Quelques remarques sur les connexions semi-symétriques métriques

Liviu Nicolescu et Teodor Vasile Oprea

Abstract

On considére une variété de Riemann (M, g), une 1-forme π sur M et soit ∇ la connexion π semi-symétrique métrique. On note avec $\overline{\nabla}$ la transposée de ∇, avec $\tilde{\nabla}$ la connexion symétrique associée à ∇ et soit $\overset{\circ}{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à g.

Dans cette note on met en évidence quelques propriétés de l'algèbre de déformation $\mathcal{U}(M, \nabla - \overset{\circ}{\nabla})$, $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla})$, $\mathcal{U}(M, \tilde{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla})$. On présente un parallélisme entre quelques propriétes géométriques et algébriques.

En utilisant des resultats de Levi-Civita et de Vrănceanu, dans le dernier paragraphe on met en evidence quelques remarques sur la connexion $\tilde{\nabla}$.

Mathematics Subject Classification: 53B20, 53B21.
Key words: algèbre de déformation, connexion semi-symétrique métrique, champ presque m-principal.

0 Introduction

Les variétés différentiables, les applications différentiables, les champs tensoriels et les connexions linéaires qui interviennent dans la suite sont supposées de classe C^∞.

Soit M une variété différentiable réelle à n dimensions. On note avec $\mathcal{F}(M)$, l'anneau des fonctions réeles, différentiables, définies sur M et avec $\mathcal{T}_s^r(M)$, le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs du type (r, s) sur M. Particulièrement, pour $\mathcal{T}_0^1(M)$, resp. $\mathcal{T}_1^0(M)$, on utilise la notation $\mathcal{X}(M)$, resp. $\Lambda^1(M)$.

Soit $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$. Si on définit le produit de deux champs de vecteurs X et Y par la formule

$$X \circ Y = A(X, Y) \tag{0.1}$$

alors le $\mathcal{F}(M)$-module $\mathcal{X}(M)$ devient une $\mathcal{F}(M)$-algèbre. L'algèbre définie par la formule (0.1) s'appelle l'algèbre associé à A et on note $\mathcal{U}(M, A)$. Si ∇ et $\overline{\nabla}$ sont deux connexions linéaires sur M, l'algébre $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla} - \nabla)$ s'appelle l'algèbre de déformation de la paire de connexions $(\nabla, \overline{\nabla})$ [13].

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.10, No.1, 2005, pp. 131-144.

1 Quelques éléments géométriques dans l'algèbre associée à un champ tensoriel de type (1,2)

Soit $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$ fixé et soit $m > 0$ un nombre entier.

Définition 1.1 [5]. Un élément $X \in \mathcal{U}(M, A)$ s'appelle champ m-caractéristique s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(M)$ t.q.

$$\overset{m}{X} = fX, \tag{1.1}$$

où $\overset{1}{X} = X$, $\overset{m}{X} = \overset{m-1}{X} \circ X$

Définition 1.2 [6] Un élément $X \in \mathcal{U}(M, A)$ s'appelle champ presque m-principal s'il existe une 1-forme $\omega \in \Lambda^1(M)$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(M)$ t.q.

$$A(Z, \overset{m}{X}) = fZ + \omega(Z)X, \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M) \tag{1.2}$$

Remarque 1.3. i) Si $f = 0$, alors (1.1) nous montre que X est un champ m-nilpotent.

ii) Si $f = 0$, alors (1.2) nous montre que X est un champ m-principal.

iii) Si $\omega = 0$, alors (1.2) nous montre que X est un champ presque m-spécial.

iv) Si $f = 0$ et $\omega = 0$, alors (1.2) nous montre que X est un champ m-spécial.

2 Connexions semi-symétriques métriques

Soit (M, g) une variété de Riemann à n-dimensions et soit $\pi \in \Lambda^1(M)$.

Une connexion linéaire ∇ sur M s'appelle connexion π-semi-symétrique métrique si

$$\nabla_X g = 0,\ T(X, Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M), \tag{2.1}$$

où $T \in \mathcal{T}_2^1(M)$ est le champ tensoriel de torsion associé à ∇, donc

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

Etant donnée $\pi \in \Lambda^1(M)$, il existe une unique connexion π-semi-symétrique métrique ∇. La connexion ∇ est donnée par la formule [1], [2], [3], [10], [16]

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \pi(Y)X - g(X, Y)P, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{2.2}$$

où $\overset{\circ}{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita associée à g et $P \in \mathcal{X}(M)$ est défini par

$$g(Z, P) = \pi(Z), \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M).$$

Soit $\overline{\nabla}$ la transposée de la connexion ∇, donc on a

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y], \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{2.2'}$$

De (2.2′) et (2.2) il résulte

$$\overline{\nabla}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \pi(X)Y - g(X, Y)P, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{2.3}$$

Soit $\tilde{\nabla}$ la connexion symétrique associée à ∇, donc $\tilde{\nabla} = \frac{1}{2}(\nabla + \overline{\nabla})$. De (2.2) et (2.3) on a

$$\tilde{\nabla}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \sigma(X)Y + \sigma(Y)X - g(X,Y)P, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{2.4}$$

où $\sigma = \frac{1}{2}\pi \in \Lambda^1(M)$. Notons

$$A = \nabla - \overset{\circ}{\nabla}, \quad \bar{A} = \overline{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}, \quad \tilde{A} = \tilde{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla},$$

$$A' = \overline{\nabla} - \nabla, \quad A'' = \tilde{\nabla} - \nabla, \quad A''' = \tilde{\nabla} - \overline{\nabla}.$$

Pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ nous avons:

$$A(X,Y) = \pi(Y)X - g(X,Y)P, \tag{2.5}$$

$$\bar{A}(X,Y) = \pi(X)Y - g(X,Y)P, \tag{2.6}$$

$$A'(X,Y) = \pi(X)Y - \pi(Y)X, \tag{2.7}$$

$$A'' = -A''' = \frac{1}{2}A', \tag{2.8}$$

$$\tilde{A}(X,Y) = \sigma(X)Y + \sigma(Y)X - g(X,Y)P. \tag{2.9}$$

Soient A^i_{jk}, $\bar{A}^i_{jk}$, $\tilde{A}^i_{jk}$, A'^i_{jk}, A''^i_{jk}, A'''^i_{jk}, g_{ij}, resp. π_i les composantes de $A, \bar{A}, \tilde{A}$, A', A'', A''', g, resp. π dans un système de coordonnées locales. En coordonnées locales les relations (2.5)-(2.9) s'écrivent:

$$A^i_{jk} = \delta^i_j \pi_k - g_{jk}\pi^i, \tag{2.5'}$$

$$\bar{A}^i_{jk} = \delta^i_k \pi_j - g_{jk}\pi^i, \tag{2.6'}$$

$$A'^i_{jk} = \delta^i_k \pi_j - \delta^i_j \pi_k, \tag{2.7'}$$

$$A''^i_{jk} = -A'''^i_{jk} = \frac{1}{2}A'^i_{jk}, \tag{2.8'}$$

$$\tilde{A}^i_{jk} = \delta^i_j \sigma_k + \delta^i_k \sigma_j - g_{jk}\pi^i, \tag{2.9'}$$

où $2\sigma_i = \pi_i$, $\pi^i = g^{ik}\pi_k$, $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$.

Théorème 2.1. *Soit (M,g) une variété Riemann connexe à n dimensions $(n \geq 3)$ et soit $\pi \in \Lambda^1(M)$. Soit $\overset{\circ}{\nabla}$, resp. ∇, la connexion de Levi-Civita associée à g, resp. la connexion π semi-symétrique métrique. Soit $\overline{\nabla}$ la transposée de la connexion ∇. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) $\pi = 0$,
(ii) $\nabla = \overset{\circ}{\nabla}$,
(iii) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \nabla - \overset{\circ}{\nabla})$ *est commutative,*
(iv) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \nabla - \overset{\circ}{\nabla})$ *est associative,*
(v) ∇ *et* $\overset{\circ}{\nabla}$ *conduisent au même tenseur de courbure, lorsque Ric g est nondégénéré,*
(vi) ∇ *et* $\overset{\circ}{\nabla}$ *conduisent au même tenseur de Ricci, lorsque Ric g est nondégénéré,*
(vii) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \nabla - \overset{\circ}{\nabla})$ *est un champ 2-caractéristique,*
(viii) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla})$ *est commutative,*
(ix) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla})$ *est associative,*
(x) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla})$ *est un champ 2-caractéristique,*
(xi) $\overline{\nabla}$ *et* $\overset{\circ}{\nabla}$ *conduisent au même tenseur de courbure, lorsque Ric g est nondégénéré*
(xii) $\overline{\nabla} = \overset{\circ}{\nabla}$,
(xiii) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla} - \nabla)$ *est commutative,*
(xiv) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla} - \nabla)$ *est associative,*
(xv) $\overline{\nabla} = \nabla$.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), (i) $\Rightarrow$ (iv), (i) $\Leftrightarrow$ (viii), (i) $\Rightarrow$ (ix), (i) $\Rightarrow$ (x), (i) $\Rightarrow$ (xi), (i) $\Leftrightarrow$ (xii), (i) $\Leftrightarrow$ (xiii), (i) $\Leftrightarrow$ (xiv), (i) $\Leftrightarrow$ (xv), (i) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi), (i) $\Rightarrow$ (vii). Evidemment.

(iv) $\Rightarrow$ (i) En utilisant (2.5), la condition

$$(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z), \quad (\forall) X, Y, Z \in \mathcal{X}(M),$$

s'écrit

$$\{g(X,Z)\pi(Y) + g(Y,Z)\pi(X) - g(X,Y)\pi(Z)\}P = \\ = g(Y,Z)\pi(P)X, \ \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Pour $Z = Y$ on obtient

$$\pi(X)P = \pi(P)X, \quad (\forall) X \in \mathcal{X}(M). \tag{2.10}$$

En coordonnées locales la relation (2.10) s'écrit:

$$\pi_i \pi^r = \pi_s \pi^s \delta_i^r.$$

En faisant $i = r$ et en sommant on obtient $\pi = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (i) De $R = \overset{\circ}{R}$ on a $\nabla_X R = \nabla_X \overset{\circ}{R}$, $(\forall) X \in \mathcal{X}(M)$ où $\overset{\circ}{R}$, resp. R est le tenseur de courbure de $\overset{\circ}{\nabla}$, resp. ∇. Pour tout $X, Y, Z, V \in \mathcal{X}(M)$ nous avons

$$(\nabla_X R)(Y,Z,V) = (\overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{R})(Y,Z,V) + A(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) - \\ - \overset{\circ}{R}(A(Y,Z),X)V - \overset{\circ}{R}(Z, A(Y,X))V - \overset{\circ}{R}(Z,X)A(Y,V), \tag{2.11}$$

On écrit encore deux relations obtenues par substitutions circulaires:

$$(\nabla_Y R)(Z,X,V) = (\overset{\circ}{\nabla}_Y \overset{\circ}{R})(Z,X,V) + A(Y, \overset{\circ}{R}(Z,X)V) - \\ - \overset{\circ}{R}(A(Y,Z),X)V - \overset{\circ}{R}(Z, A(Y,X))V - \overset{\circ}{R}(Z,X)A(Y,V), \tag{2.11'}$$

$$(\nabla_Z R)(X,Y,V) = (\overset{\circ}{\nabla}_Z \overset{\circ}{R})(X,Y,V) + A(Z, \overset{\circ}{R}(X,Y)V) - \overset{\circ}{R}(A(Z,X),Y)V - \overset{\circ}{R}(X, A(Z,Y))V - \overset{\circ}{R}(X,Y)A(Z,V), \tag{2.11''}$$

