Champs presque m-spéciaux dans l'algèbre associée à un champ tensoriel du type (1,2)

Liviu Nicolescu

Abstract

Dans cette Note on introduit les champs presque m-spéciaux dans l'algèbre associée à un champ tensoriel du type (1,2) sur une variété différentiable (§1). Dans le §2 on met en évidence les courbes presque 3-spéciales des éspaces conformément euclidiens. On donne la forme canonique des métriques des espaces de Riemann conformément euclidiens qui admettent des courbes presque 3-spéciales droites parallèles aux droites qui forment un faisceau. Dans le §3 on va généraliser d'une certaine manière la connexion de Tzitzéica.

Mathematics Subject Classification: 53B20, 53B21.
Key words: algèbre de déformation, algèbre de Tzitzéica, connexion de Tzitzéica.

Introduction

Les variétés différentiables, les applications différentiables, les champs tensoriels et les connexions linéaires qui interviennent dans la suite sont supposées de classe C^∞.

Soit M une variété différentiable réelle à n dimensions. On note avec $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles, différentiables définies sur M et avec $\mathcal{T}^r_s(M)$, le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs du type (r, s) sur M. Particulièrement, pour $\mathcal{T}^1_0(M)$, resp. $\mathcal{T}^0_1(M)$, on utilise la notation $\mathcal{X}(M)$, resp. $\Lambda^1(M)$.

Soit $A \in \mathcal{T}^1_2(M)$. Si on définit le produit de deux champs de vecteurs X et Y par la formule

$$X \circ Y = A(X, Y) \tag{0.1}$$

alors le $\mathcal{F}(M)$-module $\mathcal{X}(M)$ devient une $\mathcal{F}(M)$-algèbre. L'algèbre définie par la formule (0.1) s'appelle algèbre associée à A et on la note $\mathcal{U}(M, A)$. Si ∇ et $\bar{\nabla}$ sont deux connexions linéaires sur M, l'algèbre $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ s'appelle algèbre de déformation de la paire de connexions $(\nabla, \bar{\nabla})$ [7].

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.10, No.1, 2005, pp. 98-107.

1 Champs presque m-spéciaux

Soit $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$ fixé.

Définition 1.1. Soit $m > 0$ un nombre entier. Un élément $X \in \mathcal{U}(M, A)$ s'appelle champ presque m-spécial s'il existe une fonction $f_X \in \mathcal{F}(M)$ t.q.

$$A(Z, \overset{m}{X}) = f_X Z, \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M) \tag{1.1}$$

où $\overset{1}{X} = X$, $\overset{m}{X} = \overset{m-1}{X} \circ X$.

Remarque 1.2. i) Si $m = 1$, alors (1.1) nous montre que X est un champ presque spécial dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ [3].

ii) Si $f_X = 0$, alors (1.1) nous montre que X est un champ m-spécial dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ [4].

Proposition 1.3. *Soit $X \in \mathcal{U}(M, A)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *est un champ presque m-spécial,*

ii) *pour tout $Z \in \mathcal{X}(M)$ on a la relation:*

$$A(Z, \overset{m}{X}) \otimes Z - Z \otimes A(Z, \overset{m}{X}) = 0. \tag{1.2}$$

Démonstration. Evidente.

Remarque 1.4. Soient A^i_{jk}, resp. X^i, les composantes de A, resp. X, dans un système de coordonnèes locales. On a:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{X} = X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},\\
&\overset{2}{X} = X \circ X = A(X, X) = A^{i_1}_{j_1 j_2} X^{j_1} X^{j_2} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\\
&\overset{3}{X} = \overset{2}{X} \circ X = A^{i_1}_{j_1 j_2} A^{i_2}_{i_1 j_3} X^{j_1} X^{j_2} X^{j_3} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\overset{m}{X} = A^{i_1}_{j_1 j_2} A^{i_2}_{i_1 j_3} \dots A^{i_{m-1}}_{i_{m-2} j_m} X^{j_1} \dots X^{j_m} \frac{\partial}{\partial x^{i_{m-1}}}.
\end{aligned}$$

