

La construction de quelque fonction par des moments donnés

Janina Mihaela Mihăilă, Octav Olteanu and Constantin Udriște

Résumé. Cette oeuvre continue notre note de [13] concernant la construction de la solution h d'un problème de type Markov sur l'ellipse, en connaissant les moments de la fonction h par rapport à la mesure définie de l'élément d'arc ds sur l'ellipse. Dans cette note nous solutionnons un problème de construction: c'est-à-dire la construction de la solution d'un problème des moments en utilisant seulement les moments donnés de la fonction repective. Le théorème 2.1 donne une méthode naturelle de construire une fonction analytique $f = f_1 + if_2$ dans un disque centré en l'origine $D(0; R)$, en connaissant les moments

$$m_{(k,l)}(f) := \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^l f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (k, l) \in \mathbf{Z}_+^2,$$

comme intégrales doubles sur $\overline{D}(0, R_1) \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue 2 - dimensionnelle réelle ($0 < R_1 < R$).

M.S.C. 2000: 28A20, 42A16, 30A05, 30B10, 30E05.

Key words: fonction analytique, le problème des moments.

1 Deux méthodes de construction de quelques fonctions par des moments donnés

Dans notre note [13] on résolut un problème de construction; c'est-à-dire la construction de la solution h d'un problème de type Markov sur l'ellipse, en connaissant les moments de la fonction h par rapport à la mesure définie de l'élément d'arc ds sur l'ellipse. Il s'agit de la construction d'une fonction borelienne h , en connaissant seulement les moments d'ordre (j_1, j_2)

$$(1.1) \quad y_{(j_1, j_2)} = \int_{K_E} t_1^{j_1} t_2^{j_2} h(t_1, t_2) ds, \quad \forall (j_1, j_2) \in \mathbf{Z}_+^2,$$

où nous supposons

$$(1.2) \quad 0 \leq h(t_1, t_2) \leq 1 \quad ds - \text{p.p.t. sur l'ellipse}$$

$$K_E = \left\{ (t_1, t_2); \frac{t_1^2}{a^2} + \frac{t_2^2}{b^2} = 1 \right\}, \quad (a, b > 0),$$

ds étant l'élément d'arc sur l'ellipse.

Le théorème 2.5 de [13] donne le schéma de la construction d'une solution h d'un problème classique de type Markov des moments, sur l'ellipse K_E .

Soit donnée une suite doublement indexée des moments $\{y_{(j_1, j_2)}; (j_1, j_2) \in \mathbf{Z}_+^2\} \subset \mathbf{R}$; on considère les problèmes suivants.

(P₁) Le problème d'existence d'une solution h .

On met le problème d'existence d'une fonction h , mesurable Borel sur l'ellipse K_E , de manière que les relations (1.1) et (1.2) soient accomplies.

Le problème (P₁) est résolu dans un contexte plus général dans le Corollaire 2.3 de [14].

(P₂) Le problème d'unicité de la solution.

Dans le cas d'existence d'une solution h , quelles sont les conditions qui réalisent l'unicité ("modulo" $ds - \text{p.p.t.}$)?

Le problème (P₂) est clair: la solutions est unique parce que l'espace des fonctions polynomiales sur l'ellipse K_E est dense dans $C(K_E)$. Donc, il s'agit d'un problème déterminé des moments.

(P₃) Le problème de la construction de la solution h .

Dans le cas d'existence d'une solution h , comment on peut la déterminer?

Dans notre note [13] nous avons présenté l'esquisse d'une réponse possible pour le problème (P₃).

