Systèmes dynamiques nonautonomes et des champs associés

Virgil Obădeanu

Abstract

Dans le travail on montre comment à tout spray (équation differentielle du deuxième ordre nonautonome) on associe de façon canonique un champ et, par conséquent, des ondes.

Mathematics Subject Classification: 34C35, 58F40, 70G30
Key words: dynamical systems, field, waves

1 Théorème d'Elie Cartan

Soient E une variété différentiable de dimension $2m+1$ et Ω une 2–forme définie sur elle. Supposons que le rang du Ω est $2m$. Une équation de la forme:

$$\Omega(X, Y) = 0, \quad X, Y \in \mathcal{X}(E), \tag{1}$$

admet deux interprétations. On cherche le champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(E)$, tel que: $i_X\Omega(Y) = 0$, $\forall Y \in \mathcal{X}(E)$, ou bien: $i_Y\Omega(X) = 0$, $\forall Y \in \mathcal{X}(E)$.

A lieu:

Proposition 1. (Théorème d'E. Cartan) *Soit donnée sur E une 2–forme Ω de rang $2m$, l'équation (1) admet toujours une solution X et à la fois tout autre champ de la forme fX ($f \in C^\infty(E)$) est de même une solution. Toutes les solutions de l'équation (1) peuvent être obtenue par cette voie.*

En conclusion, l'équation (1) admet comme solution un champ de directions dont les courbes intégrales sont appelées les *caractéristique* de Ω.

2 Théorème d'équivalence

Soit M une variété différencielle de dimension $2m$. Dans l'ensamble des 2–formes définies sur $E = \mathbf{R}\times M$, de rang $n-1 = 2m$, on définit une relation d'équivalence: nous dirons que deux 2–formes Ω et Ω' sont équivalentes, et on écrira $\Omega \sim \Omega'$ si et seulement si Ω et Ω' admettent les mêmes caractéristiques.

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.1, No.2, 1996, pp. 63-74

Théorème 1. *Dans toute classe d'équivalence il existe (au moin locallement) une 2–forme $\overline{\Omega}$ fermée ($d\overline{\Omega} = 0$), et donc présymplectique.*
Demonstration. Supposons donnée sur E ($\dim E = 2m + 1$) une 2–forme Ω de rang $2m$ qui, locallement, s'écrit sous la forme:

$$\Omega = \frac{1}{2} a_{ij} dx^i \wedge dx^j + a_i dx^i \wedge dt \tag{2}$$

où $a_{ij} = -a_{ji}$ et $\det(a_{ij}) \neq 0$. Conformément à la proposition 1, les équations caractéristiques de Ω sont

$$i_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial (dx^i)} = a_{ij} dx^i + a^i dt = 0 \tag{3}$$

cherchons une 2–forme

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{2} b_{ij} dx^i \wedge dx^j + b_i dx^i dt, \quad b_{ij} = -b_{ji}, \ \det(b_{ij}) \neq 0 \tag{4}$$

fermée et admettant les mêmes caractéristiques que Ω. Ses caractéristiques sont données par:

$$b_{ij} dx^j + b_i dt = 0 \tag{5}$$

dans l'hypothèse $\det(b_{ij}) \neq 0$. Les systèmes (2) et (5) sont équivalents s'il existe une matrice nondégénérée (g_i^j), telle que:

$$b_{ih} ax^h + b_i dt = g_i^j (a_{jh} dx^h + a_j dt), \quad \det(g_i^j) \neq 0 \tag{6}$$

relations desquelles on obtient:

$$b_{ih} = g_i^j a_{jh}, \quad b_i = g_i^j b_j. \tag{7}$$

La condition que $\overline{\Omega}$ soit fermée se traduit par:

$$b_{ij} + b_{ji} = 0, \quad \sum_{(i,j,k)} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial b_j}{\partial x^i} - \frac{\partial b_i}{\partial x^j} = 0, \tag{8}$$

