Une extension d'un théorème concernant les métriques pseudoriemanniennes conformes

Liviu Nicolescu

Abstract

Dans cette Note nous présentons une extension d'un théorème sur l'algèbre de déformation associée à une paire de métriques pseudo-riemanniennes conformes sur une variété différentiable (Théorème 1).

Mathematics Subject Classification: 53B20, 53B21.
Key words: algèbre de déformation, métriques conformes.

Les variétés différentiables, les applications différentiables, les champs tensoriels et les connexions linéaires qui interviennent dans la suite sont supposées de classe C^∞.

Soit M une variété différentiable à n dimensions. Désignons par $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles, différentiables définies sur M et par $\mathcal{T}_s^r(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs du type (r,s) sur M. Particulièrement, pour $\mathcal{T}_0^1(M)$ on emploie de même la notation $\mathcal{X}(M)$.

Soit $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$. Si on définit le produit de deux champs de vecteurs X et Y par la formule

(*) $$X \circ Y = A(X,Y),$$

alors le $\mathcal{F}(M)$-module $\mathcal{X}(M)$ devient une $\mathcal{F}(M)$-algèbre. L'algèbre définie par la formule $(*)$ s'appelle l'algèbre associée à A et on note $\mathcal{U}(M,A)$. Si $A = \bar{\nabla} - \nabla$, où ∇ et $\bar{\nabla}$ sont deux connexions linéaires sur M, alors $\mathcal{U}(M,A)$ s'appelle l'algèbre de déformation de la paire de connexions $(\nabla, \bar{\nabla})$ [8].

Définition ([4]). *Un élément $X \in \mathcal{U}(M,A)$ s'appelle champ presque principal s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(M)$ et une 1-forme ω sur t.q.*

(*') $$A(Z,X) = fZ + \omega(Z)X, \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M).$$

Remarque. i) Si $f=0$, alors $(*')$ nous montre que X est un champ principal.

ii) Si $\omega = 0$, alors $(*')$ nous montre que X est un champ presque spécial.

iii) Si $f=0$ et $\omega=0$, alors $(*')$ nous montre que X est un champ spécial.

iv) Si $A(X,X)=0$, alors X s'appelle champ 2-nilpotent.

Dans cette Note nous présentons le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit g et $\bar{g} = e^{2u}\ g(u \in \mathcal{F}(M))$ deux metriques pseudoriemanniennes conformes sur la variété différentiable connexe M ($\dim M = n > 3$). Notons par ∇, resp. $\bar{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à g, resp. $\bar{g}$. Soit $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$, resp.*

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.10, No.1, 2005, pp. 127-130.

$\bar{R} \in \mathcal{T}_3^1(M)$ *le champ tensoriel de courbure de* ∇, *resp.* $\bar{\nabla}$. *Soit* T_pM *l'espace tangent en chaque point* $p \in M$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) g *et* $\bar{g}$ *sont homothétiques,*

(ii) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ *est un champ presque principal,*

(iii) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ *est un champ principal,*

(iv) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ *est un champ presque spécial,*

(v) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ *est un champ spécial,*

(vi) *tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ *est un champ 2-nilpotent,*

(vii) ∇ *et* $\bar{\nabla}$ *possédent les mêmes géodésiques,*

(viii) *l'algèbre* $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ *est associative,*

(ix) $\bar{\nabla}_X R = \bar{\nabla}_X \bar{R}$, $(\forall) X \in \mathcal{X}(M)$, *lorsque l'application* $R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ *est une application surjective,* $(\forall)p \in M$.

(x) $R = \bar{R}$, *lorsque* $R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ *est une application surjective,* $(\forall)p \in M$

(xi) $Ric\, g = Ric\, \bar{g}$, *lorsque* $R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ *est une application surjective,* $(\forall)p \in M$.