Théorème 1.1 (Théorème 2.5 [13]). *Soit donnée une suite doublement indexée des moments $\{y_{(j_1, j_2)}; (j_1, j_2) \in \mathbf{Z}_+^2\} \subset \mathbf{R}$ et soit h une fonction borelienne sur l'ellipse*

$$K_E = \left\{ (t_1, t_2); \frac{t_1^2}{a^2} + \frac{t_2^2}{b^2} = 1 \right\}, \quad (a, b > 0),$$

de manière que les relations suivantes

$$\int_{K_E} t_1^{j_1} t_2^{j_2} h(t_1, t_2) ds = y_{(j_1, j_2)}, \quad \forall (j_1, j_2) \in \mathbf{Z}_+^2,$$

$$0 \leq h(t_1, t_2) \leq 1 \quad ds - \text{p.p.t. sur } K_E$$

soient accomplies. Nous notons

$$\varphi(\theta) := h(a \cos \theta, b \sin \theta)(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/2}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Alors,

$$h(a \cos \theta, b \sin \theta) = \frac{\varphi(\theta)}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

où φ est la limite ponctuelle $d\theta$ - p.p.t. d'une sous-suite de la suite des sommes partielles de la série de Fourier attachée à φ dans l'espace $L^2([-\pi, \pi])$:

$$(1.3) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)],$$

avec a_n et b_n donnés par les relations

$$(1.4) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} y_{(0,0)}, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \left[\frac{y_{(n,0)}}{a^n} - C_n^2 \frac{y_{(n-2,2)}}{a^{n-2}b^2} + \dots + \right. \\ \left. + \dots + (-1)^k C_n^{2k} \frac{y_{(n-2k,2k)}}{a^{n-2k}b^{2k}} + \dots \right] \text{ (somme finie), } n \in \mathbf{Z}, n \geq 1, \end{cases}$$

$$(1.5) \quad \begin{cases} b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \sin(n\theta) d\theta = \\ = \frac{1}{\pi} \left[C_n^1 \frac{y_{(n-1,1)}}{a^{n-1}b} - C_n^3 \frac{y_{(n-3,3)}}{a^{n-3}b^3} + \dots + \right. \\ \left. + (-1)^k C_n^{2k+1} \frac{y_{(n-2k-1,2k+1)}}{a^{n-2k-1}b^{2k+1}} + \dots \right] \\ \text{ (somme finie), } n \in \mathbf{Z}, n \geq 1. \end{cases}$$

Une conclusion plus forte que la première est la suivante:

φ est: "la somme" de la série de Fourier associée, mais la convergence est valable seulement dans l'espace $L^2([-\pi, \pi])$, où a_n et b_n sont donnés par les relations (1.4) et (1.5). Ainsi, φ et donc h , peuvent être exprimées seulement à l'aide des momentes $y_{(j_1, j_2)}$, $(j_1, j_2) \in \mathbf{Z}_+^2$.

La fonction h "s'exprime" ds - p.p.t. sur l'ellipse K_E .

Maintenant, on construit une fonction $f = f_1 + if_2 : D(0; R) \rightarrow \mathbf{C}$, analytique dans le disque ouvert centré en l'origine, $D(0; R)$, de rayon R , en partant dès moments d'ordre (k, l)

$$m_{(k,l)}(f) := \iint_{\overline{D}(0; R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^l f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad \forall (k, l) \in \mathbf{Z}_+^2,$$

où $0 < R_1 < R$, et $\overline{D}(0; R_1)$ est le disque fermé de rayon R_1 centré en l'origine, $\overline{D}(0; R_1) = \{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \leq R_1^2\}$.

2 La construction d'une fonction analytique par des moments donnés

Dans ce paragraphe on résout encore un problème de construction, mais cette fois concernant une fonction analytique, en connaissant les moments d'ordre $(k, l) \in \mathbf{Z}_+^2$.

Soit la fonction $f = f_1 + if_2 : D(0; R) \rightarrow \mathbf{C}$, analytique dans le disque ouvert centré en l'origine de rayon R , $D(0; R)$. Supposons que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad |z| < R.$$

Nous fixons un disque fermé centré en l'origine de rayon $R_1 < R$,

$$\overline{D}(0; R_1) = \{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \leq R_1^2\}.$$

Nous supposons donnés les moments d'ordre $(k, l) \in \mathbf{Z}_+^2$:

$$(2.1) \quad m_{(k,l)}(f) := \iint_{\overline{D}(0; R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^l f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (\zeta_1, \zeta_2 \text{ nombres réels}).$$

Il se pose le problème de connaître la fonction f dans le disque $D(0; R)$, ce que, en vertu de l'égalité,

$$(2.2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \forall z \in D(0; R) \supset \overline{D}(0; R_1), \quad R_1 < R,$$

on revient à trouver les coefficients $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour $n \in \mathbf{Z}_+$, par rapport aux moments $m_{(k,l)}(f)$, d'ordre $(k, l) \in \mathbf{Z}_+^2$.