En coordonnées locales la relation (1.1) s'écrit:

$$A^{i_1}_{j_1 j_2} A^{i_2}_{i_1 j_3} \dots A^{i_{m-1}}_{i_{m-2} j_m} A^r_{k i_{m-1}} X^{j_1} \dots X^{j_m} = f_X \delta^r_k. \tag{1.1$'$}$$

La relation (1.2) s'écrit en coordonnées locales:

$$A^{i_1}_{j_1 j_2} A^{i_2}_{i_1 j_3} \dots A^{i_{m-1}}_{i_{m-2} j_m} (A^r_{k i_{m-1}} \delta^p_q - A^p_{q i_{m-1}} \delta^r_k) X^{j_1} \dots X^{j_m} = 0. \tag{1.2$'$}$$

Définition 1.5. Soit $X \in \mathcal{U}(M, A)$ un champ presque m-spécial t.q. $X_p \neq 0$, $(\forall) p \in M$. Alors X s'appelle champ presque m-spécial de directions.

Les trajectoires des champs presque m-spéciaux de directions sont appellées courbes presque m-spéciales.

Remarque 1.6. En utilisant (1.2') on obtient le système différentiel d'équations des courbes presque m-spéciales associées à l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$.

$$A^{i_1}_{j_1 j_2} A^{i_2}_{i_1 j_3} \ldots A^{i_{m-1}}_{i_{m-2} j_m} (A^r_{k i_{m-1}} \delta^p_q - A^p_{q i_{m-1}} \delta^r_k) \frac{dx^{j_1}}{dt} \ldots \frac{dx^{j_m}}{dt} = 0. \tag{1.3}$$

Proposition 1.6. *Soient* $\nabla, \bar{\nabla}$ *deux connexions linéaires sur* M*. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ *est un champ presque 1-spécial,*

ii) *il existe une 1-forme* $\omega \in \Lambda^1(M)$ *telle que*:

$$A(Z, Y) = \omega(Y) Z, \quad (\forall) Y, Z \in \mathcal{X}(M), \tag{1.4}$$

où $A = \bar{\nabla} - \nabla$

iii) *les connexions* ∇ *et* $\bar{\nabla}$ *possèdent le même transport parallèle de directions.*

Démonstration (i) $\Rightarrow$ (ii). En utilisant (1.1), pour $m = 1$, on obtient:

$$A(Z, X) = f_X Z, \quad (\forall) X, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{1.5}$$

En utilisant (1.5), il résulte:

$$f_{Y+Z} = f_Y + f_Z, \; f_{hX} = h f_X, \quad (\forall) h \in \mathcal{F}(M), \; (\forall) X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), \tag{1.6}$$

donc $f_X = \omega(X)$, $(\forall) X \in \mathcal{X}(M)$, où ω est une 1-forme sur M.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Evidémment.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Voir [2].

Corollaire 1.7. *Supposons que l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ *est commutative et* $n = \dim M \geq 2$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ *est un champ presque 1-spécial,*

ii) $\bar{\nabla} = \nabla$.

Remarque 1.8. i) Pour $m = 1$ les équations (1.3) s'écrivent:

$$(A^i_{jk} \delta^s_r - A^s_{rk} \delta^i_j) \frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{1.7}$$

et pour $m = 2$ les équations (1.3) deviennent:

$$(A^r_{ki} \delta^p_q - A^p_{qi} \delta^r_k) A^i_{jh} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^h}{dt} = 0. \tag{1.8}$$

Les équations différentielles des courbes presque 3-spéciales sont:

$$(A^r_{ks} \delta^p_q - A^p_{qs} \delta^r_k) A^i_{jh} A^s_{il} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^l}{dt} = 0. \tag{1.9}$$

2 Les courbes presque 3-spéciales des espaces de Riemann conformément euclidiens

Soit (M,g) un espace de Riemann conformément euclidien à n dimensions, donc sa métrique s'écrit ([11], p.130)

$$ds^2 = e^{2u(x^1,\ldots,x^n)}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] \tag{2.1}$$

où u est une fonction différentiable arbitraire. Soit ∇ une connexion linéaire sur M qui satisfait les conditions:

$$\nabla_X g = 0,\ \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = Y(u)X - X(u)Y, \quad (\forall) X,Y \in \mathcal{X}(M). \tag{2.2}$$

