Connexions ayant la proprieté tensorielle associé à une transformation projectif quaternionique

Viorel Mihăilescu, Constantin Udrişte

Abstract

Un exemple classique de tenseur associé à une connexion affine Γ^i_{jk} sur l'espace projectif réel est le tenseur Π^i_{jk} du Thomas. Un tenseur analoque sur l'espace projectif complex est la tenseur M^i_{jk} du Vrănceanu [8].

Dans le présent article on fait une étude des transformations projectives quaternionique qui permettent d'associer à une connexion affine un champ tensoriel $Q^\alpha_{\beta\gamma}$. Le probleme a été proposé par Vrănceanu [8].

Dans la partie finale on montre qu'on peut considérer sur les variétés localement projectives complexes un champ tensoriel ayant comme composantes les coefficients M^i_{jk}, ainsi que Hangan [1-3] montre que sur les variétés localement projectives réels on peut considerer un champ tensoriel ayant comme composantes les coefficients Π^i_{jk} tensoriel ayant comme composantes les coefficients Π^i_{jk}.

Mathematics Subject Classification: 53B05, 53C05
Key Words: transformation projective quaternionique, equation Bortolotti-Vrănceanu-Hangan, tenseur Thomas-Vrănceanu-Hangan.

1 Derivées partielles de la transformation projectif quaternionique

Soit H le corps des quaternions et $D : a_l q^l + a \neq 0$, une ensemble ouvert de H^n. La transformation

$$(1) \qquad \mathcal{T} : \mathcal{D} \to \mathcal{H}^n, \; q^{h'} = (a^h_l q^l + a^h)(a_l q^l + a)^{-1}; \quad h, l = 1, 2, ..., n$$

où a^h_l, a^h, a_l, a sont des quaternions constantes, on appelée *transformation projectif quaternionique.*

Dans ce paragraphe nous remémorons quelques résultats établies par Marchiafava [4].

En différentiant l'égalité

$$q^{h'}(a_l q^l + a) = a^h_l q^l + a^h$$

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.3, No.1, 1998, pp. 53-59

nous obtenons que la différentille de la fonction $q^{h'}$ peut être mise sous la forme

$$dq^{h'} = A_l^h dq^l Q, \tag{2}$$

où

$$A_l^h = -q^{h'} a_l + A_l^h \tag{3}$$

$$Q = (a_l q^l + a)^{-1}. \tag{4}$$

En différentiant l'égalité (3) et tenant compte de(2), nous en trouverons

$$dA_l^h = -A_s^h dq^s Q a_l. \tag{5}$$

En différentiant l'égalité

$$(a_l q^l + a)Q = 1$$

nous obtenons

$$dQ = -Q a_l dq^l Q. \tag{6}$$

Dans ce qui suit, les indices latins $h, l, s, ...$ prennent les valeurs de 1 à n et les indices grecs $\alpha, \beta, ...$ de 1 à 4n.

Aussi, il sera utile de noter

$$e_{4h-3} = 1,\ e_{4h-2} = i,\ e_{4h-1} = j,\ e_{4h} = k;\ h = 1, 2, ..., n,$$

où $\{1, i, j, k\}$ est la base canonique du $\mathbf{R}^4$.

Si nous écrivons les variables quaternioniques apparaissant dans (1) sous la forme

$$q^k = x^{4h-3} + x^{4h-2} i + x^{4h-1} j + x^{4h} k \tag{7}$$

alors les egalitées (2), (5), (6) nous montrent que les derivées des fonctions $q^{h'}, A_s^h, Q$ par rapport aux variables réels x^α sont

$$\frac{\partial q^{h'}}{\partial x^\alpha} = A_l^h e_\alpha Q \tag{8}$$

$$\frac{\partial A_s^h}{\partial x^\alpha} = -A_l^h e_\alpha Q a_s \tag{9}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x^\alpha} = -Q a_l e_\alpha Q, \tag{10}$$

où $\alpha = 4l-3, 4l-2, 4l-1, 4l$.

De l'égalité (8) nous obtenous

$$A_l^h = \frac{\partial q^{h'}}{\partial x^{4l-3}} Q^{-1} \tag{11}$$

et aussi

$$\frac{\partial q^{h'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial q^{h'}}{\partial x^{4l-3}} Q^{-1} e_\alpha Q, \tag{12}$$

où $\alpha = 4l-2, 4l-1, 4l$.