Ce problème est résolu dans le théorème suivant, dont la démonstration se base en principal sur la formule de Cauchy, qui conduit à

$$(2.3) \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(0; R_1)} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 + i\zeta_2)^{n+1}} (d\zeta_1 + id\zeta_2)$$

et sur la formule de Green, appliquée aux parties réelle et imaginaire d'intégrand qui se trouve dans la relation (2.3).

Ainsi, les calculs font le passage dès intégrales sur le cercle $\partial \overline{D}(0; R_1)$, aux intégrales doubles sur le disque fermé $\overline{D}(0; R_1)$, qui conduisent aux moments donnés $m_{(k,l)}(f)$, d'ordre $(k, l) \in \mathbf{Z}_+^2$, définis par la relation (2.1).

Théorème 2.1 *Dans les conditions antérieures, pour $\forall n \in \mathbf{Z}_+$, nous avons*

$$(2.4) \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i R_1^{2(n+1)}}.$$

$$\cdot \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k i^k [-km_{(n+1-k,k-1)}(f) + i(n+1-k) \cdot m_{(n-k,k)}(f)] \right\}.$$

où les moments $m_{(k,l)}(f)$, d'ordre $(k,l) \in \mathbf{Z}_+^2$, sont donnés par la relation (2.1).

Démonstration. En utilisant la relation (2.3) et en réalisant les calculs, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\bar{D}(0,R_1)} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 + i\zeta_2)^{n+1}} (d\zeta_1 + id\zeta_2) \\ &= \frac{1}{2\pi i R_1^{2(n+1)}} \int_{\partial\bar{D}(0,R_1)} f(\zeta_1, \zeta_2) (\zeta_1 - i\zeta_2)^{n+1} (d\zeta_1 + id\zeta_2) \\ &= \frac{1}{2\pi i R_1^{2(n+1)}} \int_{\partial\bar{D}(0,R_1)} f(\zeta_1, \zeta_2) \left[\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \zeta_1^{n+1-k} (-1)^k i^k \zeta_2^k \right] (d\zeta_1 + id\zeta_2) \\ (2.5) \quad &= \frac{1}{2\pi i R_1^{2(n+1)}} \left[\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k i^k \int_{\partial\bar{D}(0,R_1)} \zeta_1^{n+1-k} \zeta_2^k f(\zeta_1, \zeta_2) (d\zeta_1 + id\zeta_2) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i R_1^{2(n+1)}} \left[\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k i^k I_{n+1-k,k} \right], \end{aligned}$$

où, pour $(k,l) \in \mathbf{Z}_+^2$, nous avons noté

$$I_{k,l}(f) = \int_{\partial\bar{D}(0,R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^l f(\zeta_1, \zeta_2) (d\zeta_1 + id\zeta_2).$$

Il reste donc d'exprimer les intégrales $I_{n+1-k,k}$, par rapport aux moments $m_{(k,l)}$, d'ordre $(k,l) \in \mathbf{Z}_+^2$.

En utilisant la définition de $I_{k,l}$, nous calculons

$$\begin{aligned} I_{k,l}(f) &= \int_{\partial\bar{D}(0,R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^l f(\zeta_1, \zeta_2) (d\zeta_1 + id\zeta_2) = \\ &= \int_{\partial\bar{D}(0,R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^l [f_1(\zeta_1, \zeta_2) + if_2(\zeta_1, \zeta_2)] (d\zeta_1 + id\zeta_2) = \\ &= \int_{\partial\bar{D}(0,R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^l (f_1 d\zeta_1 - f_2 d\zeta_2) + i \int_{\partial\bar{D}(0,R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^l (f_2 d\zeta_1 + f_1 d\zeta_2). \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{k,l}(f) &= \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_1} (-f_2 \zeta_1^k \zeta_2^l) - \frac{\partial}{\partial \zeta_2} (f_1 \zeta_1^k \zeta_2^l) \right] d\zeta_1 d\zeta_2 + \\
&+ i \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_1} (f_1 \zeta_1^k \zeta_2^l) - \frac{\partial}{\partial \zeta_2} (f_2 \zeta_1^k \zeta_2^l) \right] d\zeta_1 d\zeta_2.
\end{aligned}$$