où, dans la duexième relation $1 \leq i < j < k \leq 2m$, la somme se faisant suivant les permutations circulaires de (i, j, k) et dans la dernière on a $1 \leq i \leq j \leq 2m$. En tenant compte de (7) et (8), on arrive à:

$$\begin{gathered} g_i^j a_{jh} + g_h^j a_{ji} = 0, \quad \sum_{(i,j,k)} \frac{\partial}{\partial x^k}(g_i^p a_{pj}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(g_i^p a_{pj}) + \frac{\partial}{\partial x^i}(g_j^p a_p) - \frac{\partial}{\partial x^j}(g_i^p a_p) = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Ayant en vue que la matrice (a_{ij}) est inversible, de la deuxième relation (9) on obtient:

$$\frac{\partial g_i^p}{\partial t} = \mathcal{F}_i^p \left(t, x^j, g_k^h, \frac{\partial g_k^h}{\partial x^r} \right) \tag{10}$$

équations qui, en base du théorème de Cauchy–Kovalewskaya, assure que le système (9) admet de solutions (dans certaines conditions de différentiabilité que nous les supposons satisfaites).

3 Équations différentielles du deuxième ordre

Soient M une variété différentiable à m dimensions, $E = \mathbf{R} \times TM$ l'espace d'évolutions et $\{\theta'\}$ une base des formes de contact, dont l'expression locale est $\theta^i = dx^i - y^i dt$.

Définition. On appelle spray nonautonome un champ de vecteurs $S \in \mathcal{X}(E)$ qui vérifie les propriétés:

1° $dt(S) = 1$

2° $\theta^i(S) = 0$.

Soient (U, φ) une carte locale sur M, avec les coordonnées (x^i), et respectivement (U, Φ) la carte vectorielle correspondante sur E avec les coordonnées (t, x^i, y^i). L'expression du spray S est:

$$S = \frac{\partial}{\partial t} + y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + S^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad S^i \in \mathrm{C}^\infty(E) \tag{11}$$

Les équations différentielles des trajectoires de S sur $\mathbf{R} \times TM$ sont:

$$\frac{dx^i}{dt} = y^i, \quad \frac{dy^i}{dt} = S^i(t, x, y), \tag{12}$$

et les équations différentielle du deuxième ordre des projections des trajectoires ci-dessus, sur M, sont:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = S^i\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{13}$$

équations qui modèlent la dynamique d'un système nonautonome.

Au système (12) correspondent les formes de Pfaff:

$$\begin{aligned} \theta^i &= dx^i - y^i dt \\ \psi^i &= dy^i - S^i dt \end{aligned} \tag{14}$$

dont l'annulation définit le système (12), car $\theta^i(S) = 0,\ \psi^i(S) = 0$.

Grace à l'existence du spray S, il s'impos sur E le corepère (dt, θ^i, ψ^i), qu'on appellera corepère adaptie au spray. Le changement des corepères est formé par (14) et $dt = dt$, $(dt, dx^i, dy^i) \to (dt, \theta^i, d\psi^i)$.

Soit un changement des cartes locales sur M, défíné par les formules

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, \ldots, x^m)$$

cellui-ci induit un changement sur les cartes vectorielles correspondant sur TM, par les formules:

$$\begin{aligned} \overline{x}^i &= \overline{x}^i(x^1, \ldots, x^m), \\ \overline{y}^i &= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} y^j. \end{aligned} \tag{15}$$

Par rapport avec des cartes vectorielles, les composantes du champ S se transforme suivant les formules:

$$(16)\qquad \begin{aligned}\overline{y}^i &= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^h} y^h \\ \overline{S^i} &= \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^j \partial x^h} y^j y^h + \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} S^j.\end{aligned}$$

Les différentielles des fonctions (15) sont:

$$(17)\qquad \begin{aligned}d\overline{x}^i &= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^h} dx^h \\ d\overline{y}^i &= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^h} dy^h + \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^j \partial x^h} y^j dx^h\end{aligned}$$