2 Equations Bortolotti-Vrănceanu-Hangan satisfaites par les transformations projectives quaternioniques

Si nous écrivons les fonctions quaternioniques $q^{h'}$ definies par (1) sous les forme

$$q^{h'} = x^{4h'-3} + x^{4h'-2}i + x^{4h'-1}j + x^{4h'}k \tag{13}$$

et si nous introduissons leur derivées partielles par rapport aux variebles réels $x^{4l-3}, x^{4l-2}, x^{4l-1}, x^{4l}$ dans l'égalité (8), alors nous constaterons que pour $\alpha = 4h-3, 4h-2, 4h-1, 4h$ est vraie l'égalité

$$\bar{A}_l^h e_\alpha \bar{Q} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{4l-3}} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{4l-2}}i + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{4l-1}}j + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{4l}}k.$$

En prenant les conjuguées dans cette égalité et tenant compte de la formule (11) nous obtenons

$$\bar{e}_\alpha \frac{\partial q^{h'}}{\partial x^{4l-3}} = Q^{-1}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{4l-3}} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{4l-2}}i - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{4l-1}}j - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{4l}}k\right)Q. \tag{14}$$

En identifiant $\mathbf{R}^{4n} \equiv H^n$ par les formules (7), la transformation $\mathcal{T}$ peut s'écrire sous la forme

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, ..., x^{4n}); \quad \alpha' = 4h'-3, 4h'-2, 4h'-1, 4h'. \tag{1'}$$

Lemma 1. *Si* $\Delta = \left|\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right|$ *est le Jacobian de la transformation* $\mathcal{T}$*, alors nous avons*

$$\Delta = K\|Q\|^{4(n+1)}, \tag{15}$$

où K *este une constante réels.*

Démonstration. En effet, si tous les quaternions $a_1, a_2, ..., a_n$ sont nuls, alors l'égalité (15) est évidemment vraie. Si ces quaternions ne sont pas tout nuls, par exemple $a_1 \neq 0$, alors nous avons

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_\infty \circ \mathcal{T}_\in \circ \mathcal{T}_\ni,$$

où les transformations $\mathcal{T}_\infty, \mathcal{T}_\in, \mathcal{T}_\ni$ sont definies par les formules

$$\mathcal{T}_\infty : \amalg^{\langle'} = [\dashv^{\langle} - \dashv^{\langle}_\infty(\dashv_\infty)^{-\infty}\dashv]\amalg^\infty + [\dashv^{\langle}_{\updownarrow} - \dashv^{\langle}_\infty(\dashv_\infty)^{-\infty}\dashv_{\updownarrow}]\amalg^{\updownarrow} + \dashv^{\langle}_\infty(\dashv_\infty)^{-\infty}$$

$$\mathcal{T}_\in : \amalg^{\infty'} = (\amalg^\infty)^{-\infty},\ \amalg^{\langle'} = \amalg^{\langle}(\amalg^\infty)^{-\infty}$$

$$\mathcal{T}_\ni : \amalg^{\infty'} = \dashv_{\updownarrow}\amalg^{\updownarrow} + \dashv,\ \amalg^{\langle'} = \amalg^{\langle}.$$

Donc

$$\Delta = \Delta_1\Delta_2\Delta_3 \tag{16}$$

où $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont les Jacobiens des transformations $\mathcal{T}_\infty, \mathcal{T}_\in, \mathcal{T}_\ni$ calculées dans les points:

$$(\mathcal{T}_\in \circ \mathcal{T}_\ni)(\amalg^\infty, \amalg^\in, ..., \amalg^\backslash), \mathcal{T}_\ni(\amalg^\infty, \amalg^\in, ..., \amalg^\backslash), (\amalg^\infty, \amalg^\in, ..., \amalg^\backslash)$$

Les déterminants Δ_1 et Δ_3 sont constants et le Jacobien de la transformation $\mathcal{T}_\in$ est $\|q^1\|^{-4(n+1)}$. Parce que

$$\mathcal{T}_\ni(\amalg^\infty, \amalg^\in, ..., \amalg^\backslash) = (\mathcal{Q}^{-\infty}, \amalg^\in, ..., \amalg^\backslash)$$

il resulte que

$$\Delta_2 = \|Q\|^{4(n+1)}.$$

En posant $K = \Delta_1 \Delta_3$ dans les formule (16), nous obtenons (15). Si Δ ne s'annule pas, nous pouvons former les fonctions quaternionique

$$A_l = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x^{4l-3}} + \frac{\partial \Delta}{\partial x^{4l-2}} i + \frac{\partial \Delta}{\partial x^{4l-1}} j + \frac{\partial \Delta}{\partial x^{4l}} k\right). \tag{17}$$