En dérivant dans l'égalité antérieure, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{k,l}(f) &= \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \left[-f_2 k \zeta_1^{k-1} \zeta_2^l - f_1 l \zeta_1^k \zeta_2^{l-1} - \zeta_1^k \zeta_2^l \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_1} - \zeta_1^k \zeta_2^l \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&+ i \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \left[f_1 k \zeta_1^{k-1} \zeta_2^l - f_2 l \zeta_1^k \zeta_2^{l-1} + \zeta_1^k \zeta_2^l \left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \right) \right] d\zeta_1 d\zeta_2.
\end{aligned}$$

En conformité aux conditions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial \zeta_1},$$

les expressions précédentes se récrivent, après les simplifications respectives, sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
I_{k,l}(f) &= \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \left[-k \zeta_1^{k-1} \zeta_2^l f_2(\zeta_1, \zeta_2) - l \zeta_1^k \zeta_2^{l-1} f_1(\zeta_1, \zeta_2) \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&+ i \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \left[k \zeta_1^{k-1} \zeta_2^l f_1(\zeta_1, \zeta_2) - l \zeta_1^k \zeta_2^{l-1} f_2(\zeta_1, \zeta_2) \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= ik \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \zeta_1^{k-1} \zeta_2^l [f_1(\zeta_1, \zeta_2) + i f_2(\zeta_1, \zeta_2)] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&- l \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^{l-1} [f_1(\zeta_1, \zeta_2) + i f_2(\zeta_1, \zeta_2)] d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= ik \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \zeta_1^{k-1} \zeta_2^l f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&- l \iint_{\overline{D}(0,R_1)} \zeta_1^k \zeta_2^{l-1} f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \\
&= ik \cdot m_{(k-1,l)} - l \cdot m_{(k,l-1)}.
\end{aligned}$$

En conclusion, pour une fonction analytique on obtient la relation suivante

$$(2.6) \quad I_{k,l}(f) = -l \cdot m_{(k,l-1)}(f) + ik \cdot m_{(k-1,l)}(f).$$

Enfin, en remplaçant $I_{n+1-k,k}$, données par la relation (2.6), dans l'expression de $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ de la relation (2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{1}{2\pi i R_1^{2(n+1)}} \left[\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k i^k I_{n+1-k,k}(f) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i R_1^{2(n+1)}} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k i^k [-k m_{(n+1-k,k-1)}(f) \right. \\
&\quad \left. + i(n+1-k) \cdot m_{(n-k,k)}(f) \right\}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.
\end{aligned}$$

Ainsi, on connaît l'expression des coefficients de la série de Taylor, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour $n \in \mathbf{Z}_+$, par rapport aux moments, et donc on connaît la fonction analytique f , $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, par rapport aux moments (et aux pouvoirs de z , $\forall z \in D(0, R)$.)

Remarque 2.1 Si $f^{(n)}(0) \in \mathbf{R}$ pour $\forall n \in \mathbf{Z}_+$

$$(\Leftrightarrow f(x) \in \mathbf{R} \text{ pour } \forall x \in D(0, R) \cap \mathbf{R}),$$

alors la partie réelle de l'expression du membre droit de la relation (2.7) est $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, mais la partie imaginaire est nulle. Donc, on présente de l'intérêt la séparation des parties réelle et imaginaire dans la dernière expression de la relation (2.7).

Remarque 2.2 En partant d'une fonction analytique pareille, connue, et en utilisant les égalités (2.7) pour $\forall n \in \mathbf{Z}_+$, on obtient un système (avec une infinité d'équations et d'inconnues); les inconnues sont les moments $m_{(k,l)}$ d'ordre $(k, l) \in \mathbf{Z}_+^2$.