En tenant compte de (2.11), (2.11′), (2.11″) et en utilisant les idéntités de Bianchi:

$$(\overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{R})(Y,Z,V) + (\overset{\circ}{\nabla}_Y \overset{\circ}{R})(Z,X,V) + (\overset{\circ}{\nabla}_Z \overset{\circ}{R})(X,Y,V) = 0,$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,V) + R(T(X,Y),Z)V + R(T(Y,Z),X)V + R(T(Z,X),Y)V = 0,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} &2\pi(X)R(Y,Z)V + 2\pi(Y)R(Z,X)V + 2\pi(Z)R(X,Y)V = \\ &= A(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) + A(Y, \overset{\circ}{R}(Z,X)V) + A(Z, \overset{\circ}{R}(X,Y)V) - \\ &- \overset{\circ}{R}(Y,Z)A(X,V) - \overset{\circ}{R}(Z,X)A(Y,V) - \overset{\circ}{R}(X,Y)A(Z,V) + \\ &+ \overset{\circ}{R}(Z, A(X,Y) - A(Y,X))V + \overset{\circ}{R}(X, A(Y,Z) - A(Z,Y))V + \\ &+ \overset{\circ}{R}(Y, A(Z,X) - A(X,Z))V, \end{aligned} \tag{2.12}$$

où T est le champ tensoriel de torsion de ∇. On a

$$T(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y = A(X,Y) - A(Y,X), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{13}$$

Puisque $R = \overset{\circ}{R}$, de (2.12) et (2.13) on obtient

$$\begin{aligned} &A(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) + A(Y, \overset{\circ}{R}(Z,X)V) + A(Z, \overset{\circ}{R}(X,Y)V) = \\ &\overset{\circ}{R}(Y,Z)A(X,V) + \overset{\circ}{R}(Z,X)A(Y,V) + \overset{\circ}{R}(X,Y)A(Z,V) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Soient $\overset{\circ}{R}{}^i_{jkl}$ les composantes de $\overset{\circ}{R}$ dans un système de coordonnées locales. En coordonnées locales, la relation (2.14) s'écrit:

$$A^s_{ir} \overset{\circ}{R}{}^r_{ljk} + A^s_{jr} \overset{\circ}{R}{}^r_{lki} + A^s_{kr} \overset{\circ}{R}{}^r_{lij} = A^r_{il} \overset{\circ}{R}{}^s_{rjk} + A^r_{jl} \overset{\circ}{R}{}^s_{rki} + A^r_{kl} \overset{\circ}{R}{}^s_{rij} \tag{2.14'}$$

En utilisant (2.5′), de (2.14′) on a

$$(\delta^s_i \overset{\circ}{R}{}^r_{ljk} + \delta^s_j \overset{\circ}{R}{}^r_{lki} + \delta^s_k \overset{\circ}{R}{}^r_{lij})\pi_r + (g_{il} \overset{\circ}{R}{}^s_{rjk} + g_{jl} \overset{\circ}{R}{}^s_{rki} + g_{kl} \overset{\circ}{R}{}^s_{rij}\ \pi^r = 0 \tag{2.15}$$

En faisant $s = i$ dans (2.15) et en sommant il résulte:

$$\left\{(n-3)\overset{\circ}{R}_{rljk} + g_{kl} \overset{\circ}{R}_{rj} - g_{jl} \overset{\circ}{R}_{rk}\right\} \pi^r = 0, \tag{2.16}$$

où $\overset{\circ}{R}_{ij} = \overset{\circ}{R}{}^h_{ihj}$ sont les composantes du tenseur de Ricci. En multipliant les formules (2.16) par g^{il} et en sommant, il résulte:

$$(n-2)\overset{\circ}{R}_{rk}\ \pi^r = 0. \tag{2.17}$$

Puisque $n \geq 3$ et $\det(\overset{\circ}{R}_{rk}) \neq 0$, de (2.17) nous obtenons $\pi = 0$.

(vi) $\Rightarrow$ (i) Soient R^i_{jkl} les composantes de R. On a

$$(2.18)\qquad \begin{aligned} R^i_{jkl} =& \overset{\circ}{R}{}^i_{jkl} - \delta^i_k(\pi_{j,l} - \pi_j\pi_l) + \delta^i_l(\pi_{j,k} - \pi_j\pi_k) + \\ &+ g_{jk}g^{is}(\pi_{s,l} - \pi_s\pi_l) - g_{jl}g^{is}(\pi_{s,k} - \pi_s\pi_k) - \pi^s\pi_s(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}) \end{aligned}$$

En faisant $i = k$ et en sommant il en résulte

$$(2.19)\qquad R_{jl} = \overset{\circ}{R}_{jl} - (n-2)(\pi_{j,l} - \pi_j\pi_l) - (n-1)g_{jl}\pi_s\pi^s - g_{jl}g^{sr}(\pi_{s,r} - \pi_s\pi_r)$$

où $R_{jl} = R^i_{jil}$ sont les composantes de tenseur de Ricci de ∇. Puisque nous avons $R_{jl} = \overset{\circ}{R}_{jl}$, de (2.19) il résulte

$$(2.20)\qquad \pi_{j,l} - \pi_j\pi_l = \frac{1-n}{n-2}g_{jl}\pi^s\pi_s - \frac{1}{n-2}g_{jl}g^{rs}(\pi_{r,s} - \pi_r\pi_s)$$

En multipliant les formules (2.20) par g^{jl} et en sommant, il résulte

$$(2.21)\qquad g^{rs}(\pi_{r,s} - \pi_r\pi_s) = -\frac{n}{2}\pi^s\pi_s$$

De (2.20) et (2.21) on a

$$(2.22)\qquad 2(\pi_{j,l} - \pi_j\pi_l) + g_{jl}\pi^r\pi_r = 0$$

De (2.18) et (2.22) on obtient $R = \overset{\circ}{R}$, d'où on obtient immédiatement (i).