Pour tous $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ de (2.2) on a la relation:

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y,[X,Z]) + \\ &+ Z(u)g(X,Y) - X(u)g(Y,Z) \end{aligned} \tag{2.3}$$

On écrit aussi les deux relations obtenues par substitutions circulaires:

$$\begin{aligned} Y(g(Z,X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z,[Y,X]) + \\ &+ X(u)g(Y,Z) - Y(u)g(Z,X), \end{aligned} \tag{2.3'}$$

$$\begin{aligned} Z(g(X,Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X,[Z,Y]) + \\ &+ Y(u)g(Z,X) - Z(u)g(X,Y). \end{aligned} \tag{2.3''}$$

De (2.3), (2.3') et (2.3") on obtient pour tous $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ la relation [12]:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) - \\ &- g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y]) + \\ &+ 2Y(u)g(X,Z) - 2Z(u)g(X,Y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Soit $\bar{\nabla}$ la transposée de la connexion ∇, donc on a [6]:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X,Y], \quad (\forall) X,Y \in \mathcal{X}(M) \tag{2.5}$$

De (2.5) et (2.4) on a

$$\begin{aligned} 2g(\bar{\nabla}_Y X, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) - \\ &- g(y,[X,Z]) + g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y]) + \\ &+ 2Y(u)g(X,Z) - 2Z(u)g(X,Y) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Soit $\overset{\circ}{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à g. Pour tous $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ on a

$$\begin{aligned} 2g(\overset{\circ}{\nabla}_Y X, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) - \\ &- g(X,[Y,Z]) - g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Soit $A = \bar{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$. De (2.7) et (2.6) il résulte

$$g(A(Y,X),Z) = Y(u)g(X,Z) - Z(u)g(X,Y) \tag{2.8}$$

En coordonnées la relation (2.8) s'écrit:

$$A^r_{ji} g_{rk} = g_{ik} u_j - g_{ij} u_k \tag{2.8'}$$

où $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$, $u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x^i}$, $u^k = g^{ki}u_i$, $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$ et A^i_{jk} sont les composantes de A.

En multipliant les formules (2.8') par g^{hk} et en sommant, il résulte

$$A^h_{ji} = \delta^h_i u_j - \delta_{ij}\delta^{hk}u_k. \tag{2.9}$$

Convention. i) Dans ce qui suit on appelle courbes presque m-spéciales de l'espace conformément euclidien (M,g) les courbes presque m-spéciales associées à l'algèbre $\mathcal{U}(M,A)$.

ii) Dans ce qui suit par "droites" nous sousentendons des courbes sur M qui, dans des chartes préférentielles sont représentées par des droites de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 2.1. En utilisant (2.9) et (1.9) nous obtenons les équations différentielles des courbes presque 3-spéciales de l'espace conformément euclidien de métrique (2.1):

$$\begin{aligned}&\left[\delta^p_q\left(u_k\frac{dx^r}{dt} - u_r\frac{dx^k}{dt}\right) - \delta^r_k\left(u_k\frac{dx^p}{dt} - u_p\frac{dx^q}{dt}\right)\right]\cdot\left[\left(u_j\tfrac{dx^j}{dt}\right)^2 - \right.\\ &\qquad\left. - \sum_{i=1}^n\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\sum_{j=1}^n (u_j)^2\right] = 0\end{aligned} \tag{2.10}$$

En ce qui suit nous considérons le cas où les courbes presque 3-spéciales sont droites, en déterminant la forme canonique de la métrique (2.1).

Pour le debut nous allons analyser le cas où les courbes presque 3-spéciales de l'espace (M,g) de la métrique (2.1) sont des droites parallèles, donc les équations (2.10) admettent la solution $x^i = a^i t + \lambda^i$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ où $a^1,\ldots,a^n$ sont des constantes (non toutes nulles) et $\lambda^1,\ldots,\lambda^n$ sont des paramètres. Alors, les équations (2.10) deviennent

$$a^i\frac{\partial u}{\partial x^k} - a^k\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0, \quad i,k \in \{1,\ldots,n\}$$

admettent la solution

$$u(x^1,\ldots,x^n) = h(a^1x^1 + \ldots + a^nx^n),$$

où h est une fonction différentiable arbitraire.