3 Exemples

Ce paragraphe contient deux catégories d'exemples pour lesquelles on peut appliquer la méthode antérieure.

3.1 Des fonctions élémentaires définies autour de l'origine comme des sommes des séries des pouvoirs avec le rayon de convergence $R = \infty$, pour lesquelles on peut appliquer le théorème 2.1, pour n'importe quel $R_1 > 0$:

$$\begin{aligned}
f_1(z) = \exp z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \\
f_2(z) = \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\
f_3(z) = \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};
\end{aligned}$$

$$f_4(z) = \operatorname{sh} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$f_5(z) = \operatorname{ch} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

3.2 Des fonctions définies autour de l'origine par des séries des pouvoirs avec $R = 1$, pour lesquelles on peut appliquer le théorème 2.1, avec $R_1 < 1$:

$$f_6(z) = (1+z)^\alpha := 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}z^k + \dots, \quad \text{pour } |z| < 1 \quad (\text{donc } R = 1);$$

$$f_7(z) = \ln(1+z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad \text{pour } |z| < 1;$$

$$f_8(z) = \ln \frac{1+z}{1-z} := 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right), \quad \text{pour } |z| < 1;$$

$$f_9(z) = \operatorname{arctg} z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{pour } |z| < 1;$$

$$f_{10}(z) = \operatorname{arcsin} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{pour } |z| < 1.$$

Pour les fonctions f_6, \dots, f_{10} , les rayons de convergence des séries des pouvoirs du membre droit sont égaux à 1, ce qui justifie la condition $R_1 < 1$.

En présent, la recherche se dirige aussi vers l'utilisation d'un nombre réduit des moments d'une fonction de répartition, pour obtenir plus d'informations sur la répartition inconnue.

On "cherche" le support, la forme générale, des bornes supérieure et inférieure, l'approximation de la densité de probabilité associée à la répartition respective, etc.

On travaille sur l'axe réel, mais aussi dans le plan; il s'agit des oeuvres de A. Tagliani, [21] et de M. Elad, P. Milanfar et G. H. Golub, [5].

4 Conclusions

Les méthodes de résoudre ces deux problèmes de construction sont complètement différentes, vu que dans le cas du premier problème, la fonction h est supposée être seulement mesurable Borel et essentiellement bornée, pendant que, dans le deuxième problème la fonction $f = f_1 + if_2$ est supposée analytique, ce que permet, en particulier, l'utilisation de la formule de Cauchy et des conditions de Cauchy - Riemann.

Pour résoudre le premier problème, les hypothèses sur h conduisent à la construction naturelle d'une fonction

$$\varphi \in L^\infty([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi]),$$

ce que permet l'emploi du système trigonométrique (comme base de Hilbert) dans l'espace $L^2([-\pi, \pi])$, pour développement de la fonction φ en série de Fourier dans l'espace $L^2([-\pi, \pi])$.

Ensuite, on exprime les coefficients de Fourier de la fonction φ par rapport aux moments et, en utilisant les résultats de la théorie de la mesure, on "connaît" la fonction φ , donc la fonction h , p.p.t. par rapport aux moments donnés $y_{(j_1, j_2)}$, $\forall (j_1, j_2) \in \mathbf{Z}_+^2$.

Pour la solution du deuxième problème, quoique les techniques soient complètement différentes, (on use la formule intégrale de Cauchy pour calculer les coefficients de la série de Taylor $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, la formule de Green-Riemann pour passer de cercle à disque et ensuite les conditions de Cauchy-Riemann pour simplifier les résultats), pourtant l'idée est semblable à celle du premier problème.

Plus précisément, f étant donnée par la somme d'une série de Taylor autour de l'origine, dans le disque $D(0; R)$, il suffit exprimer les coefficients $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ de cette série par rapport aux moments $m_{(k, l)}(f)$ d'ordre (k, l) , $m_{(k, l)}(f)$ définis par la relation (2.1), étant supposés donnés.