Pour démontrer le théorème 1 on utilisera le lemme suivant:

Lemme 2. *Soit* g *et* $\bar{g} = e^{2u}\, g(u \in \mathcal{F}(M))$ *deux metriques pseudoriemanniennes conformes sur une variété différentiable connexe* M ($\dim M = n > 3$). *Notons par* ∇, *resp.* $\bar{\nabla}$ *la connexion de Levi-Civita associée à* g, *resp.* $\bar{g}$. *Soit* $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$, *resp.* $\bar{R} \in \mathcal{T}_3^1(M)$, *le champ tensoriel de courbure de* ∇, *resp.* $\bar{\nabla}$. *Soit* T_pM *l'espace tangent en chaque point* $p \in M$. *Supposons que* $R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ *est une application surjective,* $(\forall)p \in M$.

i) *Si* $\bar{\nabla}_X R = f \bar{\nabla}_X \bar{R}$, $(\forall) X \in \mathcal{X}(M)$, *où* $f \in \mathcal{F}(M)$, $f(p) \neq 0$, $(\forall)p \in M$, *alors* $u=$ *constante,*

ii) *Si* $R = \lambda \bar{R}$ *où* $\lambda =$ *constante* $\neq 0$, *alors* $u=$ *constante,*

iii) *Si* $Ric\, g = Ric\, \bar{g}$, *alors* $u=$ *constante.*

Démonstration du Lemme 2

i) De $\bar{\nabla}_X R = f \bar{\nabla}_X \bar{R}$, $(\forall) X \in \mathcal{X}(M)$ on a

$$(\bar{\nabla}_X R)(Y, Z, V) = f(\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z, V), \quad (\forall) X, Y, Z, V \in \mathcal{X}(M) \tag{1}$$

Pour tout $X, Y, Z, V \in \mathcal{X}(M)$ nous avons

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X R)(Y, Z, V) &= (\nabla_X R)(Y, Z, V) + A(X, R(Y, Z)V) - \\ &- R(A(X, Y), Z)V - R(Y, A(X, Z))V - R(Y, Z)A(X, V)\end{aligned} \tag{2}$$

où $A = \bar{\nabla} - \nabla$. De (1) et (2) on obtient

$$\begin{aligned}f(\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z, V) &= (\nabla_X R)(Y, Z, V) + A(X, R(Y, Z)V) - \\ &- R(A(X, Y), Z)V - R(Y, A(X, Z))V - R(Y, Z)A(X, V)\end{aligned} \tag{3}$$

On écrit aussi les deux relations obtenues par substitutions circulaires:

$$\begin{aligned}f(\bar{\nabla}_Y \bar{R})(Z, X, V) &= (\nabla_Y R)(Z, X, V) + A(Y, R(Z, X)V) - \\ &- R(A(Y, Z), X)V - R(Z, A(Y, X))V - R(Z, X)A(Y, V)\end{aligned} \tag{3'}$$

$$(3'')\qquad \begin{aligned} &f(\bar\nabla_Z\bar R)(X,Y,V)=(\nabla_Z R)(X,Y,V)+A(Z,R(X,Y)V)-\\ &-R(A(Z,X),Y)V-R(X,A(Z,Y))V-R(X,Y)A(Z,V)\end{aligned}$$

En tenant compte de (3), (3′), (3″) et en utilisant les identités de Bianchi:

$$(\nabla_X R)(Y,Z,V)+(\nabla_Y R)(Z,X,V)+(\nabla_Z R)(X,Y,V)=0,$$

$$(\bar\nabla_X\bar R)(Y,Z,V)+(\bar\nabla_Y\bar R)(Z,X,V)+(\bar\nabla_X\bar R)(Y,Z,V)=0$$

on obtient

$$(4)\qquad \begin{aligned} &R(X,Y)A(Z,V)+R(Y,Z)A(X,V)+R(Z,X)A(Y,V)=\\ &=A(X,R(Y,Z)V)+A(Y,R(Z,X)V)+A(Z,R(X,Y)V)\end{aligned}$$

Soient A^i_{jk}, R^i_{jkl}, resp. g_{ij} les composantes de A,R, resp. g dans un système de coordonnées locales $(x^1,\dots,x^n)$. En coordonnées locales, la relation (4) s'écrit

$$(4')\qquad A^s_{il}R^r_{sjk}+A^s_{jl}R^r_{ski}+A^s_{kl}R^r_{sij}-A^r_{is}R^s_{ljk}-A^r_{js}R^s_{lki}-A^r_{ks}R^s_{lij}=0$$

De $\bar g=e^{2u}g$ on obtient

$$(5)\qquad A^i_{jk}=\delta^i_j u_k+\delta^i_k u_j-g_{jk}u^i$$

où

$$u_i=\frac{\partial u}{\partial x^i},\quad u^i=g^{ij}u_j,\quad g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j.$$

De (4′) et (5) il résulte:

$$(6)\qquad (g_{il}R^r_{sjk}+g_{jl}R^r_{ski}+g_{kl}R^r_{sij})u^s+(\delta^r_i R^s_{ljk}+\delta^r_j R^s_{lki}+\delta^r_k R^s_{lij})u_s=0$$