On a obtenu donc la

Proposition 2.2. *Si un espace conformément euclidien admet comme courbes presque 3-spéciales des droites parallèles, alors sa métrique s'écrit*

$$ds^2 = e^{2h(a^1x^1+\ldots+a^nx^n)}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2], \tag{2.1'}$$

où h est une fonction différentiable arbitraire.

Remarque 2.3. i) Evidémment, la condition (2.1') est nécessaire et suffisante pour que l'espace conformément euclidien admette des courbes presque 3-spéciales droites parallèles.

ii) Par une transformation linéaire convenable, la métrique (2.1') peut être écrite sous la forme canonique

$$ds^2 = e^{2f(x^1)}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] \tag{2.1''}$$

où f est une fonction différentiable arbitraire. La métrique (2.1") est l'une des formes données par Schapiro pour la métrique d'un espace Riemann de $n-2$ fois projectif ([8], II, p.38). Par conséquence: *La condition necessaire et suffisante qu'un espace riemannien conformément euclidien admette des courbes presque 3-spéciales droites parallèles est que sa métrique puisse être réduite, par une transformation linéaire, a la forme canonique (2.1").*

Remarque 2.4. i) Si dans (2.1") on a

$$f(x^1) = a_1 x^1,$$

où a_1 est une constante non nulle (si a_1 est zéro, l'espace serait euclidien), alors

$$ds^2 = e^{2a_1 x^1}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2], \tag{2.1'''}$$

est la métrique de Vagner des espaces à connexion constante [9], [10]. Il résulte que: *Tout espace riemannien conformément euclidien qui est un espace de Vagner a les courbes presque 3-spéciales formées par des droites paralléles.*

ii) Si dans (2.1") on prend

$$f(x^1) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{-K(x^1)^2}$$

où K est une constante négative, alors on obtient la forme canonique de Beltrami:

$$ds^2 = \frac{1}{-K(x^1)^2}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2].$$

Par conséquence on a:

Proposition 2.3. *Tout espace riemannien à courbure constante négative, rapporté à un système de coordonnées dans lequel la métrique a la forme de Beltrami, a les courbes presque 3-spéciales formées des droites paralléles.*

On suppose dans ce qui suit que les courbes 3-spéciales de l'espace conformément euclidien de métrique (2.1) sont des droites qui forment un faisceau, donc les équations (2.10) admettent la solution $x^i = \lambda^i t + a^i$, où $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ sont paramètres, $(\lambda^1)^2 + \ldots + (\lambda^n)^2 > 0$ et $a^1, \ldots, a^n$ sont des constantes.

On peut considérer $a^1 = \ldots = a^n = 0$, c'est à dire le faisceau de droites soit avec le centre dans l'origine, ce qui est toujours possible par une translation.

En écrivant les équations du faisceau sous la forme $x^i = \dfrac{dx^i}{dt}t$, de (2.10) on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}x^k - \frac{\partial u}{\partial x^k}x^i = 0 \tag{2.11}$$

La solution du système (2.11) est $u(x^1, \ldots, x^n) = h((x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2)$, où h est une fonction différentiable quelconque. On a obtenu donc la

Proposition 2.4. *Si les courbes presque 3-spéciales d'un espace conformément euclidien sont droites formant un faisceau, alors la métrique de l'espace s'écrit:*

$$ds^2 = e^{2h((x^1)^2+\ldots+(x^n)^2)}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2], \tag{2.12}$$

où h est une fonction différentialle quelconque.