En calculant les formes (14), dans les deux cartes, on arrive á:

$$(18)\qquad \begin{aligned}\overline{x}^i &= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^h} \theta^h \\ \overline{\psi}^i &= \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^j \partial x^h} y^j \theta^h + \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^h} \psi^h.\end{aligned}$$

4 Forme de Lagrange

Soit le système d'équations différentielles (12): $dx^i - y^i dt = 0,\ dy^i - S^i dt = 0$. Associons à celui-ci une 2–forme de la forme la plus générale:

$$(19)\quad \Omega = g_{ij} dy^i \wedge dx^j + (E_i dx^i + P_i dy^i) \wedge dt + \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2} Q_{ij} dy^i \wedge dy^j.$$

où

$$(19')\qquad B_{ij} = -B_{ji} \quad Q_{ij} = -Q_{ji}.$$

Le système d'équations caractéristiques associé à la 2–forme Ω, donnée par (3) est:

$$(20)\qquad \begin{aligned}B_{ij} dx^j - g_{ji} dy^j + E_i dt = 0 \\ g_{ij} dx^j + Q_{ij} dy^j + P_i dt = 0\end{aligned}$$

auquel on ajoute de plus leurs combinaison linéaire:

$$E_i dx^i + P_i dy^i = 0.$$

Le système (20) est équivalent avec le système (12) si et seulement si

$$(21)\qquad \det \begin{pmatrix} B_{ij} & -g_{ji} \\ g_{ij} & Q_{ij} \end{pmatrix} \neq 0$$

et sont accomplies les *conditions de Lorentz*:

$$(22)\qquad \begin{aligned}E_i &= g_{ji} S^j + B_{ji} y^j \\ P_i &= -(g_{ij} y^j + Q_{ij} S^j)\end{aligned}$$

Définition. Une 2–forme Ω, de la forme (14), avec la propriété que les conditions de Lorentz (22) sont accomplies, porte la nomme de la forme de Lagrange associée au spray (11), et en même temps au système (12), ou à l'équation (13).

La forme de Lagrange (14) peut être déduite formellement à l'aide d'un pseudotenseur covariant, deux fois antisymétrique arbitraire $\mathcal{F}$, de composantes: $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B_{ij} & -g_{ji} \\ g_{ij} & Q_{ij} \end{pmatrix}$ par la formule:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\theta^i, \psi^i) \wedge \begin{pmatrix} B_{ij} & -g_{ji} \\ g_{ij} & Q_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^j \\ \psi^j \end{pmatrix} = g_{ij}\psi^i \wedge \theta^j + \frac{1}{2}B_{ij}\theta^i \wedge \theta^j + \frac{1}{2}Q_{ij}\psi^i \wedge \psi^j$$

(qui ne contient pas de t). A l'aide de (14) on obtient:

$$\begin{aligned} \Omega &= g_{ij}dy^i \wedge dx^j + [(g_{ji}S^j + B_{ji}y^j)dx^i - (g_{ij}y^j + Q_{ij}S^j)dy^i] \wedge dt \\ &+\frac{1}{2}B_{ij}dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}Q_{ij}dy^i \wedge dy^j \end{aligned} \tag{23}$$

ce qui nous montre qu'elle est de la forme (19') avec l'accomplissement des relations (22).

Proposition 2. *Etant donnée une forme (définie sur $\boldsymbol{R} \times TM$, fermée ou non et de rang $2m$) comme (19), ayant la propriété* $\det(g_{ij}) \neq 0$*, il existe un unique spray S, tel que Ω soit une forme de Lagrange pour S.*

Demonstration. En supposant donné le champ de forces S^j, et avec lui les relations de Lorentz (22), nous exprimons ce champ sous la forme explicite:

$$S^i = g^{ij}(E_j + B_{jh}y^h)$$

ce qui définit le spray S.

En introduisant dans (19) les fonctions E_i et P_i données par (22), on obtient pour Ω l'expression (23), les caractéristiques de (19) peuvent se mètre sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial(dx^i)} &= B_{ij}\theta^j - g_{ji}\psi^j = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial(dy^i)} &= g_{ij}\theta^j + Q_{ij}\psi^j = 0 \end{aligned}$$

équations qui, à l'hypothèse (17), conduisent à la solution (12) cherchée.