En dérivant par rapport à $x^{4l-3}, x^{4l-2}, x^{4l-1}, x^{4l}$ l'égalité

$$\|Q\|^2 = Q \cdot \bar{Q}$$

et tenant compte de (10) et (15), la formule (17) s'écrit

$$A_l = -4(n+1)\overline{Qa_l}. \tag{17'}$$

En dérivant l'égalité (8) par rapport à x^β et utilisant les formules (9), (10), (12), (17') nous demonstrons le

Lemma 2. *Les composantes $q^{h'}$ de la transformation $\mathcal{T}$ satisfont les equations aux derivées partielles suivantes:*

$$\frac{\partial^2 q^{h'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{1}{4(4+1)}\left(\frac{\partial q^{h'}}{\partial x^{4l-3}} Q^{-1} e_\alpha \bar{A}_s e_\beta Q + \frac{\partial q^{h'}}{\partial x^{4s-3}} Q^{-1} e_\beta \bar{A}_l e_\alpha Q\right), \tag{18}$$

où

$$\alpha = 4l-3, 4l-2, 4l-1, 4l \quad \text{et} \quad \beta = 4s-3, 4s-2, 4s-1, 4s.$$

3 Le tenseur Thomas-Vrănceanu-Hangan associé à une transformation projectifs quaternionique

Soit V_{4n} une variété differentiable de dimension $4n$. Nous pouvons introduire dans chaque voisinage des coordonnées (x^α) les coordonnées quaternioniques (q^h) definies par (7).

Si nous pouvons recouvrir la variété V_{4n} par un systeme de voisinages de coordonnées de sort que dans l'intersection des deux voisinages de coordonnées quaternioniques (q^h) et $(q^{h'})$ les coordonnées d'un même point soient liées par des formules de la forme (1) et les formules ($1'$) qui relient les coordonées réels (x^α) $(x^{\alpha'})$ satisfassent la condition

$$\Delta = \left|\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right| \neq 0$$

alors nous dirons que V_{4n} est un variété *localement projectif quaternionique.*

L'espace projectif quaternionique $P_n(H)$ est une variété de ce type, il pouvant être recouvert par $(n+1)$ voisinages de coordonnées, où les formules de passage ont la forme

$$q^{1'} = (q^1)^{-1}, \quad q^{h'} = q^h(q^1)^{-1}.$$

Soit $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, $\Gamma^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}$ les coefficients d'une connexion affine symétrique dans les voisinages de coordonnées $(q^h), (q^{h'})$ et $\Gamma_\beta = \Gamma^\alpha_{\alpha,\beta}$, $\Gamma_{\beta'} = \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'\beta'}$ les coefficients de la connexion contractée. Si dans les points communs de ces voisinages considerons les formules ($1'$), alors entre ces coefficients nous avons les relations suivantes

$$\frac{\partial^2 x^{\gamma'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \Gamma^{\gamma'}_{\lambda'\eta'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda} \tag{19}$$

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial x^\alpha} = \Gamma_{\lambda'}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha. \tag{20}$$

Attachons aux coefficients $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_\beta$ les quaternions

.(21)
$$\Sigma^h_{\alpha\beta} = \Gamma^{4h-3}_{\alpha\beta} + \Gamma^{4h-2}_{\alpha\beta} i + \Gamma^{4h-1}_{\alpha\beta} j + \Gamma^{4h}_{\alpha\beta} k$$
$$\Sigma_h = \Gamma_{4h-3} + \Gamma_{4h-2} i + \Gamma_{4h-1} j + \Gamma_{4h} k$$

En posant $\gamma = 4h-3, 4h-2, 4h-1, 4h$ dans la formule (19) nous obtenons

$$\frac{\partial^2 q^{h'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \Sigma^{h'}_{\lambda'\eta'}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\beta} - \Sigma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial q^{h'}}{\partial x^\lambda}$$

Si dans cette égalité considerons $\alpha = 4l-3, 4l-2, 4l-1, 4l$ et $\beta = 4s-3, 4s-2, 4s-1, 4s$ et tenons compte des formules (17), (18), (20), alors nous pouvons écrire

$$\Sigma^{h'}_{\lambda'\eta'}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\beta} - \frac{1}{4(n+1)}\left(\frac{\partial q^{h'}}{\partial x^{4l-3}}Q^{-1}e_\alpha Q\overline{\Sigma}_{t'}\frac{\partial q^{t'}}{\partial x^{4s-3}}Q^{-1}e_\beta Q + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial q^{h'}}{\partial x^{4s-3}}Q^{-1}e_\beta Q\overline{\Sigma}_{t'}\frac{\partial q^{t'}}{\partial x^{4l-3}}Q^{-1}e_\alpha Q + \right) = \tag{22}$$

$$= \frac{\partial q^{h'}}{\partial x^{4t-3}}Q^{-1}\left(\Sigma^t_{\alpha\beta} - \frac{1}{4(n+1)}\delta^t_l e_\alpha \overline{\Sigma}_s e_\beta - \frac{1}{4(n+1)}\delta^t_s e_\beta \overline{\Sigma}_l e_\alpha\right) Q.$$