Pendant que au premier problème on "connaît" la fonction h seulement ds - p.p.t. sur l'ellipse K_E , dans le cas du deuxième problème on peut connaître $f(z)$ pour tout $z \in D(0; R)$ par rapport aux moments.

Références bibliographiques

- [1] N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1965.
- [2] C. Ambrozie, O. Olteanu, *A sandwich theorem, the moment problem, finite-simplicial sets and some inequalities*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 49, 3 (2004), 189-210.
- [3] I. Cuculescu, *Probabilities Applied in Physics* (en Roumaine), Ed. Univ. Bucarest, 2001.
- [4] I. Cuculescu, *Theory of Probabilities* (en Roumaine), Ed. All, Bucarest, 2006.
- [5] M. Elad, P. Milanfar, G. H. Golub, *Shape from moments - An estimation theory perspective*, IEEE Trans. on Signal Processing 52, 7 (2004), 1814-1829.
- [6] A. Gheondea, M. Şabac (éditeurs), *Spectral Analysis and Its Applications. Ion Colojoară Anniversary Volume*, Theta Series in Advanced Mathematics, Bucharest, 2003.
- [7] M. Iosifescu, G. Mihoc, *Theory of Probabilities and Mathematical Statistics* (en Roumaine), Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucharest, 1970.

- [8] M. Iosifescu, C. Niculescu, *Mathematical Analysis and Applications: International Conference on Mathematical Analysis and Applications, Craiova (Romania), 23-24 September 2005*, AIP Conference Proceedings Volume 835, American Institute of Physics, 2006.
- [9] M. G. Krein, A. A. Nudelman, *Markov Moment Problem and Extremal Problems*, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1977.
- [10] L. Lemnete, *An operator-valued moment problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 1023–1028.
- [11] L. Lemnete Ninulescu, *Using the solution of an abstract moment problem to solve some classical complex moment problems*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 51, 5-6 (2006), 703-711.
- [12] L. Lemnete Ninulescu, A. Olteanu, O. Olteanu, *Applications of the solutions of two abstract moment problems to the classical moment problem*, MATHEMATICA, 48 (71) (2006), 173-182.
- [13] J. M. Mihăilă, O. Olteanu, C. Udriște, *Markov-type and operator-valued multi-dimensional moment problems, with some applications*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 52, 4 (2007), 405-428.
- [14] J. M. Mihăilă, O. Olteanu, C. Udriște, *Markov-type moment problems for arbitrary compact and for some non-compact Borel subsets of \mathbf{R}^n* , Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 52, 6 (2007), 655-664.
- [15] V. Olariu, O. Olteanu, *Mathematical Analysis* (en Roumaine), Ed. SEMNE, Bucarest, 1999.
- [16] V. Olariu, O. Olteanu, *Distributions attached to a moment problem and to the calorical derivatives*, U.P.B. Sci. Bull. Series A 63, 3 (2001), 11-22.
- [17] O. Olteanu, *Application de théorèmes de prolongement d'opérateurs linéaires au problème des moments et à une généralisation d'un théorème de Mazur-Orlicz*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 313 (1991), 739-742.
- [18] O. Olteanu, *Extension of linear operators and moment problems in spaces of analytic functions.*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 47, 5-6 (2002), 737–742.
- [19] M. Putinar, F.-H. Vasilescu, *Solution du problème des moments par extension dimensionnelle*, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 328 (1999), 495-499.
- [20] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (en Roumaine), III-rd Ed., Theta, Bucarest, 1999.
- [21] A. Tagliani, *Entropy estimate of probability densities having assigned moments: Stieltjes case*, Applied Mathematics and Computation 130, 1 (2002), 201-211.

Authors' addresses:

Janina Mihaela Mihăilă
 Département des Mathématiques et Informatique,
 L'Université Écologique de Bucarest, 22, Rue Franceză,
 Bucarest, Roumanie.
 E-mail: janinamihaelamihaila@yahoo.it

Octav Olteanu and Constantin Udriște
 Département des Mathématiques I,
 L'Université Polytechnique de Bucarest, Roumanie.
 E-mail addresses: olteanuoctav@yahoo.ie, udriste@mathem.pub.ro