Interprétation géométrique des conditions de Lorentz

Soit la 2–forme (19) exprimée dans le corepère (dt, dx^i, dy^i). Exprimons la dans le corepère (dt, θ^i, ψ^i) à l'aide des inverses des transformations (14):

$$\begin{aligned} dx^i &= \theta^i + y^i dt \\ dy^i &= \psi^i + S^i dt \end{aligned}$$

On arrive à l'expression:

$$\begin{aligned} \Omega = \ & g_{ij}\psi^i \wedge \theta^j + \frac{1}{2}B_{ij}\theta^i \wedge \theta^j + \frac{1}{2}Q_{ij}\psi^i \wedge \psi^j \\ & +(E_i - g_{ji}S^j - B_{ji}y^j)\theta^j \wedge dt + (P_i + g_{ij}y^j + Q_{ij}S^j)\psi^i \wedge dt \end{aligned}$$

d'où le:
Théorème 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour q'une 2–forme Ω (de la forme (19)) soit une forme de Lagrange d'un spray S (donnée) est que sont expression dans un corepère adapté à S soit réduite a la forme canonique.*

5 Principe de Maxwell

Des examples importants de systèmes dynamiques jouissent de la propriété que leurs trajectoires coïncident avec les trajectoires d'une 2–forme *fermée* Ω, la forme de Lagrange du système. Cette condition imposée à la 2–forme Ω d'être fermée, a été prise par Souriau comme principe, appelé le *principe de Maxwell.*

Considérons le cas le plus général dans lequel la dynamique d'un système est décrite par une 2–forme Ω donnée par (19). Supposons qu'ont lieu les condition de Lorentz (22). Le principe de Maxwell imposé à la 2–forme Ω nous conduit aux équations:
(24)

$$\text{a)}\ \frac{\partial g_{jh}}{\partial y^i}-\frac{\partial g_{ih}}{\partial y^j}+\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x^h}=0; \qquad \text{b)}\ \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j}-\frac{\partial B_{ij}}{\partial y^h}=0;$$

$$\text{c)}\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial E_j}{\partial y^i}-\frac{\partial P_i}{\partial x^j}=0; \qquad \text{d)}\ \frac{\partial B_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial E_j}{\partial x^i}-\frac{\partial E_i}{\partial x^j}=0;$$

$$\text{e)}\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial P_j}{\partial y^i}-\frac{\partial P_i}{\partial y^j}=0; \qquad \text{f)}\ \sum_{(i,j,k)}\frac{\partial B_{ij}}{\partial x^h}=0; \quad \text{g)}\ \sum_{(i,j,k)}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial y^h}=0,$$

(i,j,k) étant une permutation circulaire des nombres $(1,2,3)$. Les équations du système (24) sont appellées les *équations de type Maxwell*, elle généralisent les équations de Maxwell de l'éléctrodynamique dans le cas où le système dynamique décrit l'évolution de certaines masses chargées, placées dans un champ éléctromagnetique extérieur.

Pour l'intégration du système d'équations (24) dans l'hypothèse d'existence des conditions de Lorentz (22), nous éliminerons les fonctions E_i et P_i, ainsi.

En partant de l'équation (24, d), en remplaçant E_i données par (22, 1) et en tenant compte de b) et f) on obtient l'équation:

$$S(B_{ij})+\frac{\partial S^h}{\partial x^i}g_{hj}-\frac{\partial S^h}{\partial x^j}g_{hi}=0, \tag{25}$$

où le spray S est interpreté comme opérateur de dérivation (suivant ses trajectoires) sur les fonctions.