(vii) $\Rightarrow$ (i) Il est connu [7], [8] que tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{U}(M, \nabla - \overset{\circ}{\nabla})$ sont des champs 2-caractéristiques si et seulement s'il existe une 1-forme ω sur M t.q.

$$(2.23)\qquad A(X,Y) + A(Y,X) = \omega(X)Y + \omega(Y)X, \quad (\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

Pour $X = Y$ de (2.23) il résulte

$$(2.23')\qquad A(X,X) = \omega(X)X, \quad (\forall)X \in \mathcal{X}(M).$$

De (2.5) il résulte, pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, la relation

$$(2.5'')\qquad g(A(X,Y),Z) = \pi(Y)g(X,Z) - \pi(Z)g(X,Y)$$

Pour $Y = X$ de (2.5″) on a

$$(2.24)\qquad g(A(X,X),Z) = \pi(X)g(X,Z) - \pi(Z)g(X,X) \quad (\forall)X, Z \in \mathcal{X}(M).$$

De (2.23′) et (2.24) on obtient

$$(2.25)\qquad \omega(X)g(X,Z) = \pi(X)g(X,Z) - \pi(Z)g(X,X), \quad (\forall)X, Z \in \mathcal{X}(M).$$

De (2.25) il résulte

$$(2.25')\qquad \omega_p(X_p)g_p(X_p,Z_p) = \pi_p(X_p)g_p(X_p,Z_p) - \pi_p(Z_p)g_p(X_p,X_p),$$

$(\forall)p \in M$, $(\forall)Z_p \in T_pM$, où T_pM est l'espace tangent au point $p \in M$. Puisque $n \geq 3$, pour tout $p \in M$ et pour $Z_p \in T_pM \setminus \{0\}$ il existe un vecteur $X_p \in T_pZ \setminus \{0\}$ t.q.

$$g_p(X_p, X_p) \neq 0,\ g_p(Z_p, X_p) = 0 \tag{2.26}$$

De (2.25′) et (2.26) on a

$$\pi_p(Z_p) = 0,\ (\forall)p \in M,\ (\forall)Z_p \in T_pM \setminus \{0\}$$

d'où on obtient immédiatement $\pi = 0$.

(ix) $\Rightarrow$ (i) La démonstration est analogue avec (iv) $\Rightarrow$ (i).

(x) $\Rightarrow$ (i) La démonstration est analogue avec (vii) $\Rightarrow$ (i).

(xi) $\Rightarrow$ (i) Soit $\bar{R}$ le tenseur de courbure de $\overline{\nabla}$. Soit $\bar{T}$ le tenseur de torsion de $\overline{\nabla}$ et soit $\bar{A} = \overline{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$. On a

$$\bar{A}(X,Y) - \bar{A}(Y,X) = \bar{T}(X,Y) = \pi(X)Y - \pi(Y)X, (\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{2.27}$$

De $\bar{R} = \overset{\circ}{R}$ on obtient pour tout $X, Y, Z, V \in \mathcal{X}(M)$ la relation

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X \bar{R})(Y,Z,V) &= (\overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{R}(Y,Z,V) + \bar{A}(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) - \\ &- \overset{\circ}{R}(\bar{A}(X,Y),Z)V - \overset{\circ}{R}(Y,\bar{A}(X,Z))V - \overset{\circ}{R}(Y,Z)\bar{A}(X,V).\end{aligned} \tag{2.28}$$

En utilisant les idéntités de Bianchi et (2.28) on obtient

$$\begin{aligned}&\bar{R}(\bar{T}(X,Y),Z)V + \bar{R}(\bar{T}(Y,Z),X)V + \bar{R}(\bar{T}(Z,X),Y)V + \\ &+\bar{A}(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) + \bar{A}(Y, \overset{\circ}{R}(Z,X)V) + \bar{A}(Z, \overset{\circ}{R}(X,Y)V) - \\ &- \overset{\circ}{R}(Y,Z)\bar{A}(X,V) - \overset{\circ}{R}(Z,X)\bar{A}(Y,V) - \overset{\circ}{R}(X,Y)\bar{A}(Z,V) + \\ &+ \overset{\circ}{R}(X, \bar{A}(Y,Z) - \bar{A}(Z,Y))V + \overset{\circ}{R}(Y, \bar{A}(Z,X) - \bar{A}(X,Z))V + \\ &+ \overset{\circ}{R}(Z, \bar{A}(X,Y) - \bar{A}(Y,X))V\end{aligned} \tag{2.29}$$

De (2.29) et (2.27) il résulte

$$\begin{aligned}&2\pi(X)\{\bar{R}(Z,Y)V - \overset{\circ}{R}(Z,Y)V\} + \\ &+2\pi(Y)\{\bar{R}(X,Z)V - \overset{\circ}{R}(X,Z)V\} + \\ &+2\pi(Z)\{\bar{R}(Y,X)V - \overset{\circ}{R}(Y,X)V\} = \\ &= \bar{A}(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) + \bar{A}(Y, \overset{\circ}{R}(Z,X)V) + \bar{A}(Z, \overset{\circ}{R}(X,Y)V) - \\ &- \overset{\circ}{R}(Y,Z)\bar{A}(X,V) - \overset{\circ}{R}(Z,X)\bar{A}(Y,V) - \overset{\circ}{R}(X,Y)\bar{A}(Z,V)\end{aligned} \tag{2.30}$$

Puisque $\bar{R} = \overset{\circ}{R}$, de (2.30) on a:

$$\begin{aligned}&\bar{A}(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) + \bar{A}(Y, \overset{\circ}{R}(Z,X)V) + \bar{A}(Z, \overset{\circ}{R}(X,Y)V) = \\ &= \overset{\circ}{R}(Y,Z)\bar{A}(X,V) + \overset{\circ}{R}(Z,X)\bar{A}(Y,V) + \overset{\circ}{R}(X,Y)\bar{A}(Z,V)\end{aligned} \tag{2.31}$$