En multipliant les formules (6) par g^{il} et en sommant, il résulte

$$(7)\qquad (n-2)R^r_{sjk}u^s+(g^{rl}R_{sljk}+\delta^r_j R_{sk}-\delta^r_k R_{sj})u^s=0$$

où $R_{ij}=R^r_{irj}$ sont les composantes du tenseur de Ricci de g. En faisant $r=j$ et en sommant, de (7) on obtient

$$(8)\qquad (n-2)R_{sk}u^s=0.$$

Puisque $n>3$, de (7) et (8) il résulte

$$(9)\qquad (n-3)R^r_{sjk}u^s=0$$

ou

$$(9')\qquad R^s_{ijk}u_s=0$$

Soit ω la 1-forme de composantes $u_1,u_2,\dots,u_n$. Alors (9′) s'écrit

$$(9'')\qquad \omega(R(X,Y)Z)=0,\quad (\forall)X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$$

De (9″), pour tout $p\in M$ on obtient

$$\omega_p(R_p(X_p, Y_p)Z_p) = 0, \quad (\forall)X_p, Y_p, Z_p \in T_pM. \tag{10}$$

Puisque l'application $R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ est une application surjective, $(\forall)p \in M$, il résulte que Im $R_p = T_pM$. De (10) on obtient

$$\omega_p(T_pM) = 0, \quad (\forall)p \in M \tag{10'}$$

c'est-à-dire $\omega_p = 0$, $(\forall)p \in M$, donc $\omega = 0$. Il résulte $u_i = 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ ce qui nous montre que $u =$ constante.

ii) De $R = \lambda\bar{R}$, il résulte $\bar{\nabla}_X R = \lambda\bar{\nabla}_X, \bar{R}$, $(\forall)X \in \mathcal{X}(M)$ et en utilisant i) nous obtenons $u =$ constante.

iii) Pour $\bar{g} = e^{2u}g$ on obtient

$$W(X, Y)Z = \bar{W}(X, Y)Z, \quad (\forall)X, Y, Z \in \mathcal{X}(M) \tag{11}$$

où W, resp. $\bar{W}$, est le tenseur conforme de Weyl [1], [2], [3] associé à g, resp. $\bar{g}$. Puisque g et $\bar{g}$ conduisent au même tenseur de Ricci de (11) on obtient $R = \bar{R}$, d'où on tire immédiatement $u =$ constante.

Démonstration du théorème 1

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii) $\Leftrightarrow$ (viii) Voir [5]

(i) $\Rightarrow$ (x) $\Rightarrow$ (xi), (i) $\Rightarrow$ (ix) Evidémment

(ix) $\Rightarrow$ (i), (x) $\Rightarrow$ (i), (xi) $\Rightarrow$ (i). On utilise le Lemme 2.

Remarque. Quelque propriétés des métriques de Riemann qui conduisent au même tenseur de courbure ont été mises en évidence par K. Teleman [6].

References

[1] M. Anastasiei, *Conformal structures on Banach vector bundles*, An. Şt. Univ. "Al.I.Cuza" Iaşi, Tomul XX s.I a, fasc 2 (1974), 351-358.

[2] Gh. Gheorghiev, R. Miron, D.Papuc, *Geometrie analitică şi diferenţială*, vol. II, E.D.P. Bucureşti, 1969.

[3] R.S. Kulkarni, *Curvature and metric*, Ann. of Math., 91, 2(1970), 311-331.

[4] L. Nicolescu, *Champs presque spéciaux dans l'algèbre de déformation*, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl. XXVI, 4(1981).

[5] L. Nicolescu, *Un théorème sur les métriques pseudoriemanniennes conformes*, An. Şt. Univ. "Al.I.Cuza" Iaşi, Tom XXIX s.I a, (1983), 65-70.

[6] K. Teleman, *Asupra unei teoreme a lui Borel-Lichnerowicz*, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl. III, 1(1958), 107-115.

[7] C. Udrişte, *Linii de câmp*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1988.

[8] I. Vaisman, *Sur quelques formules du calcul de Ricci global*, Comm. Math. Helvetici, 41 2(1966-1967), 73-89.

Liviu Nicolescu
University of Bucharest, Faculty of Mathematics and Informatics
14 Academiei St., RO 010014, Bucharest, Romania
e-mail address: lnicol@geometry.math.unibuc.ro