De façon analogue, en partant de l'équation (22, 2), en utilisant (24, a) et (24, g), on arrive à:

$$S(Q_{ij})+\frac{\partial S^h}{\partial y^j}Q_{ih}-\frac{\partial S^h}{\partial y^j}Q_{jh}+g_{ij}-g_{ji}=0 \tag{26}$$

En partant de (20, c), avec l'utilisation de (20, a) et (20, b), on arrive à:

$$S(g_{ij})+\frac{\partial S^h}{\partial x^j}Q_{ih}+\frac{\partial S^h}{\partial y^i}g_{hj}+B_{ij}=0 \tag{27}$$

Celles-ci sont des équations linéaires, on les resolvent et de ses solutions on choisissent celles qui accomplissent les conditions necessaires (19′) et (21).

Le système complet est:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial B_{ij}}{\partial y^h} = \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^i}, \quad \sum \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^h} = 0\\
&\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x^h} = \frac{\partial g_{ih}}{\partial y^j} - \frac{\partial Q_{jh}}{\partial y^i}, \quad \sum \frac{\partial Q_{ij}}{\partial y^h} = 0\\
&S(B_{ij}) + \frac{\partial S^h}{\partial x^i} g_{hj} - \frac{\partial S^h}{\partial x^j} g_{hi} = 0\\
&S(Q_{ij}) + Q_{ih}\frac{\partial S^h}{\partial y^j} - Q_{jh}\frac{\partial S^h}{\partial y^i} + g_{ij} - g_{ji} = 0\\
&S(g_{ij}) + Q_{ih}\frac{\partial S^h}{\partial x^j} + \frac{\partial S^h}{\partial y^i} g_{hj} + B_{ij} = 0
\end{aligned}
$$

Définition. Étant donné un sustème dynamique (spray), la 2–forme de Lagrange Ω (19) associée et fermée porte le nome de *champ*, mais les équations de Maxwell (24) le nome des *équations de champ.*

Grace aux propriétés de linéarité des équations (25), (26) et (27), il résulte que l'ensemble des formes Ω associées à un système dynamique forment un éspace linéaire, souséspace de l'éspace $\Lambda^2(\mathbf{R} \times TM)$.

6 Le potentiel du champ Ω

La 2–forme Ω étant fermée, elle est localment exacte, il existe donc une 1–forme λ telle que $d\lambda = \Omega$. Soit

$$\lambda = -V dt + B_i dx^i + C_i dy^i$$

En calculant sa différentielle et en identifiant ses coefficients avec ceux de Ω, on obtient le systéme:

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial x^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} = -E_i, \quad \frac{\partial V}{\partial y^i} + \frac{\partial C_i}{\partial t} = -P_i,\\
&\frac{\partial A_j}{\partial y^i} - \frac{\partial A_i}{\partial y^j} = B_{ij}, \quad \frac{\partial C_j}{\partial y^i} - \frac{\partial C_i}{\partial y^j} = Q_{ij}, \quad \frac{\partial A_j}{\partial y^i} - \frac{\partial C_i}{\partial x^j} = g_{ij}
\end{aligned}
$$

Si on considère les opérateurs (liés de la cartes locale)

$$\frac{\partial}{\partial z} : \lambda \to \frac{\partial \lambda}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} dt + \frac{\partial A_h}{\partial z} dx^h + \frac{\partial C_h}{\partial z} dy^h, \quad \text{où } z = x^i, y^i$$

les conditions de Lorentz peuvent se transcrire en base des relations (24) sous la forme

$$
\begin{aligned}
S(A_i) &= \frac{\partial \lambda}{\partial x^i}(S)\\
S(C_i) &= \frac{\partial \lambda}{\partial y^i}(S).
\end{aligned}
$$

Le potentiel λ est déterminé à une différentielle près. Un changement de potentiel de la forme

$$\overline{\lambda} = \lambda + d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - V\right) dt + \left(A_i + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\right) dx^i + \left(C_i + \frac{\partial \Phi}{\partial y^i}\right) dy^i$$

ne change pas le champ. On peut choisir la fonction Φ telle que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = V$, alors le potentiel se simplifie.

Conclusions. Le formalisme que nous venons de présenter on l'appellera le formalisme de Gallissot–Souriau (G.–S.).