En coordonnées locales la relation (2.31) s'écrit:

$$\bar{A}^s_{ir} \overset{\circ}{R}{}^r_{ljk} + \bar{A}^s_{jr} \overset{\circ}{R}{}^r_{lki} + \bar{A}^s_{kr} \overset{\circ}{R}{}^r_{lij} = \bar{A}^r_{il} \overset{\circ}{R}{}^s_{rjk} + \bar{A}^r_{jl} \overset{\circ}{R}{}^s_{rki} + \bar{A}^r_{kl} \overset{\circ}{R}{}^s_{rij} \tag{2.31′}$$

En utilisant (2.31′) et (2.6′) on obtient

$$(g_{il}\overset{\circ}{R}{}^{s}_{rjk}+g_{jl}\overset{\circ}{R}{}^{s}_{rki}+g_{kl}\overset{\circ}{R}{}^{s}_{rij})\pi^{r}=0 \tag{2.32}$$

En multipliant les formules (2.32) par g^{il} et en sommant il en résulte

$$(n-2)\overset{\circ}{R}{}^{s}_{rjk}\,\pi^{r}=0 \tag{2.33}$$

En faisant $s=j$ et en sommant, de (2.33) on obtient

$$(n-2)\overset{\circ}{R}_{rk}\,\pi^{r}=0 \tag{2.34}$$

Puisque $n\geq 3$ et $\det(\overset{\circ}{R}_{rk})\neq 0$ de (2.34) il resulte $\pi=0$.

Remarque. Quelques propriétés de métriques des Riemann qui conduisent au même tenseur de courbure ont été mises en évidence par K. Teleman [11].

3 Quelques remarques sur la connexion symétrique $\tilde{\nabla}$ associée à une connexion π-semi-symétrique métrique ∇

Théorème 3.1. *Soit (M,g) une variété Riemann convexe à n dimensions $(n\geq 3)$ et soit $\pi\in\Lambda^{1}(M)$. Soit $\overset{\circ}{\nabla}$, resp. ∇, la connexion de Levi-Civita associée à g, resp. la connexion π-semi-symétrique métrique. Soit $\tilde{\nabla}$ la connexion symétrique associée à ∇. Soit $\overset{\circ}{R}$, resp. $\tilde{R}$ le tenseur de courbure de la connexion $\overset{\circ}{\nabla}$, resp. $\tilde{\nabla}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) $\pi=0$,
(ii) $\tilde{\nabla}=\overset{\circ}{\nabla}$,
(iii) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M,\tilde{\nabla}-\overset{\circ}{\nabla})$ *est associative*,
(iv) $\tilde{\nabla}$ *et* $\overset{\circ}{\nabla}$ *ont les mêmes géodésiques*
(v) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M,\tilde{\nabla}-\overset{\circ}{\nabla})$ *est un champ 2-caractéristique*,
(vi) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M,\tilde{\nabla}-\overset{\circ}{\nabla})$ *est un champ presque 1-principal*,
(vii) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M,\tilde{\nabla}-\overset{\circ}{\nabla})$ *est un champ presque 1-spécial*,
(viii) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M,\tilde{\nabla}-\overset{\circ}{\nabla})$ *est un champ 1-spécial*,
(ix) $\tilde{\nabla}_{X}\tilde{R}=\tilde{\nabla}_{X}\overset{\circ}{R}$, $(\forall)X\in\mathcal{X}(M)$, *lorsque Ric g este nondégénéré*,
(x) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M,\tilde{\nabla}-\nabla)$ *est commutative*,
(xi) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M,\tilde{\nabla}-\nabla)$ *est associative*,
(xii) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M,\tilde{\nabla}-\bar{\nabla})$ *est commutative*,
(xiii) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M,\tilde{\nabla}-\bar{\nabla})$ *est associative*,
(xiv) $\tilde{\nabla}=\nabla$
(xv) $\overline{\nabla}=\tilde{\nabla}$.

Démonstration. (i) ⇔ (ii), (i) ⇒ (iii), (i) ⇒ (iv), (i) ⇒ (v), (i) ⇒ (vi), (i) ⇒ (vii), (i) ⇔ (viii), (i) ⇒ (ix), (i) ⇔ (x), (i) ⇔ (xi), (i) ⇔ (xii), (i) ⇒ (xiii), (i) ⇔ (iv), (i) ⇔ (xv). Evidemment.

(iii) $\Rightarrow$ (i) L'algèbre $\mathcal{U}(M, \tilde{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla})$ est associative si et seulement si on a

$$\tilde{A}(X, \tilde{A}(Y,Z)) = \tilde{A}(Y, \tilde{A}(X,Z)), \quad (\forall) X, Y, Z \in \mathcal{X}(M) \tag{3.1}$$

De (2.9) et (3.1) on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(Y)\sigma(Z)X - \sigma(Z)\sigma(X)Y + g(Y,Z)\pi(X)P - g(X,Z)\pi(Y)P = \\ = \sigma(P)g(Y,Z) - \sigma(P)g(X,Z)Y \end{aligned} \tag{3.2}$$

En coordonnées locales, la relation (3.2) s'écrit:

$$\delta_i^r \sigma_j \sigma_k - \delta_j^r \sigma_i \sigma_k + g_{jk}\pi_i \pi^r - g_{ik}\pi_j\pi^r = \frac{1}{2}(g_{jk}\delta_i^r - g_{ik}\delta_j^r)\pi^s\pi_s$$

En faisant $r = i$ et en sommant ou obtient:

$$2(n-5)\sigma_j\sigma_k = (n-3)g_{jk}\pi^s\pi_s \tag{3.3}$$

En multipliant (3.3) par g^{jk} et en sommant il en résulte $\pi^s\pi_s = 0$, donc $\pi = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Il est connu [9], [12], [14], que les connexions linéaires $\overset{\circ}{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}$ ont les mêmes géodésiques si et seulement s'il existe une 1-forme $\theta \in \Lambda^1(M)$ t.q.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{3.4}$$

