y}, \hat{y}], \rho(\hat{z}) = z; \\ \delta\hat{w} = [\hat{x}, \alpha], \rho(\hat{w}) = w; \delta\hat{w}' = [\hat{y}, \alpha], \rho(\hat{w}') = (1/4)[z, z], \\ \beta \in W_2, \quad \delta\beta = [\hat{x}, [\hat{y}, \hat{z}]], \rho(\beta) = w.$$

Il est facile de constater qu'il n'existe pas de section homotopique $\sigma : (L, \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(W_0 \oplus W_1), \delta)$; un tel σ enverrait $x \mapsto \hat{x}$, $y \mapsto \hat{y}$, $z \mapsto \hat{z}$, pour des raisons de degré. Ainsi, $[x, [y, z]]$, serait envoyé sur un cycle non trivial, $[\hat{x}, [\hat{y}, \hat{z}]]$, ce qui interdit d'étendre σ à w . Par contre, $\sigma : (L, \partial) \rightarrow (\mathbb{L}(W_0 \oplus W_1 \oplus W_2), \delta)$ existe, d'où $\text{cat } X_0 = 3$. (On pouvait également déduire ce dernier point de $2 < \text{cat } X_0 \leq \text{cat } X \leq 3$, [22].)

Notons que $HQ(\rho) : W_0 \oplus W_1 \rightarrow Q(L)$ est surjectif par construction, donc l'invariant de Toomer $e(X_0)$ vaut 2.

Enfin, remarquons que cet exemple est minimal car la recherche d'un CW-complexe vérifiant $e(Y_0) = 2$ et $\text{cat } Y_0 = 3$ nécessite plus de 3 cellules. Il est en effet facile de constater que le seul type d'homotopie rationnelle, de catégorie égale à 3, admettant une représentation sous forme de CW-complexes à 3 cellules (\mathbb{Q} -locales) est $\mathbb{C}P^3$, (cf [19] pour une extension au cadre R -local).

7.3 Le modèle $\mathcal{LC}(L, \partial) \rightarrow (L, \partial)$

Soit \mathcal{C}_0 la catégorie des cogèbres cocommutatives différentielles et 1-réduites. Rappelons la construction des foncteurs $\mathcal{L} : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{L}ie$ et $\mathcal{C} : \mathcal{L}ie \rightarrow \mathcal{C}_0$.

Soit $(L, \partial) \in \mathcal{L}ie$, alors $\mathcal{C}(L, \partial)$ est la cogèbre commutative libre sur sL , munie de la différentielle $\partial_e + \partial_i$ où $\partial_i(sx) = -s(\partial x)$ se prolonge canoniquement sur $\mathcal{C}(L, \partial)$ et $\partial_e(sx \otimes sy + (-1)^{|sx||sy|} sy \otimes sx) = (-1)^{|sx|} 2s[x, y]$, $x \in L, y \in L$.

Soit $(C, \delta) \in \mathcal{C}_0$, notons \bar{C} le sous-espace des éléments de degré strictement positif et $\bar{\Delta}$ la diagonale réduite; $\mathcal{L}(C, \delta)$ est l'algèbre de Lie libre sur $s^{-1}(\bar{C})$, munie de la différentielle $\delta_e + \delta_i$, où $\delta_i(s^{-1}x) = -s^{-1}(\delta x)$ et $\delta_e(s^{-1}x) = \sum_j (-1)^{|x'_j|} [s^{-1}x'_j, s^{-1}x''_j]$, si $\bar{\Delta}x = \sum_j x'_j \otimes x''_j$.

L'application canonique $\mathcal{LC}(L, \partial) \rightarrow (L, \partial)$, définie par la projection canonique $s^{-1}\mathcal{C}(L, \partial) \rightarrow L$, induit un isomorphisme en homologie.

Nous définissons une filtration sur $\mathcal{C}(L, \partial)$ par $\mathcal{C}(L, \partial)_{\leq i}$ est l'ensemble des éléments de longueur tensorielle $\leq i + 1$, afin de faire de $\mathcal{LC}(L, \partial)$ un modèle filtré.

Proposition 7.2 : $\mathcal{LC}(L, \partial) \rightarrow (L, \partial)$ est un modèle filtré à la Ganea.

Démonstration : C'est une conséquence directe de la proposition 6.3 car le terme (E^1, d^1) de la suite spectrale associée est un modèle bigradué, à savoir :

$$\mathcal{LC}(H_*(L, \partial)) \rightarrow (H_*(L, \partial), 0).$$

■

Corollaire 7.3 : [3] Notons $(\Lambda V, d)$ le modèle minimal de Sullivan associé à l'espace $X \in 1\text{-CW}$, de nombres de Betti finis. La réalisation de la surjection canonique

$$(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V / \Lambda^{>n}, \bar{d})$$

est une n -LS fibration.