On appelle *problème direct* du formalisme G.–S. la donnée d'une 2–forme présymplectique Ω sur $\mathbf{R} \times TM$ (de rang $2m$ et fermée) et la détermination d'un spray (champ de forces), pour lequel Ω est la forme de Lagrange.

Sa résolution consiste en l'écriture des équations des caractéristiques et de mettre celles-ci dans la forme équivalente newtonienne.

Pratiquement, on donne, dans le cas le plus général, une 2–forme (19), fermée et de rang $2m$. Avec l'hypothèse (21) des équations (22) on exprime S^i, ensuite on écrit les équations de Newton (13).

On appelle *problème inverse* dans le formalisme G.–S. la donnée des équations (13) et la détermination d'une 2–forme présymplectique (fermée et de rang $2m$) dont les caractéristiques sont exactement les solutions de Newton.

Le résultat c'est que tout système newtonien (nondégénéré) admet une représentation G.–S. C'est un cas particulier du théorème 1. On associe au système d'équations newtoniennes, la 2–forme Ω_0:

$$\Omega_0 = (dy^i - S^i dt) \wedge (dx^i - y^i dt) = dy^i \wedge dx^i + (S^i dx^i - y^i dy^i) \wedge dt. \tag{30}$$

Dans sa classe d'équivalence il existe alors une, qui est fermée.

Observation. Si le system (24) admet deux solutions, alors toute combinaison linéaire de celles-ci, avec des coefficients réels, est de même une solution.

7 Theorie de champ

Soit donnée une variété pseudoriemanniene (M, g) et sur M une 2–forme α fermée, à celle-ci on associe une theorie de champ comme suit:

1°. La 2–forme α étant fermée et locallement exacte et donc lui corresponde une 1–forme λ, telle que $\alpha = d\lambda$. La 1–forme λ porte le nome de *forme potentiel.*

Étant donnée la forme potentiel λ, la forme champ α est uniquement déterminée, réciproquement, si on donne α, son potentiel et déterminé, à une différentielle totale près.

2°. À l'utilisation de l'opérateur d'adjonction $\star$ de Hodge – de Rham, à côté de la 2–forme α, on met en évidence aussi une $(m-2)$–forme $\beta = \star\alpha$. Ensemble les formes α et β définissent ce que nous appellerons un *champ*. Pour la définition du champ, il suffit la connaissance de l'une de ces deux formes chaqu'une d'elles détermine l'autre par $\star$ et par les propriétés, comment nous verons plus bas.

3°. Avec la 1–forme λ on associe la $(m-1)$–forme ξ, par la formule $\lambda = \star\xi$. Ensemble les formes λ et ξ définissent, pour le champ donné, ce que nous appellerons le *potentiel* du champ.

4°. Généralement, la forme β n'est pas fermée, donc a lieu une relation de la forme $d\beta + \gamma = 0$, où γ est une $(m-1)$–forme. La forme γ porte le nome de *forme courent*, ensemble avec la 1–forme $\theta = \star\gamma$.

5°. Des définitions données ci-dessus, on déduit les équations de Maxwell suivantes, pour le potentiel: $d\xi = 0,\ d\lambda = \alpha$; pour le champ: $d\alpha = 0,\ d\beta + \gamma = 0$; pour le courent: $d\gamma = 0,\ d\theta - \gamma = 0$ etc.

6°. En utilisant l'opérateur de Laplace–d'Alembert Δ, on arrive aux *équations* suivantes, appelées *de propagation*; pour le potentiel $\Delta\xi = d\delta\xi$, pour le champ: $\Delta\alpha = d\delta\alpha$ et pour le courent: $\Delta\gamma = d\delta\gamma$.

7°. L'équation $d\gamma = 0$ est connue sous le nome de l'*équation de continuité*. Une équation importante, qui définit le potentiel par le courent (ou le courrent par le potentiel) est l'équation: $\Delta\lambda = \star\gamma$, si le courrent est nul, le potentiel est une forme avec les coefficients des fonctions harmoniques.