Soit $\tilde{A} = \tilde{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$. Pour $Y = X$ de (3.4) on a

$$\tilde{A}(X,X) = 2\theta(X)X, \quad (\forall) X \in \mathcal{X}(M). \tag{3.4$'$}$$

Pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, de (2.9) il résulte

$$g(\tilde{A}(X,Y),Z) = \sigma(X)g(Y,Z) + \sigma(Y)g(X,Z) - g(X,Y)\pi(Z) \tag{3.5}$$

Pour $Y = X$ de (3.5) on obtient

$$g(\tilde{A}(X,X),Z) = \pi(X)g(X,Z) - g(X,X)\pi(Z), \quad (\forall) X, Z \in \mathcal{X}(M) \tag{3.6}$$

De (3.4$'$) et (3.6) il résulte

$$(\pi - 2\theta)(X)g(X,Z) = g(X,X)\pi(Z), \quad (\forall) X, Z \in \mathcal{X}(M) \tag{3.7}$$

De (3.7) on a

$$(\pi_p - 2\theta_p)(X_p)g_p(X_p, Z_p) = g_p(X_p, X_p)\pi_p(Z_p), \quad (\forall) X_p, Z_p \in T_pM, \tag{3.8}$$

où T_pM est l'espace tangent au point $p \in M$. Puisque $n \geq 3$, pour tout $p \in M$ et pour $Z_p \in T_pM \setminus \{0\}$ il existe un vecteur $X_p \in T_pM \setminus \{0\}$ t.q.

$$g_p(X_p, Z_p) = 0, \quad g_p(X_p, X_p) \neq 0 \tag{3.9}$$

Alors de (3.8) et (3.9) il résulte

$$\pi_p(Z_p) = 0, \quad (\forall) p \in M, \quad (\forall) Z_p \in T_pM \setminus \{0\},$$

d'où on obtient immédiatement $\pi = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (i) Il est connu [7], [8] que tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{U}(M, \tilde{A})$ sont des champs 2-caractéristiques si et seulement s'il existe une 1-forme ω sur M t.q.

$$\tilde{A}(X,Y) = \omega(X)Y + \omega(Y)X, \quad (\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Dans ce qui suit la démonstration est analogue à (iv) $\Rightarrow$ (i)

(vi) $\Rightarrow$ (i) Il est connu [6] que tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{U}(M, \tilde{A})$ sont des champs presque 1-principaux si et seulement si il existent deux 1-formes $\omega, \eta \in \Lambda^1(M)$ t.q.

$$\tilde{A}(X,Y) = \omega(X)Y + \eta(Y)X, \quad (\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{3.10}$$

Puisque on a $\tilde{A}(X,Y) = \tilde{A}(Y,X)$, $(\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M)$ de (3.10) on obtient $\omega = \eta$. De (3.10) on a

$$\tilde{A}(X,Y) = \eta(X)Y + \eta(Y)X, \quad (\forall)X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Maintenant la démonstration est analogue à (iv) $\Rightarrow$ (i).

(vii) $\Rightarrow$ (i) Il est connu [6] que tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{U}(M, \tilde{A})$ sont des champs presque 1-spéciaux si et seulement s' il existe une 1-forme ω sur M t.q.

$$\tilde{A}(X,Z) = \omega(X)Z, \quad (\forall)X, Z \in \mathcal{X}(M) \tag{3.11}$$

Puisque nous avons $\tilde{A}(X,Z) = \tilde{A}(Z,X)$, $(\forall)X, Z \in \mathcal{X}(M)$, de (3.11) on obtient $\omega = 0$, donc $\tilde{A} = 0$, c'est-à-dire $\pi = 0$.

(ix) $\Rightarrow$ (i) Pour tout $X, Y, Z, V \in \mathcal{X}(M)$ on a

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \overset{\circ}{R})(Y,Z,V) &= (\overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{R})(Y,Z,V) + \tilde{A}(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) - \\ &- \overset{\circ}{R}(\tilde{A}(X,Y),Z)V - \overset{\circ}{R}(Y,\tilde{A}(X,Z))V - \overset{\circ}{R}(Y,Z)\tilde{A}(X,V)\end{aligned} \tag{3.12}$$

De (3.12) et (iii) on obtient

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \tilde{R})(Y,Z,V) &= (\overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{R})(Y,Z,V) + \tilde{A}(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) - \\ &- \overset{\circ}{R}(\tilde{A}(X,Y),Z)V - \overset{\circ}{R}(Y,\tilde{A}(X,Z))V - \overset{\circ}{R}(Y,Z)\tilde{A}(X,V)\end{aligned} \tag{3.13}$$

On écrit encore deux relations obtenues par substitution circulaires:

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_Y \tilde{R})(Z,X,V) &= (\overset{\circ}{\nabla}_Y \overset{\circ}{R})(Z,X,V) + \tilde{A}(Y, \overset{\circ}{R}(Z,X)V) - \\ &- \overset{\circ}{R}(\tilde{A}(Y,Z),X)V - \overset{\circ}{R}(Z,\tilde{A}(Y,X))V - \overset{\circ}{R}(Z,X)\tilde{A}(Y,V),\end{aligned} \tag{3.13$'$}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_Z \tilde{R})(X,Y,V) &= (\overset{\circ}{\nabla}_Z \overset{\circ}{R})(X,Y,V) + \tilde{A}(Z, \overset{\circ}{R}(X,Y)V) - \\ &- \overset{\circ}{R}(\tilde{A}(Z,X),Y)V - \overset{\circ}{R}(X,\tilde{A}(Z,Y))V - \overset{\circ}{R}(X,Y)\tilde{A}(Z,V)\end{aligned} \tag{3.13$''$}$$