Evidémment la condition (2.12) est necessaire et suffisante pour qu'un espace conformément euclidien admette les courbes 3-spéciales droites qui forment un faisceau. Si dans la métrique (2.12) on prend:

$$h((x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2) = \ln \left\{1 + \frac{K}{4}[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]\right\}^{-1}$$

où K est une constante réelle, alors on obtient la métrique d'un espace de Riemann à courbure constante sous la forme de Riemann:

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2}{\left\{1 + \frac{K}{4}[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]\right\}^2}.$$

Par conséquent on a

Proposition 2.5. *Tout espace de Riemann à courbure constante, rapporté à un système de coordonnés dans lequel la métrique a la forme de Riemann, a les courbes presque 3-spéciales formées d'un faisceau de droites.*

Remarque 2.6. Les symboles de Christoffel de deuxieme espèce de la metrique (2.1) sont donnés par les formules:

$$\left| \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right| = \delta^i_j u_k + \delta^i_k u_j - \delta_{jk}\delta^{is}u_s, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i} \tag{2.13}$$

En utilisant (2.13) on obtient que les géodésiques de l'espace conformément euclidien de métrique (2.1) ont les équations

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2\frac{du}{dt}\frac{dx^i}{dt} - ce^{-2u}\frac{\partial u}{\partial x^j}\delta^{ji} = 0,$$

où c est une constante. De (2.10) il résulte qu'on a:

$$\delta^{ij}u_j = \lambda\frac{dx^i}{dt} \tag{2.10'}$$

où λ est une fonction différentiable de variables $x^1, \ldots, x^n$. En tenant compte de (2.10') les équations différentielles des géodésiques deviennent:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \left(2\frac{du}{dt} - ce^{-2u}\right)\frac{dx^i}{dt} = 0$$

ce qui nous montre que les géodésiques qui sont courbes presque 3-spéciales sont droites. Donc:

Proposition 2.6. *Les géodésique de l'espace conformément euclidien de métrique (2.1) qui sont courbes presque 3-spéciales sont droites.*

3 Connexions de Tzitzéica presque 1-spéciales

Soit M une hypersurface immergée dans un espace de Riemann $(\bar{M}, \bar{g})$ et soit $\bar{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à $\bar{g}$.

Sur M seront induites deux structures:

1) une structure de Riemann, canonique

$$\bar{\nabla}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + h(X,Y)N, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M) \quad \text{(Gauss)} \tag{3.1}$$

$$\bar{\nabla}_X N = -F(X), \quad (\forall) X \in \mathcal{X}(M) \quad \text{(Weingarten)}, \tag{3.2}$$

où $\overset{\circ}{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g induite sur M, $h \in \mathcal{T}_2^0(M)$ est la deuxiéme forme fondamentale sur $M, N \in \mathcal{X}(\bar{M})$ t.q. $\bar{g}(X,N) = 0$, $(\forall) X \in \mathcal{X}(M)$, $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$ est l'application de Weingarten, qui vérifie

$$g(F(X), Y) = h(X,Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

2) la deuxiéme structure, de type Tzitzéica est donée [1], [13] par

$$\bar{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{h}(X,Y)C, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{3.3}$$

$$\bar{\nabla}_X C = fX + \omega(X)C, \quad (\forall) X \in \mathcal{X}(M), \tag{3.4}$$

où $C \in \mathcal{X}(\bar{M})$ t.q. $C_p \notin T_pM$, $(\forall) p \in M$, $\tilde{\nabla}$ est la connexion de Tzitzéica, $\tilde{h} \in \mathcal{T}_2^0(M)$ est le tenseur de Tzitzéica, $f \in \mathcal{F}(M)$ et $\omega \in \Lambda^1(M)$.

On suppose que les deux structures sont compatibles.

En considérant les conditions d'intégrabilité de (3.1)-(3.2) et de (3.3)-(3.4) et en ecrivant

$$C = \xi + qN, \quad \xi \in \mathcal{X}(M), \quad q \in \mathcal{F}(M) \tag{3.5}$$

on a montré [5] que le tenseur de déformation $\tilde{A} = \tilde{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$ est

$$\tilde{A}(X,Y) = -\tilde{h}(X,Y)\xi, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{3.6}$$

L'algèbre $\mathcal{U}(M, \tilde{A})$ est nommée algèbre de Tzitzéica [5].

Maintenant on va généralizer d'une certaine manière la connexion de Tzitzéica.

Soient $\overset{\circ}{\nabla}, \tilde{\nabla}$ et ξ définis dans (3.1), (3.3) et (3.5)

Définition 3.1. Une connexion linéaire ∇ sur M s'appèlle connexion de Tzitzéica presque 1-spéciale si l'algèbre $\mathcal{U}(M, \nabla - \tilde{\nabla})$ a tous les éléments des champs presque 1-spéciaux.