8°. Les équations de type Maxwell et de propagation si-dessus déterminées sont respectivement équvalentes avec les équations utilisant la codifférentielle.

En présentant ces résultats dans le tableau.

Nature	potentiel	champ	courent
Formes de définitions	$\xi \in \Lambda^{m-1}(M)$ $\lambda = \star\xi \in \Lambda^1(M)$	$\alpha \in \Lambda^2(M)$ $\beta = \star\alpha \in \Lambda^{m-2}(M)$	$\gamma \in \Lambda^{m-1}(M)$ $\theta = \star\gamma \in \Lambda^1(M)$
Équations de Maxwell (de champ)	$d\xi = 0$ $d\lambda - \alpha = 0$	$d\alpha = 0$ $d\beta + \gamma = 0$	$d\gamma = 0$ $d\theta - \gamma = 0$
Équations de propagations (des ondes)	$\Delta\xi = d\delta\xi$	$\Delta\alpha = d\delta\alpha$	$\Delta\gamma = d\delta\gamma$
Équations de Maxwell (forme duale)	$\delta\lambda = 0$ $\delta\xi + \beta = 0$	$\delta\beta = 0$ $\delta\alpha - \theta = 0$	$\delta\theta = 0$ $\delta\gamma + \nu = 0$
Forme équivalente des équations de propagation	$\Delta\lambda = \delta d\lambda$	$\Delta\beta = \delta d\beta$	$\Delta\theta = \delta d\theta$

Comme on a montré plus haut, á tout système dynamique (spray) on associe une 2–forme fermée Ω. Celle-ci joue le rôle de 2–forme α (sur TM) et, par suite, on y associe une theorie de champ et, par consequant, un champ et des ondes, comme des solutions des équations de propagation, si sur M on donne une métrique riemannienne, on relève ensuite celle-ci à TM et on construit une métrique pseudoriemannienne sur $\mathbf{R} \times TM$.

8 Forme principale de l'équation de deuxième ordre

Une équation de deuxième ordre, écrite dans la forme principale (covariante) est donnée, locallement, par:

$$A_{ij}(t,x,\dot{x})\ddot{x}^j + B_i(t,x,\dot{x}) = 0 \tag{31}$$

à celle-ci on associe le système de Pfaff:

$$\begin{aligned} \theta^i &= dx^i - y^i dt \\ \psi_i &= A_{ij}dy^j + B_i dt \end{aligned} \tag{32}$$

L'expression du spray S, défini par les relations $dt(S) = 0$, $\theta^i(S) = 0$, $\psi^i(S) = 0$, est $S = \dfrac{\partial}{\partial t} + y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} - A^{ih}B_h \dfrac{\partial}{\partial y^i}$, où A^{ij} est la matrice inverse de A_{jh}. Nous avons en même temps le repère adapté à l'équation: (θ^i, ψ^i, dt).

Définition. Nous appellerons forme canonique réduite d'une 2–forme Ω l'expression:

$$\Omega = \psi_i \wedge \theta^i + \frac{1}{2} B_{ij}\theta^i \wedge \theta^j, \quad \text{avec } B_{ij} + B_{ji} = 0. \tag{33}$$

Une telle forme s'obtient formellement par:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\theta^i, \psi_i) \wedge \begin{pmatrix} B_{ij} & -\delta_{ij} \\ \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^j \\ \psi_j \end{pmatrix}.$$

Proposition 3. *Les caractéristiques de la 2–forme Ω coïncident avec les trajectoires du système (31).*

En effet, on a:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta^i} = -\psi_i + B_{ij}\theta^j, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \psi_i} = \theta^i,$$

système ayant la solution $\theta^i = \psi_i = 0$.