En sommant les relations (3.13), (3.13$'$), (3.13$''$) et en utilisant les identités de Bianchi on obtient

$$\begin{aligned}&\tilde{A}(X, \overset{\circ}{R}(Y,Z)V) + \tilde{A}(Y, \overset{\circ}{R}(Z,X)V) + \tilde{A}(Z, \overset{\circ}{R}(X,Y)V) = \\ &= \overset{\circ}{R}(Y,Z)\tilde{A}(X,V) + \overset{\circ}{R}(Z,X)\tilde{A}(Y,V) + \overset{\circ}{R}(X,Y)\tilde{A}(Z,V)\end{aligned} \tag{3.14}$$

En coordonées locales la relation (3.14) s'écrit

$$\tilde{A}^l_{ir} \overset{\circ}{R}{}^r_{hjk} + \tilde{A}^l_{jr} \overset{\circ}{R}{}^r_{hki} + \tilde{A}^l_{kr} \overset{\circ}{R}{}^r_{hij} = \tilde{A}^r_{ih} \overset{\circ}{R}{}^l_{rjk} + \tilde{A}^r_{jh} \overset{\circ}{R}{}^l_{rki} + \tilde{A}^r_{kh} \overset{\circ}{R}{}^l_{rij} \tag{3.14$'$}$$

En utilisant (2.9′) et (3.14′) on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\delta^l_i \overset{\circ}{R}{}^r_{hjk} + \delta^l_j \overset{\circ}{R}{}^r_{hki} + \delta^l_k \overset{\circ}{R}{}^r_{hij}\right)\sigma_r + \\ &+2\left(g_{ih} \overset{\circ}{R}{}^l_{rjk} + g_{jh} \overset{\circ}{R}{}^l_{rki} + g_{kh} \overset{\circ}{R}{}^l_{rij}\right)\sigma^r = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

En multipliant les relations (3.15) par g^{ih} et en sommant, nous avons

$$\left\{\overset{\circ}{R}{}^l_{skj} + \delta^l_j \overset{\circ}{R}_{sk} - \delta^l_k \overset{\circ}{R}_{sj} + 2(n-2) \overset{\circ}{R}{}^l_{sjk}\right\}\sigma^s = 0 \tag{3.16}$$

où $\overset{\circ}{R}_{ij} = \overset{\circ}{R}{}^h_{ihj}$ sont les composantes de tenseur de Ricci. En faisant $l = k$ et en sommant, de (3.16) il en résulte

$$(n-2) \overset{\circ}{R}_{js} \sigma^s = 0 \tag{3.17}$$

Puisque $n \geq 3$ et $\det(\overset{\circ}{R}_{js}) \neq 0$, de (3.17) on obtient $\sigma = 0$, c'est-à-dire $\pi = 0$.

Remarque 3.2. Supposons dans la suite que la connexion symétrique $\tilde{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita associée à une autre métrique Riemann $\tilde{g}$ sur M. Soient π_i, g_{ij}, resp. $\tilde{g}_{ij}$ les composantes de π, g, resp. $\tilde{g}$ dans une système de coordonnées locales. Alors la relation (2.4) s'écrit:

$$\widetilde{|{}^{\,i}_{jk}|} = |{}^{\,i}_{jk}| + \frac{1}{2}\delta^i_j \pi_k + \frac{1}{2}\delta^i_k \pi_j - g_{jk}\pi^i \tag{3.18}$$

où $|{}^{\,i}_{jk}|$, $\widetilde{|{}^{\,i}_{jk}|}$ sont respectivement les symboles de Christoffel de deuxième espèce des métriques

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ij}dx^i dx^j \tag{3.19}$$

En faisant $i = j$ et en sommant de (3.18) on obtient

$$\frac{1}{2}(n-1)\pi_k = \widetilde{|{}^{\,i}_{ik}|} - |{}^{\,i}_{ik}| \tag{3.18$'$}$$

En plus nous avons

$$\widetilde{|{}^{\,i}_{ik}|} - |{}^{\,i}_{ik}| = \frac{\partial}{\partial x^k}\sqrt{\frac{\det(\tilde{g}_{ij})}{\det(g_{kr})}} \tag{3.18$''$}$$

De (3.18′) et (3.18″) il résulte que existe une fonction différentiable $u(x^1, \ldots, x^n)$ t.q.

$$\pi_k = \frac{\partial u}{\partial x^k}.$$

Si nous notons

$$\overset{\approx}{g}_{ij} = e^{2u} g_{ij}, \tag{3.20}$$

alors nous avons

$$\overset{\approx}{|^{i}_{jk}|} = |^{i}_{jk}| + \delta^i_j \pi_k + \delta^i_k \pi_j - g_{jk}\pi^i \tag{3.21}$$

où $\overset{\approx}{|^{i}_{jk}|}$ sont les symboles de Christoffel de deuxième espèce de la métrique

$$d\,\overset{\approx}{s}^2 = \overset{\approx}{g}_{ij}\, dx^i dx^j \tag{3.21'}$$

De (3.21) et (3.18) on obtient les formules

$$\tilde{|^{i}_{jk}|} = \overset{\approx}{|^{i}_{jk}|} - \frac{1}{2}\delta^i_j \pi_k - \frac{1}{2}\delta^i_k \pi_j \tag{3.22}$$