Remarque 3.2. En utilisant la Proposition 1.6 il résulte que ∇ est une connexion de Tzitzéica presque 1-spéciale si et seulement s'il existe une 1-forme ω sur M telle que

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \omega(Y)X, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{3.7}$$

De (3.7) et (3.6) on obtient la formule:

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \omega(Y)X - \tilde{h}(X,Y)\xi, \quad (\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{3.8}$$

Proposition 3.3. *Soient $\overset{\circ}{\nabla}, \tilde{\nabla}$, resp. ∇, les connexions Levi-Civita, Tzitzéica, resp. une connection Tzitzéica presque 1-spéciale. Alors les algèbres $\mathcal{U}(M, \nabla - \overset{\circ}{\nabla})$ et $\mathcal{U}(M, \tilde{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla})$ ont les mêmes champs presque 1-spéciaux.*

Démonstration. Notons $A = \nabla - \overset{\circ}{\nabla}$, $\tilde{A} = \tilde{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$. En utilisant les formules (3.8) et (3.6) on obtient:

$$A(X,Y) = \tilde{A}(X,Y) + \omega(Y)X, \quad (\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{3.9}$$

Soit $W \in \mathcal{U}(M, \tilde{A})$ un champ presque 1-spécial. Alors il en résulte qu'il existe une fonction $f_W \in \mathcal{F}(M)$ telle que

$$\tilde{A}(Z,W) = f_W Z, \quad (\forall)Z \in \mathcal{X}(M) \tag{3.10}$$

De (3.9) et (3.10) on a

$$A(Z,W) = \{f_W + \omega(W)\}Z, \quad (\forall)Z \in \mathcal{X}(M). \tag{3.11}$$

La relation (3.11) nous montre que W est un champ presque 1-spécial dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$.

L'inclusion réciproque est analogue.

References

[1] A. Dobrescu, *Sur les variétés V_n immergées dans E_{n+1}*, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., 12(1967), 829-841.

[2] Gh. Gheorghiev, R. Miron and D.Papuc, *Geometrie analitică şi diferenţială*, vol. II, E.D.P. Bucureşti, 1969.

[3] L. Nicolescu, *Champs presque spéciaux dans l'algèbre de déformation*, An. st. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi, Tomul XXVII s. I-a, (1981), f.1, 172-176.

[4] L. Nicolescu, I. Hirică and S. Stupariu, *Champs m-spéciaux dans l'algèbre de déformation*, An. Univ. Oradea, Fasc. Matem., Tom V (1995-1996), 135-149.

[5] G.T. Pripoae, *Algèbres de Tzitzéica*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la RSR, 29 (77), nr. 4(1985), 365-370.

[6] C. Udrişte, *Linii de câmp*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1988.

[7] I. Vaisman, *Sur quelques formules du calcul de Ricci global*, Comm. Math. Helv., 41 (1966-1967), 73-87.

[8] Gh. Vrănceanu, *Leçons de Géométrie différentielle*, vol. I-II, Ed. de l'Acad. de la R.P.R., Bucurest, 1957, vol. III, Ed. de l'Acad. de la R.P.R., Bucarest et Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[9] Gh. Vrănceanu, *Proprietăţi globale ale spaţiilor lui Riemann cu conexiune constantă*, St. cerc. mat., XIII, 2(1962), 209-224.

[10] V. Vagner, *Spaţii ale lui Riemann cu simbolurile lui Christoffel constante*, Bul. Univ. Saratov, 1938.

[11] Gh. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. IV, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1968.

[12] K. Yano, *On semi-symmetric metric connection*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., XV, 9(1970), 1579-1586.

[13] K. Yano, *Generalization of the connection of Tzitzeica*, Kodai Math. Sem., 21(1969), 167-174.

Liviu Nicolescu
University of Bucharest, Faculty of Mathematics and Informatics
14 Academiei St., RO-010014, Bucharest, Romania
e-mail address: lnicol@geometry.math.unibuc.ro