En remplaçant dans (3), les expressions de θ^i et ψ_i données par (32), on obtient l'expression locale de Ω, dans le corepère naturel (dx^i, dy^i, dt):

$$\Omega = A_{ji}dy^i \wedge dx^j - [(B_{ij}y^j + B_i)dx^i + A_{ji}y^j dy^i] \wedge dt + \frac{1}{2}B_{ij}dx^i \wedge dx^j. \tag{34}$$

Elle est de la forme générale (19), où:

$$g_{ij} = A_{ji}, \quad E_i = -(B_{ij}y^j + B_i), \quad P_i = -A_{ji}y^j, \quad Q_{ij} = 0. \tag{35}$$

Supposons maintenant que la 2–forme Ω est fermée. Dans ce cas les équations de Maxwell (24) se réduisent à:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A_{hj}}{\partial y^i} - \frac{\partial A_{hi}}{\partial y^j} = 0, \quad \frac{\partial A_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ih}}{\partial x^j} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial y^h},\\
&\frac{\partial A_{ji}}{\partial t} - y^h \frac{\partial B_{jh}}{\partial y^i} - B_{ji} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} + y^h \frac{\partial A_{hi}}{\partial x^j} = 0\\
&\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial B_{jh}}{\partial x^i} \right) y^h + \frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} = 0\\
&\frac{\partial A_{hj}}{\partial y^i} - \frac{\partial A_{hi}}{\partial y^j} + A_{ij} - A_{ji} = 0, \quad \sum \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^h} = 0.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Éliminons de ces équations les fonctions B_{ij}. Du premier groupe d'équations et du cinquième il résulte:

$$
A_{ij} = A_{ji}, \quad \frac{\partial A_{ih}}{\partial y^j} = \frac{\partial A_{jh}}{\partial y^i}. \tag{37}
$$

Le troixième groupe nous conduit à:

$$
B_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) A_{ij} - \frac{\partial B_i}{\partial y^j}.
$$

En changeant les indices i et j entre eux, par addition et soustraction des deux formules, il résulte:

$$
\frac{\partial B_j}{\partial y^i} + \frac{\partial B_i}{\partial y^j} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) A_{ij} \tag{38}
$$

et

$$
B_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_j}{\partial y^i} - \frac{\partial B_i}{\partial y^j} \right).
$$

Le quatrième groupe de relations (36), en utilisant les relations (38), devient:

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) B_{ij} = \frac{\partial B_j}{\partial x^i} - \frac{\partial B_i}{\partial x^j}
$$

tel que des derniers deux groupes d'équations il résulte:

$$
\frac{\partial B_j}{\partial x^i} - \frac{\partial B_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial B_j}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial B_i}{\partial \dot{x}^j} \right).
$$

Les équations (37), (38) et (39) ne sont autre chose que les équations de Helmholtz, qui nous disent que le système (31) est lagrangien. On a:
Théorème 3. *Un système d'équations de deuxième ordre, écrit dans la forme principale (31), est lagrangien si et seulement si sa forme de Lagrange écrite dans le repère adapté au système est réduite à la forme canonique réduite et fermée.*

Bibliographie

[1] J. F. Cariñena, E. Martinez, *Symmetry theory and inverse problem for time-dependent second order differential equations.* Departamento de Fizico Teórica, Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. DFTUZ – 88.21, 7 p. Preprint University of Zaragoza.

[2] F. Gallissot, *Les formes extérieures en mecanique*, Ann. de l'Inst. Fourrier, t. IV (1952), p.145 – 297.

[3] R. Miron, M. Anastasiei, *Fibrate vectoriale. Spaţii Lagrange. Aplicaţii în teoria relativităţii.* Edit. Acad. RSR, Bucureşti (1987).

[4] V. Obădeanu, M. Boleanţu, *Le formalisme de Gallissot–Souriau de la mecanique classique.* Seminarul de mecanică nr. 36, Fac. de Matematică, Univ. din Timişoara (1993),
42 p.

[5] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunnod, Paris (1970).

[6] C. Udrişte, *Linii de câmp*, Edit. Tehn. Bucureşti (1988).

Université de l'Ouest de Timişoara,
Depart. des Mathematiques,
Bd. V. Pârvan nr, 4,
1900 Timişoara, Roumanie,
e–mail: obadeanu@tim1.uvt.ro