Les formules (3.22) nous montrent que les métriques de Riemann

$$d\,\overset{\approx}{s}^2 = \overset{\approx}{g}_{ij}\, dx^i dx^j, \quad d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j \tag{3.23}$$

sont en correspondance géodésique [15] . Donc les métriques (3.23) se réduisent aux formes canoniques de Levi-Civita et de Vrănceanu [4], [14] (suivant que l'espace de Riemann ayant la métrique $d\,\overset{\approx}{s}^2 = \overset{\approx}{g}_{ij}\, dx^i dx^j$ est de catégorie n ou de catégorie $m < n$):

$$\begin{aligned} dV^2 &= a_1(x^1) f'(x^1)(dx^1)^2 + \ldots + a_n(x^n) f'(x^n)(dx^n)^2, \\ dL^2 &= \tfrac{1}{x^1 \ldots x^n}\left\{ \tfrac{a_1(x^1) f'(x^1)}{x^1}(dx^1)^2 + \ldots + \tfrac{a_n(x^n) f'(x^n)}{x^n}(dx^n)^2 \right\}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

où nous avons posè $f(x) = (x - x^1)\ldots(x - x^n)$, ou:

$$\begin{aligned} dV^2 &= a_i(x^i) F'(x^i)(dx^i)^2 + F(c^2) c_{\lambda\mu}(x^{m+1}, \ldots, x^p) dx^\lambda dx^\mu + \\ &+ F(k^2) c_{\alpha'\beta'}(x^{p+1}, \ldots, x^n) dx^{\alpha'} dx^{\beta'}, \\ dL^2 &= \tfrac{1}{x^1 \ldots x^m}\left\{ \tfrac{a_i(x^i) F'(x^i)}{x^i}(dx^i)^2 + \tfrac{F(c^2)}{c^2} c_{\lambda\mu}(x^{m+1}, \ldots, x^p) dx^\lambda dx^\mu + \right. \\ &+ \left. \tfrac{F(k^2)}{k^2} c_{\alpha'\beta'}(x^{p+1}, \ldots, x^n) dx^{\alpha'} dx^{\beta'} \right\} \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $F(x) = (x - x^1)\ldots(x - x^m)$; $\quad 1 \le i \le m$; $m + 1 \le \lambda,\ \mu \le p$; $p + 1 \le \alpha', \beta' \le n$; $c^2, k^2 =$ des constantes non nulles.

Il en résulte que les métriques (3.19) peuvent être réduites aux formes canoniques:

$$ds^2 = e^{-2u(x^1,\ldots,x^n)} dV^2, \quad d\tilde{s}^2 = dL^2 \tag{3.26}$$

Nous aurons donc le théorème suivant:

Théorème 3.3. *Supposons que $\tilde{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita associée à une métrique Riemann $\tilde{g}$ sur M. Alors les métriques (3.19) peuvent être réduites aux* *formes canoniques (3.26), où* dV^2 *et* dL^2 *sont les formes canoniques de Levi-Civita et de Vrănceanu données par (3.24) ou (3.25) selon que l'équation*

$$\det(\tilde{g}_{ij} - r^2 g_{ij}) = 0$$

a des racines distinctes on a $m < n$ *racines égales.*

Remarque 3.4. Nous considérons maintenant la première formule (3.25) pour $c = k$. En multipliant les variables $x^1, \ldots, x^n$ par une même constante, on peut supposer que c est égale à l'unité. Il en résulte que la métrique dV^2 peut s'écrire sous la forme [15]

$$dV^2 = a_i(x^i)F'(x^i)(dx^i)^2 + F(1)c_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{3.27}$$

On obtient donc le théorème suivant:

Théorème 3.5. *Supposons que* $\tilde{\nabla}$ *est la connexion de Levi-Civita associée à une métrique Riemann* $\tilde{g}$ *sur* M*. Alors la métrique* $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ *peut être réduite a la forme canonique*

$$ds^2 = e^{-2u(x^1,\ldots,x^n)}dV^2$$

où dV^2 *est donnée par la première formule (3.24) ou par la formule (3.27) selon que l'équation*

$$\det(\tilde{g}_{ij} - r^2 g_{ij}) = 0,$$

a des racines distinctes ou a $m < n$ *racines égales.*

References

[1] I. Hirică, L. Nicolescu, S. Stupariu, *On conformally semi-symmetric connections*, An.Univ.Oradea, Fasc. Matem., Tom V (1995-1996), 119-134.

[2] I. Hirică, *On semi-symmetric connections on Weyl generalized manifolds*, An.Univ. Bucureşti (1997), 9-16.

[3] I. Hirică, *Notes on semi-symmetric connections on spaces endowed with Weyl f-structures*, General Math., vol.5 (1997), 191-198.

[4] T. Levi-Civita, *Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche*, Annali di Matematica (1890), serie 2, t24, 255-300.

[5] L. Nicolescu, *Courbes m-caractéristiques*, Tensor, N.S., Vol.24 (1985), 198-204.

[6] L. Nicolescu, *Sur les courbes presque m-principales associées à un champ tensoriel du type (1,2)*, An. Univ. Bucureşti (à paraitre).

[7] L. Nicolescu, C. Udrişte, *On the deformation algebra of two affine connections*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Mat. de la R.S.R. 21(69), 1-2(1977), 83-91.

[8] L. Nicolescu, M. Martin, *Sur l'algèbre associée à un champ tensoriel de type (1,2)*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 31, (1-2) (1978), 27-35.

[9] G. Pripoae, *Generalized Fermi-Walker transport*, Libertas Math. XIX (1999), 65-69.

[10] P. Stavre, *Capitole speciale de geometrie diferenţială. Varietăţi pseudo-riemanniene*, Ed. Radical, Craiova (2001).

[11] K. Teleman, *Asupra unei teoreme a lui Borel-Lichnerowicz*, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl. III, 1(1958), 107-115.

[12] C. Udrişte, *Linii de câmp*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1988.

[13] I. Vaisman, *Sur quelques formules du calcul de Ricci global*, Comm. Math. Helv., 41 (1966-1967), 73-87.

[14] Gh. Vrănceanu, *Sur la représentation géodésique des espaces de Riemann*, Revue de Math. Pures et Appliquées, Vol. I (1956), 121-145.

[15] Gh. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. I, II , Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, (1962, 1964).

[16] K. Yano, *On semi-symmetric metric connection*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 15 (1970), 1579-1586.

Liviu Nicolescu, Teodor Vasile Oprea
University of Bucharest, Faculty of Mathematics and Informatics
14 Academiei St., RO-010014, Bucharest, Romania
e-mail address: lnicol@geometry.math.unibuc.ro; doru@geometry.math.unibuc.ro