Ce résultat est une conséquence directe de la proposition; nous renvoyons à [20] pour la définition de modèles de Sullivan.

Corollaire 7.4 : Soit $C \in \mathcal{C}_0$ un modèle de l'espace $X \in 1\text{-CW}$ et soit C_n le $n^{\text{ième}}$ terme de la filtration primitive de C , alors la fibration de base X , associée à la réalisation de $C_n \hookrightarrow C$, est une n -LS fibration.

Rappelons que la filtration primitive de C est définie, de façon inductive, par :

- $C_0 = \mathbb{Q}.1$,
- $C_n = \{x \in C \mid \Delta x - x \otimes 1 - 1 \otimes x \in C_{n-1} \otimes C_{n-1}\}$.

Démonstration : Nous pouvons supposer que $C = \mathcal{C}(L, \partial)$, où (L, ∂) est un modèle de Quillen de X . La flèche $\mathcal{L}(C_{n+1}) = \mathcal{L}(\mathcal{C}(L, \partial)_{\leq n}) \rightarrow L$ définit une $(n+1)$ -LS fibration. Le résultat découle maintenant du fait que $C_{n+1} \rightarrow \mathcal{C}\mathcal{L}C_{n+1}$ est une équivalence faible. ■

Références

- [1] Berstein I., Homotopy mod \mathcal{C} of spaces of category 2, *Comment. Math. Helv.* **35**, (1960), 9-14.
- [2] Berstein I., Ganea T., The category of a map and of a cohomology class, *Fundam. Math.* **50**, (1961/2), 265-279.
- [3] Félix Y., Halperin S., Rational LS-category and its applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* **273**, (1982), 1-37.
- [4] Félix Y., Thomas J.-C., The fibre-cofibre construction and its applications, *J. Pure Appl. Alg.* **53**, (1988), 59-69.
- [5] Félix Y., Thomas J.-C., Effet d'un attachement cellulaire dans l'homologie de l'espace des lacets, *Ann. Inst. Fourier* **539**, (1989), 207-224.
- [6] Ganea T., Lusternik-Schnirelmann category and strong category, *Illinois J. of Math.* **11**, (1967), 417-427.
- [7] Ganea T., On the homotopy suspension, *Commentarii Math. Helv.* **43**, (1968), 225-234.
- [8] Gilbert W.J., Some examples for weak category and conilpotency, *Illinois J. of Math.* **12**, (1968), 421-432.
- [9] Hilton P., *Homotopy Theory and Duality*, Gordon and Breach, (1963).
- [10] James I.M., On category in the sense of Lusternik-Schnirelmann, *Topology* **17**, (1978), 331-348.
- [11] James I.M., Lusternik-Schnirelmann category, in : *Handbook of Algebraic Topology*, Elsevier (1995), 1293-1310.
- [12] Lemaire J.-M., Sur le type d'homotopie rationnelle des espaces de Ganea, *Astérisque* **113-114**, (1984), 238-247.
- [13] Lemaire J.-M., Lusternik-Schnirelmann category : an introduction, *Lecture Notes in Math.* **1183**, (1986), 259-276.
- [14] Lemaire J.-M., Sigrist F., Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la LS-catégorie, *Commentarii Math. Helv.* **56**, (1981), 103-122.
- [15] Lusternik L. , Schnirelmann L., *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Hermann, Paris, (1934).

- [16] Mather M., Pull-backs in homotopy theory, *Can. J. Math.* **28-2**, (1976), 225-263.
- [17] Oukili A., Sur l'homologie d'une algèbre de Lie différentielle, *Thèse, Nice*, (1978).
- [18] Quillen D., Rational homotopy theory, *Ann. of Maths.* **90**, (1969), 205-295.
- [19] Scheerer H., Tanré D., LS-catégorie de CW-complexes à 3 cellules en théorie homotopique R -locale, à paraître dans *Publicacions Matemáticas*, (1995).
- [20] Sullivan D., Infinitesimal computations in Topology, *Publications I.H.E.S.* **47**, (1977), 269-331.
- [21] Tanré D., *Homotopie Rationnelle : Modèles de Chen, Quillen et Sullivan*, Lecture Notes in Math. **1025**, (1983).
- [22] Toomer G.H., Topological localization, category and cocategory, *Can. J. Math.* **27** (1975), 319-322.
- [23] Whitehead G.W., The homology suspension, Colloque de Topologie Algébrique tenu à Louvain en 1956, 89-95.

Hans Scheerer
Freie Universität Berlin
Mathematisches Institut
Arnimallee 2-6
D-14195 Berlin
Allemagne

Daniel Tanré
U.R.A. CNRS 0751
U.F.R. de Mathématiques
Université des Sciences et Technologies
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France.