Nous associons aux quaternions $\Sigma^h_{\alpha\beta}, \Sigma_h$ les quaternions

$$\Pi^h_{\alpha\beta} = \Sigma^h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4(n+1)}\delta^h_l e_\alpha \overline{\Sigma}_s e_\beta - \frac{1}{4(n+1)}\delta^h_s e_\beta \overline{\Sigma}_l e_\alpha \tag{23}$$

et aux quaternions $\Sigma^{h'}_{\alpha'\beta'}, \Sigma_{h'}$ des quaternions analogues.

Soit

$$\Pi^h_{\alpha\beta} = Q^{4h-3}_{\alpha\beta} + Q^{4h-2}_{\alpha\beta} i + Q^{4h-1}_{\alpha\beta} j + Q^{4h}_{\alpha\beta} k.$$

En tenant compte de la formule (14), l'égalité (2.2) prend la forme

$$\Pi^{h'}_{\lambda'\eta'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\beta} = Q^\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial q^{h'}}{\partial x^\lambda}$$

qui est équivalent à

$$Q^{\gamma'}_{\lambda'\eta'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\beta} = Q^\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial q^{\gamma'}}{\partial x^\lambda}.$$

Nous avons donc le

Théorème 1. *Si $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ est une connexion affine symétrique, alors les composantes $Q^\gamma_{\alpha\beta}$ des quaternions $\Pi^h_{\alpha\beta}$ (23) constituent un tenseur du troisème ordre, covariant en α, β et contravariant en γ, sur V_{4n}.*

En tenant compte des égalitées (21) et (23), nous observons que $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ peut s'exprimer par $Q^\gamma_{\alpha\beta}$ et Γ_β. Par conséquent, le problème proposé par Vrănceanu [8] d'établir si une connexion affine symétrique sur l'espace projectif quaternionique se décompose en sa connexion contractée et un tenseur est résolu. Une autre solution de ce problème est donnée par Hangan [2].

4 Le tenseur Thomas-Vrănceanu associé à une transformation projectif complexe

Si nous faisons pour les transformations projectives complexes une étude similaire à celle des transformations projectives quaternioniques, alors nous constateron qu'on lieu des relations (14) nous trouvons les conditions de Cauchy-Riemann et les relations (18) deviennent les équations aux dérivées partielles d'ordre deux établies par Vrănceanu [8] pour les transformations du groupe projectiv complexe.

Nous avons donc le

Théorème 2. *Si Γ^i_{jk} est une connexion affine symetrique sur une variété V_{2n} localement projectiv complexe, alors les coefficients M^i_{jk} du Vrănceanu [8] constituent un tenseur du troisème ordre, covariant en j, k et contravariant en i, sur V_{2n}.*

Acknowledgements. A version of this paper was presented at the First Conference of Balkan Society of Geometers, Politehnica University of Bucharest, September 23-27, 1996.

References

[1] T.Hangan, *Equations aux derivées partielles satisfaites par les transformations du groupe projectif au conforme*, An. Univ. Bucureşti, Şt. Nat. 7, 19(1958), 33-37.

[2] T.Hangan, *Tenseurs associés aux connexions sur certains espaces homogènes*, Bull. Math. de la Soc. Scient. Math. Phys., 8(56), 1-2(1964), 39-49.

[3] T.Hangan, *Pseudogrupul proiectiv grassmanian*, An. Şt. Univ. Iaşi, (1965), 349-356.

[4] S.Marchiafava, *Sulle varietà a struttura quaternionale generalizzata*, Rend. di Mat (VI), 3,3 (1970), 529-545.

[5] V.Mihăilescu, *Partial differentiable equations satisfied by quaternionic projective transformation*, Sci. Bull. UPB, Series D55, 1-2 (1993), 21-29.

[6] C.Udrişte, *Projections on tensors and connections*, manuscript (1975).

[7] C.Udrişte, I.Hirică, *Family of projective projections on tensors and connections*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 2,2(1997), 139-156.

[8] Gh.Vrănceanu, *Connexions associées aux groupes fondamentaux*, Revue de Math. Pures et Apliquées, 3(1958), 29-50.

University Politehnica of Bucharest
Department of Mathematics I
Splaiul Independenţei 313
77206 Bucharest, Romania
e-mail:udriste@mathem.pub.ro